Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, О равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 41–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 04:23:32

УДК 517.538.5 и 517.956.2

О РАВНОМЕРНОЙ ПРИБЛИЖАЕМОСТИ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОМПАКТАХ В $\mathbb{R}^2$

А. Б. Зайцев

В данной статье изучаются необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости функций на плоских компактах полиномиальными решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами. Достаточные условия приближаемости носят редуктивный характер, т.е. из возможности аппроксимации на определенных (более простых) частях компакта выводится приближаемость на всем компакте.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть

$$L = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1)$$

– однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^2$ с постоянными комплексными коэффициентами.

Эллиптичность оператора (1) означает, что корни λ_1 и λ_2 соответствующего характеристического уравнения

$$c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0 \quad (2)$$

невещественны. Если, кроме того, λ_1 и λ_2 имеют мнимые части разных знаков, то оператор (1) называется *сильно-эллиптическим*.

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $L(E)$ совокупность всех функций $u(\cdot)$, каждая из которых определена и удовлетворяет уравнению

$$Lu = 0 \quad (3)$$

на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E .

Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$ с внутренностью X° , $C(X)$ – совокупность всех непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой $\|f\|_X = \sup_{z \in X} |f(z)|$ и пусть $A_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$. Обозначим через P_L совокупность всех полиномиальных решений уравнения (3). Определим пространства $P_L(X)$ и $C_L(X)$ как замыкания в $C(X)$ подпространств $\{p|_X : p \in P_L\}$ и $\{f|_X : f \in L(X)\}$ соответственно. Ясно, что $P_L(X) \subseteq C_L(X) \subseteq A_L(X)$ для любого компакта X .

Нас интересует следующая задача аппроксимации для “классов функций”.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00618, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96008.

ЗАДАЧА 1. Найти необходимые и достаточные условия на компакт X , при которых

$$A_L(X) = P_L(X).$$

Для компакта X обозначим через $\hat{X}$ объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Компакт X называется *компактом Каратеодори*, если $\partial X = \partial \hat{X}$ (напомним, что ∂E означает границу множества E). Ограниченная область D называется *областью Каратеодори*, если $\partial D = \partial \bar{D}$.

В [1, теорема 2] было доказано, что если X – компакт Каратеодори такой, что для любой ограниченной связной компоненты G множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ выполняется условие $P_L(\partial G) = C(\partial G)$, то $P_L(X) = A_L(X)$. В частности, если L – сильно-эллиптический оператор, то $P_L(X) = A_L(X)$ [1, следствие 2].

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$ такой, что

- 1) $A_L(X) = C_L(X)$;
- 2) для любой связной компоненты G множества $\hat{X}^\circ$, содержащей точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, имеет место равенство $A_L(\bar{G} \cap X) = P_L(\bar{G} \cap X)$.

Тогда $A_L(X) = P_L(X)$.

Приведем пример использования теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Пусть X – компакт Каратеодори, причем $\hat{X} \setminus X = \bigcup_{j=1}^J G_j$, где J – некоторое натуральное число или ∞ , а ограниченные связные компоненты G_j множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ являются жордановыми областями со спрямляемыми границами, содержащими пары аналитически независимых аналитических дуг. Возьмем набор компактов $\{K_j\}_{j=1}^J$ таких, что $K_j \subset G_j$ и $A_{\bar{\partial}^2}(K_j) = P_{\bar{\partial}^2}(K_j)$. Обозначим $X_K = X \cup (\bigcup_{j=1}^J K_j)$. Тогда $A_{\bar{\partial}^2}(X_K) = P_{\bar{\partial}^2}(X_K)$.

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$ такой, что $P_L(X) = A_L(X)$. Тогда все связные компоненты множества X° являются односвязными областями.

