Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности слабых решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 584–591

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:44:29

УДК 517.956

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. В. Покровский

Пусть $P(x, D)$ – линейный дифференциальный оператор порядка $m > 0$, коэффициенты которого m раз непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), и пусть $1 < p < \infty$, $s > 0$, $q = p/(p-1)$. Показано, что если n, m, p и s удовлетворяют двойному неравенству $0 \leq n - q(m-s) < n$, то всякое замкнутое в G множество конечной хаусдорфовой меры порядка $n - q(m-s)$ устранимо для слабых решений уравнения $P(x, D)u = 0$ в классе Шарпли–ДеВора $C_p^s(G)_{\text{loc}}$. Это усиливает известный результат Р. Харви и Дж. Полкинга об устранимых особенностях слабых решений уравнения $P(x, D)u = 0$ в классах Соболева и распространяет его на нецелые показатели гладкости.

Библиография: 11 названий.

Введение. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

$$P(x, D) = \sum_{|k| \leq m} a_k(x) D^k$$

– линейный дифференциальный оператор порядка $m > 0$, коэффициенты a_k которого – m раз непрерывно дифференцируемые функции в области G (здесь и далее рассматриваются функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения): $a_k \in C^m(G)$, $|k| \leq m$. Здесь $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$,

$$|k| = k_1 + \dots + k_n, \quad D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}.$$

Пусть Ω – непустое открытое подмножество области G . Как обычно, $C_0^\infty(\Omega)$ – множество всех функций, бесконечное число раз дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$, носитель которых – компакт, лежащий в Ω . Функция f , локально интегрируемая по Лебегу на множестве Ω , называется *слабым решением* уравнения

$$P(x, D)u = 0 \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы Украины, грант № 0102U000917.

на этом множестве, если для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$(P(x, D)f, \phi) := \sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} \int_{\Omega} f(x) D^k (a_k \phi)(x) dx = 0. \quad (2)$$

Множество всех таких $f \in L_1(\Omega)_{\text{loc}}$ будем обозначать $A(P(x, D), \Omega)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$. Как обычно, $W_p^s(G)_{\text{loc}}$ – множество всех функций, имеющих обобщенные производные по Соболеву всех порядков $\leq s$, локально интегрируемые в степени p , $W_p^0(G)_{\text{loc}} := L_p(G)_{\text{loc}}$. Пусть $q = p(p-1)^{-1}$, а s таково, что выполнено двойное неравенство $0 \leq n - q(m-s) < n$. При сделанных предположениях в работе [1] установлен следующий результат о стирании особенностей слабых решений уравнения $P(x, D)u = 0$ в классе $W_p^s(G)_{\text{loc}}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1], а также [2, с. 23]). Пусть E – замкнутое множество в G , имеющее конечную хаусдорфову меру порядка $n - q(m-s)$: $\text{mes}^{n-q(m-s)} E < \infty$. Тогда справедливо включение

$$A(P(x, D), G \setminus E) \cap W_p^s(G)_{\text{loc}} \subset A(P(x, D), G).$$

При этом в [1] на примерах показано, что в этой теореме показатель $n - q(m-s)$ увеличить нельзя.

В настоящей заметке доказывается, что утверждение теоремы 1 остается справедливым при замене соболевских классов $W_p^s(G)_{\text{loc}}$ на классы $C_p^s(G)_{\text{loc}}$, $1 < p < \infty$, $s > 0$, введенные Р. Шарпли и Р. ДеВором в работе [3] и независимо Б. Боярским в работе [4]. Поскольку в случае натурального s всегда справедливо включение

$$W_p^s(G)_{\text{loc}} \subset C_p^s(G)_{\text{loc}},$$

это усиливает приведенную выше теорему 1 и распространяет ее на нецелые показатели гладкости s .

Основной результат работы впервые доложен на Международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, см. [5].

1. Определения, формулировка основного результата, вспомогательные предложения. Всюду ниже выражения вида $C(\alpha, \beta, \dots)$ обозначают действительную неотрицательную величину, зависящую только от α, β и т.д.