Отметим, что утверждение предложения 1 при $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ вытекает (после линейной невырожденной замены переменных в $\mathbb{R}^2$) из принципа максимума для гармонических функций.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Скажем, что для оператора L в области D выполняется *ослабленный принцип максимума*, если существует такая зависящая только от L и D константа $\rho > 0$, что $\max_{\bar{D}} |u| \leq \rho \max_{\partial D} |u|$ для любой функции $u \in C(\bar{D}) \cap L(D)$.

Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть D – область Каратеодори в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ , содержащей некоторую открытую аналитическую дугу γ , причем каждая точка γ является достижимой граничной точкой области D . Пусть оператор L не является сильно-эллиптическим и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда

- 1) для L в D не выполняется ослабленный принцип максимума;
- 2) если $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$, то существует точка $c \in D$ такая, что $P_L(\Gamma \cup \{c\}) = C(\Gamma \cup \{c\})$.

Всюду в дальнейшем z означает как комплексное число $z = x_1 + ix_2$, так и точку (x_1, x_2) плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пусть L – эллиптический оператор вида (1). Найдется линейное невырожденное преобразование T_L плоскости $\mathbb{R}^2$, приводящее оператор L к виду

$$\tilde{L} = \begin{cases} \bar{\partial}\partial_\beta & \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ \bar{\partial}^2 & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, а

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta i \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Отметим, что оператор L можно привести к виду (4) с $\beta \leq -1$, если и только если он является сильно-эллиптическим.

Нетрудно показать, что $u \in A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $u \circ T_L^{-1} \in A_{\tilde{L}}(T_L(X))$. В частности, $p \in P_L$ тогда и только тогда, когда $\tilde{p} = p \circ T_L^{-1} \in P_{\tilde{L}}$. Таким образом, $u \in P_L(X)$ тогда и только тогда, когда $u \circ T_L^{-1} \in P_{\tilde{L}}(T_L(X))$. Отсюда следует, что $P_L(X) = A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $P_{\tilde{L}}(T_L(X)) = A_{\tilde{L}}(T_L(X))$. Аналогично, $C_L(X) = A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $C_{\tilde{L}}(T_L(X)) = A_{\tilde{L}}(T_L(X))$.

При $\beta \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ положим $z_\beta = x_1 + \frac{1}{\beta}ix_2$. При этом

$$\partial_\beta z_\beta = 0.$$

Нам также потребуется $\mathbb{R}$ -линейное преобразование $T_\beta: z \rightarrow z_\beta$ плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пусть L – оператор вида (4) с условием $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда всякое решение $u(x_1, x_2)$ уравнения $Lu = 0$ в односвязной области D имеет вид

$$u(x_1, x_2) = f_1(z) + f_2(z_\beta),$$

где $\bar{\partial}f_1(z) = 0$, $\partial_\beta f_2(z_\beta) = 0$ в D (см. [2, предложение 2.1]), причем $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ единственны с точностью до аддитивной константы.

Всюду в дальнейшем $\Phi(\cdot)$ означает специальное фундаментальное решение для оператора L (см. [2, § 2]). Через $P(X)$ обозначим алгебру функций, приближаемых равномерно на X полиномами комплексной переменной, а через $R(X)$ – алгебру функций, равномерно на X приближаемых рациональными функциями с полюсами вне X .

Заметим, что линейное невырожденное преобразование плоскости сохраняет топологические свойства компактов, а также свойство аналитичности кривых. Поэтому, ввиду выше сказанного, не ограничивая общности, будем доказывать наши результаты для операторов L вида (4).

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как любая функция $u \in L(X)$ может быть равномерно на X приближена линейными комбинациями функций вида $\Phi(z - a)$, $a \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ (см. [2, с. 132]), для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что $\Phi(z - a) \in P_L(X)$ для любого $a \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Отсюда следует, что теорему 1 достаточно доказать в случае, когда компакт X имеет лишь одну ограниченную компоненту дополнения, содержащуюся целиком внутри одной связной

компоненты G множества $\widehat{X}^\circ$. Пусть ν – некоторая борелевская комплекснозначная мера, $\mathcal{F}$ – некоторое подпространство пространства функций $C(X)$. Будем писать $\nu \perp \mathcal{F}$, если $\int f d\nu = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}$. В силу теоремы Рисса–Маркова [3, теорема IV.17] достаточно доказать, что любая борелевская комплекснозначная мера μ на X с условием $\mu \perp P_L(X)$ удовлетворяет условию

$$\int \Phi(\zeta - z) d\mu(\zeta) = 0$$

при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus X$.

Итак, пусть мера $\mu \perp P_L(X)$. Тогда легко показать, что

$$\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \quad (5)$$

$$\int \frac{d\mu(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} = 0 \quad (6)$$

при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$.

Пусть $z_0 \in G$. Имеет место разложение $\mu = \mu_a + \mu_s$, где мера μ_a абсолютно непрерывна относительно некоторой положительной представляющей меры μ_0 для точки z_0 в алгебре $P(\widehat{X})$, а мера μ_s сингулярна относительно всех положительных представляющих мер для точки z_0 в алгебре $P(\widehat{X})$ (см. [4, гл. II, следствие 7.5]). Из (5) следует, что

$$\int \frac{d\mu_a(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \quad \int \frac{d\mu_s(\zeta)}{\zeta - z} = 0$$

при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$ (см. [4, гл. II, теорема 7.6]).

Для произвольной меры ν обозначим через $\text{Supp}(\nu)$ носитель ν , а $\widehat{\nu}$ – ее преобразование Коши, т.е.

$$\widehat{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Обозначим через M множество точек ∂G , достижимых изнутри области G . Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Имеем*

- а) $|\mu_a|(\partial G \setminus M) = 0$, $\text{Supp}(\mu_a) \subseteq (X \cap \overline{G})$ и $\widehat{\mu}_a(z) = 0$ при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$;
- б) $|\mu_s|(M) = 0$, $\text{Supp}(\mu_s) \subseteq (X \setminus G)$ и $\widehat{\mu}_s(z) = 0$ при $z \in (\mathbb{R}^2 \setminus X) \cup G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Так как $\text{Supp}(\mu_0) \subseteq \overline{G}$ ([4, гл. VI, теорема 3.3]), то $\text{Supp}(\mu_a) \subseteq X \cap \overline{G}$. Пусть существует точка $z_1 \in X \setminus \overline{G}$, в которой $\widehat{\mu}_a(z_1) \neq 0$. Тогда для любой функции $h(z) \in P(\widehat{X})$ имеем

$$\int \frac{h(\zeta) d\mu_a(\zeta)}{\widehat{\mu}_a(z_1)(\zeta - z_1)} = h(z_1).$$

Таким образом, мера $d\mu_a(\zeta)/(\widehat{\mu}_a(z_1)(\zeta - z_1))$ является представляющей мерой для точки z_1 в алгебре $P(\widehat{X})$. Следовательно, существует положительная представляющая мера для точки z_1 в алгебре $P(\widehat{X})$, абсолютно непрерывная относительно μ_a , а значит, и относительно μ_0 ([4, гл. II, теорема 2.2]), что невозможно, так как z_0 и z_1 принадлежат

разным долям алгебры $P(\widehat{X})$ ([4, гл. VI, теорема 2.2, теорема 4.4]). И так, $\widehat{\mu}_a(z) = 0$ при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$.

Пусть K – некоторое замкнутое подмножество множества $\partial G \setminus M$, σ – мера с носителем на ∂G , $\sigma \perp R(\overline{G})$. Тогда $|\sigma|(K) = 0$ ([5, лемма 9]). Поэтому K – интерполяционное множество пика для алгебры функций, непрерывных на ∂G и равномерно на ∂G приближаемых функциями класса $R(\overline{G})$ ([4, гл. II, теорема 12.7]). Следовательно, K – интерполяционное множество пика для алгебры $R(\overline{G})$. Так как мера $\mu_a \perp R(\overline{G})$, то $|\mu_a|(K) = 0$. Таким образом, $|\mu_a|(\partial G \setminus M) = 0$, и а) доказано.