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, то $|x|$ – евклидова норма вектора x ,

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

Пусть $1 < p < \infty$, $s > 0$, f – функция, локально суммируемая в области G : $f \in L_1(G)_{\text{loc}}$. Возьмем замкнутый куб $Q(x, r)$ с центром в точке x и длиной ребра $r > 0$, лежащий в области G , стороны которого параллельны координатным осям, и обозначим

$$E_{[s]}(f, x, r) := \inf \left\{ r^{-n} \int_{Q(x, r)} |f(y) - g(y)| dy : g \in \mathcal{P}_{[s]} \right\},$$

где $[s]$ – целая часть s , $\mathcal{P}_{[s]}$ – множество всех алгебраических полиномов степени не выше $[s]$ (по совокупности переменных). Определим в области G максимальную функцию $M_s f$ равенством

$$M_s f(x) := \sup_{Q(x,r) \subset G} r^{-s} E_{[s]}(f, x, r).$$

По определению функция f принадлежит классу $C_p^s(G)_{\text{loc}}$, если функция $M_s f$ локально суммируема в степени p в области G : $M_s f \in L_p(G)_{\text{loc}}$.

Сразу же отметим, что последнее условие обеспечивает принадлежность f к $L_p(G)_{\text{loc}}$, что согласуется с определением из работы [3]. Для доказательства этого зафиксируем функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что носитель ψ содержится в шаре $|x| \leq 1$,

$$\int_{|x| \leq 1} \psi(x) dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{|x| \leq 1} g(x) \psi(x) dx = g(0)$$

для любого полинома $g \in \mathcal{P}_{[s]}$ (существование такой функции вытекает, например, из результатов работы [6], см. также [7]). Пусть G_1 – подобласть области G такая, что $G_1 \in G$. Рассмотрим соболевскую регуляризацию

$$f_r(x) := \int_{|y| \leq 1} f(x - ry) \psi(y) dy, \quad x \in G_1, \quad 0 < r < (\sqrt{n})^{-1} \text{dist}(\partial G_1, \partial G),$$

$$\text{dist}(\partial G_1, \partial G) := \inf \{ |x - y| : x \in \partial G_1, y \in \partial G \} > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f_{r/2}(x) - f_{r/4}(x)| &= \inf_{g \in \mathcal{P}_{[s]}} \left| \int_{|y| \leq 1} (f(x - 2^{-1}ry) - g(x - 2^{-1}ry)) \psi(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{|y| \leq 1} (f(x - 4^{-1}ry) - g(x - 4^{-1}ry)) \psi(y) dy \right| \\ &\leq C(n, \psi) E_{[s]}(f, x, r), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\int_{G_1} |f_{r/2}(x) - f_{r/4}(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq C(n, \psi) \left(\int_{G_1} (E_{[s]}(f, x, r))^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C(n, \psi) r^s \left(\int_{G_1} (r^{-s} E_{[s]}(f, x, r))^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C(n, \psi) r^s \left(\int_{G_1} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\ &= C(n, \psi, f, s, G_1) r^s. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим $r = 2^{-l}$, где l пробегает множество натуральных чисел

$$\geq [\log_2((\text{dist}(\partial G_1, \partial G))^{-1} \sqrt{n})] + 1.$$

Тогда из (3) вытекает, что последовательность $f_{2^{-l}}$ фундаментальна в $L_p(G_1)$ и, следовательно, сходится по норме этого пространства при $l \rightarrow \infty$ к некоторой функции

из $L_p(G_1)$, которая, как следует из свойств соболевских регуляризаций (см., например, [8, с. 65]), почти всюду в G_1 совпадает с функцией f . Поскольку в наших рассуждениях область G_1 может быть выбрана произвольным образом, это означает, что $f \in L_p(G)_{\text{loc}}$.

В случае натурального s можно определить в области G еще одну максимальную функцию:

$$M_s^* f(x) := \sup_{Q(x,r) \subset G} r^{-s} E_s^*(f, x, r),$$

где $E_s^*(f, x, r)$ обозначает осредненную по мере Лебега величину наименьшего отклонения в среднем функции f на кубе $Q(x, r)$ от пространства алгебраических полиномов степени $< s$. По теореме А. Кальдерона [9] (см. также [3]) $f \in W_p^s(G)_{\text{loc}}$ тогда и только тогда, когда $M_s^* f \in L_p(G)_{\text{loc}}$, откуда вытекает упомянутое выше включение $W_p^s(G)_{\text{loc}} \subset C_p^s(G)_{\text{loc}}$.