Докажем б). Пусть существует точка $z_2 \in G$, в которой $\widehat{\mu}_s(z_2) \neq 0$. В таком случае множество точек $z \in G$, при которых $\widehat{\mu}_s(z) \neq 0$, имеет положительную плоскую меру. Так как интеграл $\int \frac{|d\mu_s(\zeta)|}{|\zeta - z|}$ существует для почти всех $z \in G$ относительно плоской меры Лебега, то можно предположить, что $\int \frac{|d\mu_s(\zeta)|}{|\zeta - z_2|}$ существует. Тогда

$$\int \frac{h(\zeta)d\mu_s(\zeta)}{\widehat{\mu}_s(z_2)(\zeta - z_2)} = h(z_2) \quad \text{при всех } h(z) \in P(\widehat{X}).$$

Таким образом, мера $d\mu_s(\zeta)/(\widehat{\mu}_s(z_2)(\zeta - z_2))$ является представляющей мерой для точки z_2 в алгебре $P(\widehat{X})$. Следовательно, существует положительная представляющая мера для точки z_2 в алгебре $P(\widehat{X})$, абсолютно непрерывная относительно меры μ_s . Но мера μ_s сингулярна относительно всех положительных представляющих мер для точки z_0 в алгебре $P(\widehat{X})$, а точки z_0 и z_2 принадлежат одной доле данной алгебры. Поэтому мера μ_s сингулярна относительно всех положительных представляющих мер для точки z_2 в алгебре $P(\widehat{X})$ ([4, гл. VI(2.2)]). Из полученного противоречия следует, что $\widehat{\mu}_s(z) = 0$ при $z \in G$. Отсюда следует, что $|\mu_s|(G) = 0$ ([4, гл. II, теорема 8.2]). Следовательно [1, лемма 1], $|\mu_s|(M) = 0$. Лемма 1 доказана.

Заменой переменных можно показать, что из условия (6) и леммы 1 следует, что $\mu = \mu_{\beta a} + \mu_{\beta s}$, где

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu_{\beta a}(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} &= 0 \quad \text{при } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}, \\ \int \frac{d\mu_{\beta s}(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} &= 0 \quad \text{при } z \in (\mathbb{R}^2 \setminus X) \cup G, \end{aligned}$$

$$\text{Supp}(\mu_{\beta a}) \subseteq (X \cap \overline{G}), \quad \text{Supp}(\mu_{\beta s}) \subseteq (X \setminus G), \quad |\mu_{\beta a}|(\partial G \setminus M) = 0, \quad |\mu_{\beta s}|(M) = 0.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что меры $\mu_a - \mu_{\beta a}$ и $\mu_{\beta s} - \mu_s$ сингулярны друг относительно друга. Так как $\mu_{\beta s} - \mu_s = \mu_a - \mu_{\beta a}$, то $\mu_{\beta a} = \mu_a$, $\mu_{\beta s} = \mu_s$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu_a(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} &= 0 \quad \text{при } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}, \\ \int \frac{d\mu_s(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} &= 0 \quad \text{при } z \in (\mathbb{R}^2 \setminus X) \cup G. \end{aligned}$$

Так как $\text{Supp}(\mu_a) \subseteq X \cap \overline{G}$, из условия теоремы 1 получаем, что $\mu_a \perp A_L(X \cap \overline{G})$; следовательно, $\mu_a \perp A_L(X)$.

Докажем, что $\int \Phi(\zeta - z) d\mu_s(\zeta) = 0$ при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Если $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$, то данное равенство очевидно. Так как

$$\int \frac{d\mu_s(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \quad \int \frac{d\mu_s(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} = 0 \quad \text{при } z \in G,$$

нетрудно показать, что $\int \Phi(\zeta - z) d\mu_s(\zeta) = q$ при всех $z \in G$, где q – некоторая константа. Докажем, что $q = 0$.

Пусть $\beta > 1$. Тогда функция $\Phi(z)$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и непрерывна всюду вне точки 0. Так как каждая точка множества ∂G является точкой пика для алгебры $R(X \setminus G)$ ([4, гл. VI(4.4)]), то мера μ_s не имеет атомов на ∂G ([4, гл. II, теорема 12.7]). Поэтому потенциал $\int \Phi(\zeta - z) d\mu_s(\zeta)$ непрерывен во всех точках ∂G . Следовательно, $q = 0$.

Пусть теперь $\beta \leq -1$. Тогда $\Phi(z) = \kappa \ln(z z_\beta)$, где κ – некоторая константа (см. [2, предложение 2.2(1)]).

Пусть $U^\nu(z)$ означает стандартный логарифмический потенциал меры ν (см. [6, гл. 1, § 3]), т.е.

$$U^\nu(z) = \int \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\nu(\zeta).$$

Пусть E – замкнутое плоское множество, целиком лежащее в некотором круге диаметра 1. Напомним, что *винеровой емкостью* $C_2(E)$ множества E (см. [6, гл. 2, § 4]) называется $\sup_\sigma \|\sigma\|$, где супремум берется по всем положительным мерам σ с условиями: $\text{Supp}(\sigma) \subseteq E$ и $U^\sigma(z) \leq 1$ для всех $z \in \mathbb{R}^2$. Для произвольного борелевского множества E_0 , целиком лежащего в некотором круге диаметра 1, положим $C_2(E_0) = \sup_E C_2(E)$, где супремум берется по всем замкнутым подмножествам множества E_0 .

Для завершения доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $Y = \widehat{Y}$ – компакт со связным дополнением, целиком лежащий в некотором круге диаметра 1, Ω – связная компонента Y° . Пусть ν – мера на $Y \setminus \Omega$ такая, что для любой точки $\xi \in \partial\Omega$ существуют $\lim_{z \rightarrow \xi} U^\nu(z)$ и $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^\nu(z)$. Тогда найдется множество $\Sigma \subset \partial\Omega$ такое, что $C_2(\partial\Omega \setminus \Sigma) = 0$ и для любой точки $\xi \in \Sigma$ верно равенство $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega}} U^\nu(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^\nu(z)$.

Считая лемму 2 доказанной, завершим доказательство теоремы 1. При всех $z \neq 0$ имеет место равенство

$$\frac{\Phi(z)}{\kappa} - 2 \ln |z| = i \operatorname{Im} \frac{\Phi(z)}{\kappa} + \ln \frac{|z_\beta|}{|z|}. \quad (7)$$

Так как правая часть равенства (7) равномерно ограничена и непрерывна всюду вне нуля, то потенциал

$$\int \left(i \operatorname{Im} \frac{\Phi(\zeta - z)}{\kappa} + \ln \frac{|T_\beta(\zeta - z)|}{|\zeta - z|} \right) d\mu_s(\zeta)$$

непрерывен в каждой точке $z \in \partial G$. Так как $\int \Phi(\zeta - z) d\mu_s(\zeta) = 0$ при $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$ и

$\int \Phi(\zeta - z) d\mu_s(\zeta) = q$ при $z \in G$, для любой точки $\xi \in \partial G$ существуют $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in G}} U^{\mu_s}(z)$ и $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{X}}} U^{\mu_s}(z)$. Из леммы 2 (при $Y = X$, $\Omega = G$, $\nu = \mu_s$) следует, что существует точка $\xi \in \partial G$ такая, что $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in G}} U^{\mu_s}(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{X}}} U^{\mu_s}(z)$. Отсюда и из равенства (7) следует, что $q = 0$, а значит, $\mu_s \perp A_L(X)$. Случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ рассмотрен.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ теорема 1 доказывается аналогично, с той лишь разницей, что условие (6) заменяется на условие

$$\int \frac{\bar{\zeta} d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Не ограничивая общности, будем доказывать лемму 2 для вещественнозначной меры ν .