Пусть $\alpha > 0$, E — множество в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что (внешней) мерой Хаусдорфа множества E порядка α (обозначение $\text{mes}^\alpha E$) называется конечный или равный $+\infty$ предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $\inf(\sum_i r_i^\alpha)$, где инфимум берется по всем не более, чем счетным системам открытых шаров $\{B(x_i, r_i)\}_i$ с $r_i \leq \varepsilon$, образующих покрытие множества E . Отметим, что величина $\text{mes}^n E$ с точностью до постоянного множителя, зависящего только от размерности n , совпадает с внешней мерой Лебега множества E .

Сформулируем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, а $s > 0$ таково, что выполнено двойное неравенство $0 \leq n - q(m - s) < n$, и пусть E — замкнутое множество в G , имеющее конечную хаусдорфову меру порядка $n - q(m - s)$: $\text{mes}^{n-q(m-s)} E < \infty$. Тогда справедливо включение

$$A(P(x, D), G \setminus E) \cap C_p^s(G)_{\text{loc}} \subset A(P(x, D), G).$$

Другими словами, заключение теоремы 2 можно сформулировать так: всякое замкнутое в G множество конечной хаусдорфовой меры порядка $n - q(m - s)$ устранимо для слабых решений уравнения $P(x, D)u = 0$ в классе $C_p^s(G)_{\text{loc}}$. Из результатов работы [10] (теорема 4) вытекает, что если $P(x, D) = P(D) = \sum_{|k|=m} a_k D^k$ — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то любое замкнутое множество E ($E \neq G$) хаусдорфовой размерности $> n - q(m - s)$ неустраимо в классе $C_p^s(G)_{\text{loc}}$, т.е. включение $A(P(D), G \setminus E) \cap C_p^s(G)_{\text{loc}} \subset A(P(D), G)$ не имеет места. В этом смысле результат теоремы 2 точен. Отметим также, что для такого оператора $P(D)$ в работе [11] показано, что всякий компакт положительной меры Лебега, лежащий в G , неустраим для решений уравнений $P(D)u = 0$ в классе $W_\infty^m(G)_{\text{loc}}$ всех функций $f \in C^{m-1}(G)$, частные производные порядка $m - 1$ которых локально удовлетворяют в G условию Липшица—Гёльдера с показателем 1. Поскольку при любом $p > 1$ справедливо включение $W_\infty^m(G)_{\text{loc}} \subset W_p^m(G)_{\text{loc}}$, отсюда следует, что при всех $p \in (1, \infty)$ и $s = m$ теоремы 1 и 2 перестают быть верными.

В доказательстве теоремы 2 будет использовано одно вспомогательное утверждение. Для его формулировки напомним, что двоичным кубом в $\mathbb{R}^n$ называется всякий куб вида $[s_1 2^{-l}, (s_1 + 1) 2^{-l}] \times \cdots \times [s_n 2^{-l}, (s_n + 1) 2^{-l}]$, где $s_1, \dots, s_n$ — целые числа, l натуральное.

ЛЕММА 1 (Р. Харви и Дж. Полкинг [1], см. также [2, с. 20–22]). Пусть $\{Q(x_j, r_j)\}_{j=1}^d$, $d \in \mathbb{N}$, – конечное множество двоичных кубов, внутренности которых попарно не пересекаются. Тогда существует такое множество функций $\{\phi_j\}_{j=1}^d$, бесконечное число раз дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ и принимающих только вещественные значения в интервале $[0, 1]$, что при всех $j = 1, \dots, d$ носитель ϕ_j содержится в кубе $Q(x_j, \frac{3}{2}r_j)$, для любого мультииндекса $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка $|D^k \phi_j| \leq C(n, |k|)r_j^{-|k|}$, функция $\sum_{j=1}^d \phi_j(x)$ принимает значения в интервале $[0, 1]$, причем на множестве $\bigcup_{j=1}^d Q(x_j, r_j)$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^d \phi_j(x) = 1.$$

2. Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть $f \in A(P(x, D), G \setminus E) \cap C_p^s(G)_{\text{loc}}$. Зафиксируем произвольным образом функцию $\phi \in C_0^\infty(G)$ и действительное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и определим множество E^ϕ как пересечение E с носителем функции ϕ . Поскольку E^ϕ – компакт, существует такое покрытие этого множества конечным числом открытых шаров, что радиус каждого шара $< \varepsilon$, и величина, равная сумме этих радиусов, возведенных в степень $n - q(m - s)$, не превосходит $\text{mes}^{n-q(m-s)} E + 1$; а так как каждый шар содержится в объединении не более чем 5^n двоичных кубов, длина ребра которых не превосходит радиуса этого шара, можно считать, что E^ϕ содержится в объединении конечного множества двоичных кубов $\{Q(x_j, r_j)\}_{j=1}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с попарно не пересекающимися внутренностями и

$$\sum_{j=1}^d r_j^{n-q(m-s)} \leq C(n, m, p, s, E);$$

при этом, очевидно, можно предполагать, что при всех $j = 1, \dots, d$ куб $Q(x_j, 3r_j)$ содержится в ε -окрестности E_ε^ϕ компакта E^ϕ . Пусть $\{\phi_j\}_{j=1}^d$ – система функций из леммы 1, образующая разбиение единицы для системы кубов $\{Q(x_j, r_j)\}_{j=1}^d$. Тогда, пользуясь тем, что $f \in A(P(x, D), G \setminus E)$ и носитель функции $(1 - \sum_{j=1}^d \phi_j)$ содержится в $G \setminus E$, имеем

$$\begin{aligned} |(P(x, D)f, \phi)| &= \left| \sum_{j=1}^d (P(x, D)f, \phi \phi_j) + \left(P(x, D)f, 1 - \sum_{j=1}^d \phi \phi_j \right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^d (P(x, D)f, \phi \phi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^d \left| \sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} \int_G f D^k (a_k \phi \phi_j) dx \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

Зафиксируем номер j и мультииндекс k , $|k| > s$, и выберем в кубе $Q(x_j, r_j)$ точку y_j так, чтобы

$$(M_s f(y_j))^p \leq 2r_j^{-n} \int_{Q(x_j, r_j)} (M_s f(x))^p dx.$$

Тогда, пользуясь оценкой производной функции ϕ_j из леммы 1, получаем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_G f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| &= \left| \int_{Q(x_j, \frac{3}{2}r_j)} f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| \\
 &= \inf_{g \in \mathcal{P}_{[s]}} \left| \int_{Q(x_j, \frac{3}{2}r_j)} (f - g) D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|) r_j^{-|k|} \inf_{g \in \mathcal{P}_{[s]}} \left(\int_{Q(x_j, \frac{3}{2}r_j)} |f - g| dx \right) \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|) r_j^{-|k|} \left| \inf_{g \in \mathcal{P}_{[s]}} \left(\int_{Q(y_j, 3r_j)} |f - g| dx \right) \right| \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|) r_j^{-|k|} (3r_j)^n E(f, y_j, 3r_j) \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|) r_j^{-|k|} (3r_j)^{n+s} M_s f(y_j) \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|, s) r_j^{n+s-|k|} \left(r_j^{-n} \int_{Q(x_j, r_j)} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 &= C(\phi, a_k, n, |k|, s) r_j^{n/q+s-|k|} \left(\int_{Q(x_j, r_j)} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p},
 \end{aligned}$$

откуда, пользуясь неравенством Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^d \left| \int_G f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| &\leq \sum_{j=1}^d C(\phi, a_k, n, |k|, s) r_j^{n/q+s-|k|} \left(\int_{Q(x_j, r_j)} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|, s) \left(\sum_{j=1}^d r_j^{q(n/q+s-|k|)} \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^d \int_{Q(x_j, r_j)} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|, s) \left(\sum_{j=1}^d r_j^{n-q(|k|-s)} \right)^{1/q} \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq C(\phi, a_k, n, |k|, s) \left(\sum_{j=1}^d r_j^{n-q(m-s)} \right)^{1/q} \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq C(\phi, P(x, D), n, m, p, s, E) \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_s f(x))^p dx \right)^{1/p}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Если s натуральное и мультииндекс k взят так, что $|k| = s < m$, то, используя включение $C_p^s(G)_{\text{loc}} \subset C_p^{s-1/2}(G)_{\text{loc}}$ (см. [3]) и производя выкладки, аналогичные приведенным