Имеет место разложение $\nu = \nu^+ - \nu^-$, где ν^+ и ν^- – положительные меры. Рассмотрим потенциал $U^{\nu^+}(z)$. Пусть $\Sigma \subseteq \partial\Omega$ – множество точек, в которых существуют $U^{\nu^+}(z)$ и $U^{\nu^-}(z)$. Тогда $C_2(\partial\Omega \setminus \Sigma) = 0$ (см. [6, гл. III, § 1, п. 1]) и для всех $\xi \in \Sigma$ имеют место неравенства

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^+}(z) \geq U^{\nu^+}(\xi) \quad \text{и} \quad \liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^-}(z) \geq U^{\nu^-}(\xi)$$

(см. [6, гл. I, § 3, п. 7]). Так как $P_\Delta(\partial Y) = C(\partial Y)$ и $Y = \hat{Y}$, каждая точка множества ∂Y – регулярная точка области $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ ([6, замечание к теореме 5.18]). Следовательно,

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^+}(z) = U^{\nu^+}(\xi) \quad \text{и} \quad \liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^-}(z) = U^{\nu^-}(\xi)$$

для всех $\xi \in \Sigma$ ([6, теорема 5.10]). Но

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^+}(z) = \liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu^-}(z) + \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu}(z),$$

поэтому $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu}(z) = U^{\nu}(\xi)$.

Доказательство равенства $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega}} U^{\nu}(z) = U^{\nu}(\xi)$ при $\xi \in \Sigma$ сводится к предыдущему случаю с помощью конформного отображения области Ω на неограниченную односвязную область, осуществляемого функцией $w = (z - c)^{-1}$ при $c \in \Omega$. Таким образом, $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega}} U^{\nu}(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus Y}} U^{\nu}(z)$ для всех $\xi \in \Sigma$. Лемма 2 доказана.

Докажем справедливость утверждения примера 1. Проверим условие 1) теоремы 1, т.е. что $A_{\bar{\partial}^2}(X_K) = C_{\bar{\partial}^2}(X_K)$. Для этого, как следует из доказательства [2, теорема 3.1], достаточно установить, что $A_{\bar{\partial}^2}(X_K) \cap \bar{\partial}^2(X_K \setminus \partial K_j) \subseteq C_{\bar{\partial}^2}(X_K)$ для любого $j = 1, \dots, J$. Так как $P_{\bar{\partial}^2}(K_j) = A_{\bar{\partial}^2}(K_j)$, это доказывается аналогично доказательству [2, лемма 3.2]. Таким образом, $A_{\bar{\partial}^2}(X_K) = C_{\bar{\partial}^2}(X_K)$.

Проверим условие 2) теоремы 1, т.е. что $A_{\bar{\partial}^2}(K_j \cup \partial G_j) = P_{\bar{\partial}^2}(K_j \cup \partial G_j)$ при всех $j \in \{1 \dots J\}$. Так как ∂G_j содержит две аналитически независимые аналитические дуги (см. [7, определение 1]), то (см. доказательство [7, предложение 2]) область G_j не является локально неванлинновской (см. [8, определение 2.1]). Поэтому из [8, теорема 3.1(1)] вытекает, что $A_{\bar{\partial}^2}(K_j \cup \partial G_j) = P_{\bar{\partial}^2}(K_j \cup \partial G_j)$ для всех j .

Применяя теорему 1, получаем, что $A_{\bar{\partial}^2}(X_K) = P_{\bar{\partial}^2}(X_K)$.

3. Доказательство предложений 1 и 2. Докажем сначала предложение 1. Пусть хотя бы одна связная компонента (обозначим ее через G) множества X° является односвязной областью. Тогда существует односвязная область D с гладкой границей, целиком лежащей в G , содержащая точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Так как $\partial G \subseteq \partial X$, то D содержит точки множества ∂X , а значит, и множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Пусть $\Omega = D \setminus X$, Ω_1 – односвязная область такая, что $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1 \subset D$, а φ – такая вещественная функция, что $\varphi \in C_0^\infty(D)$, $\varphi \equiv 1$ в Ω_1 и $0 \leq \varphi \leq 1$. Пусть $p \in P_L$. Тогда согласно [9, лемма 1] при всех $t \in \Omega$ имеет место равенство $p(t) = \int \Phi(z - t)L(p(z)\varphi(z)) dx_1 dx_2$. Заметим, что

$$L(p\varphi) = \sum_{j,k=1}^2 a_{j,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + pL\varphi,$$

где $a_{j,k}$ – некоторые постоянные коэффициенты. Далее,

$$\int \Phi(z - t) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x_j} \frac{\partial p(z)}{\partial x_k} dx_1 dx_2 = - \int \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Phi(z - t) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x_j} \right) p(z) dx_1 dx_2$$

и, окончательно,

$$p(t) = \int p(z) \left(L(\varphi(z))\Phi(z - t) - \sum_{j,k=1}^2 a_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Phi(z - t) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x_j} \right) \right) dx_1 dx_2$$

при всех $t \in \Omega$.

Так как $\Phi(z - t)$ и $\partial(\Phi(z - t)(\partial\varphi(z)/\partial x_j))/\partial x_k$ равномерно ограничены при $t \in \Omega$, $z \in D \setminus \Omega_1$, существует константа $\rho > 0$, не зависящая от p , такая, что $\max_{t \in \bar{\Omega}} |p(t)| \leq \rho \max_{D \setminus \Omega_1} |p(z)|$.

Так как $D \setminus \Omega_1 \subset X$ и $\partial\Omega \subseteq X$, для каждой функции u класса $P_L(X)$ верно неравенство $\max_{t \in \partial\Omega} |u(t)| \leq \rho \max_{D \setminus \Omega_1} |u(z)|$.

Пусть $a \in \Omega$, $f(z) = (z - a)^{-1}$. Очевидно, что $f(z) \in A_L(X)$. Пусть $l > 0$ – расстояние от Ω до $D \setminus \Omega_1$. Тогда $\max_{D \setminus \Omega_1} |f(z)| \leq l^{-1}$. Выберем $a \in \Omega$ так, чтобы расстояние от a до $\partial\Omega$ было меньше, чем $\frac{1}{2}l\rho^{-1}$. Тогда $\max_{\partial\Omega} |f(t)| \geq 2\rho l^{-1}$. Таким образом, $\max_{\partial\Omega} |f(t)| \geq 2\rho \max_{D \setminus \Omega_1} |f(z)|$. Следовательно, $f(z) \notin P_L(X)$. Поэтому $P_L(X) \neq A_L(X)$. Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Докажем а). Для этого нам достаточно доказать, что существует точка $c \in D$ такая, что функцию, равную нулю на Γ и 1 в точке c , можно равномерно на $\Gamma \cup \{c\}$ приблизить полиномиальными решениями уравнения $Lu = 0$. Последнее эквивалентно тому, что всякая борелевская комплекснозначная мера μ с условиями $\text{Supp}(\mu) \subseteq \Gamma \cup \{c\}$, $\mu \perp P_L(\Gamma \cup \{c\})$, удовлетворяет условию $\mu(\{c\}) = 0$.