выше, с заменой s на $s - 1/2$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^d \left| \int_G f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| \\
 & \leq C(\phi, a_k, n, s) \left(\sum_{j=1}^d r_j^{n-q/2} \right)^{1/q} \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_{s-1/2} f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq C(\phi, a_k, n, s) \left(\sum_{j=1}^d r_j^{n-q(m-s)} \right)^{1/q} \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_{s-1/2} f(x))^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq C(\phi, P(x, D), n, m, p, s, E) \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_{s-1/2} f(x))^p dx \right)^{1/p}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Пусть теперь мультииндекс k удовлетворяет неравенству $|k| < s$. В этом случае функция f имеет обобщенные производные по Соболеву всех порядков $\leq |k|$, локально интегрируемые в степени p (см. [3]). Поэтому, используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^d \left| \int_G f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| &= \sum_{j=1}^d \left| \int_G (D^k f) a_k \phi \phi_j dx \right| \leq \sum_{j=1}^d \int_G |D^k f| \cdot |a_k \phi| \cdot \phi_j dx \\
 &\leq C(P(x, D), \phi) \sum_{j=1}^d \int_G |D^k f| \phi_j dx \\
 &\leq C(P(x, D), \phi) \int_G |D^k f| \left(\sum_{j=1}^d \phi_j \right) dx \\
 &\leq C(P(x, D), \phi) \int_{E_\varepsilon^\phi} |D^k f| dx. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Объединяя (4)–(7), получаем оценку

$$\begin{aligned}
 |(P(x, D)f, \phi)| &= \left| \sum_{j=1}^d (P(x, D)f, \phi \phi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^d \left| \sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} \int_G f D^k(a_k \phi \phi_j) dx \right| \\
 &\leq C(\phi, P(x, D), n, m, p, s, E) \left(\left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_s f)^p dx \right)^{1/p} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_{s-1/2} f)^p dx \right)^{1/p} + \sum_{|k| < s} \int_{E_\varepsilon^\phi} |D^k f| dx \right),
 \end{aligned}$$

где положено $M_s f \equiv 0$ в G при $s \leq 0$. Поскольку $\text{mes}^n E_\varepsilon^\phi = 0$, то $\text{mes}^n E_\varepsilon^\phi \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому из абсолютной непрерывности интеграла Лебега вытекает, что

$$\left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_s f)^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{E_\varepsilon^\phi} (M_{s-1/2} f)^p dx \right)^{1/p} + \sum_{|k| < s} \int_{E_\varepsilon^\phi} |D^k f| dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $(P(x, D)f, \phi) = 0$. Поскольку в наших рассуждениях функция ϕ выбиралась произвольным образом, это означает, что $f \in A(P(x, D), G)$.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что в приведенном доказательстве фактически использовалось лишь то, что пересечение множества E с любым компактным подмножеством области G имеет конечную меру Хаусдорфа порядка $n - q(m - s)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Harvey R., Polking J. C. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations // *Acta Math.* 1970. V. 125. № 1/2. P. 39–56.
- [2] Тарханов Н. Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.
- [3] Sharpley R., DeVore R. Maximal functions measuring smoothness // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 47. № 293. P. 1–113.
- [4] Bojarski B. Sharp maximal operator of fractional order and Sobolev imbedding inequalities // *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 1985. V. 33. № 1–2. P. 7–16.
- [5] Pokrovskii A. V. Removable singularities for solutions to elliptic equations in Sharpley–DeVore classes // *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов второй Международной конференции, посвященной 80-летию члена-корр. РАН профессора Л. Д. Кудрявцева*. М.: Физматлит, 2003. С. 87.
- [6] Zalcman L. Mean values and differential equations // *Israel Math. J.* 1973. V. 14. P. 339–352.
- [7] Покровский А. В. Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными // *Матем. заметки*. 1998. Т. 64. № 2. С. 260–272.
- [8] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [9] Calderón A. P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // *Studia Math.* 1972. V. 44. P. 167–186.
- [10] Покровский А. В. Об устранимых особенностях решений однородных эллиптических уравнений в классах Никольского–Бесова // *Докл. РАН*. 2001. Т. 380. № 2. С. 168–171.
- [11] Verdera J. C^m -approximations by solutions of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // *Duke Math. J.* 1987. V. 55. № 1. P. 157–187.

Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступило
20.06.2003
Исправленный вариант
13.09.2004