Пусть для точки $c \in D$ существует мера μ с условиями $\text{Supp}(\mu) \subseteq \Gamma \cup \{c\}$, $\mu \perp P_L(\Gamma \cup \{c\})$ и $\mu(\{c\}) = 1$. Тогда μ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma} (z - c)^n d\mu(z) = 0, \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma} (T_{\beta}(z - c))^n d\mu(z) = 0, \quad (9)$$

где $n = 1, 2, \dots$,

$$\int_{\Gamma} d\mu(z) = -1. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что $\mu|_{\Gamma} = -\mu_0 + \mu_1$, где μ_0 – положительная представляющая мера для точки c в алгебре $P(\overline{D})$ с носителем на Γ , а $\mu_1 \perp P(\overline{D})$. Нетрудно показать, что $Q(c) = \int_{\Gamma} Q d\mu_0$ для всех гармонических полиномов Q . Из теоремы Уолша–Лебега следует, что последнее равенство распространяется на все функции класса $A_{\Delta}(\overline{D})$. Следовательно, μ_0 – логарифмическая мера для точки c в алгебре $P(\overline{D})$ с носителем на Γ ([4, гл. IV, теорема 7.2]). Пусть $\psi(z)$ – конформное отображение области D на единичный круг B с условием $\psi(c) = 0$. Данная функция непрерывно продолжается из D (по некасательным путям) в каждую точку дуги γ , причем продолженная таким образом функция отображает γ на некоторую открытую дугу единичной окружности взаимно однозначно и непрерывно ([10, гл. II, § 3]). Так как $dw/(2\pi iw)|_{\partial B}$ – логарифмическая мера для точки 0 в алгебре $P(\overline{B})$, то $d\mu_0(z)|_{\gamma} = \frac{1}{2\pi i} d\ln \psi(z)|_{\gamma}$ [4, гл. VI, лемма 4.3(v)]. Следовательно, $d\mu_0(z)|_{\gamma} = \frac{1}{2\pi i} d\ln(z - c)|_{\gamma} + dF_1(z)|_{\gamma}$, где $F_1(z)$ голоморфна в D , непрерывна на γ и продолжается непрерывно из D по некасательным путям в каждую точку дуги γ .

Рассмотрим теперь меру μ_1 . Имеет место разложение $\mu_1 = \mu_{1,a} + \mu_{1,s}$, где $\mu_{1,a}$ абсолютно непрерывна относительно μ_0 , а $\mu_{1,s}$ сингулярна относительно μ_0 . Из [1, лемма 1] следует, что $\mu_{1,a} \perp R(\overline{D})$, а $\mu_{1,s} \perp R(\widehat{\overline{D}} \setminus D)$. Кроме того, $\mu_{1,s}$ расположена целиком вне множества достижимых граничных точек области D . Так как каждая точка дуги γ является достижимой граничной точкой области D , то $|\mu_{1,s}|(\gamma) = 0$. Следовательно, $\mu|_{\gamma} = -\mu_0 + \mu_{1,a}$.

Пусть c_1 и c_2 – точки дуги γ , $c_1 \neq c_2$, $\gamma_0 \subset \gamma$ – дуга с концами в точках c_1 и c_2 . Так как мера $\mu_{1,a}$ ортогональна алгебре $R(\overline{D})$, то, как видно из доказательства [1, теорема 1] (см. формулу (10)), $\mu_{1,a}(\gamma_0) = F_2(c_2) - F_2(c_1)$, где $F_2(z) = \tilde{F}_2(\psi(z))$, а $\tilde{F}_2 \in R(\overline{B})$. Функция $F_2(z)$ обладает теми же свойствами, что и $F_1(z)$. Таким образом, $d\mu_{1,a}(z)|_{\gamma} = dF_2(z)|_{\gamma}$ и $d\mu(z)|_{\gamma} = -\frac{1}{2\pi i} d\ln(z - c)|_{\gamma} + dF(z)|_{\gamma}$, где $F(z)$ голоморфна в D , непрерывна на γ и непрерывно продолжается из D по некасательным путям в каждую точку γ .

Пусть $\Gamma_{\beta} = T_{\beta}(\Gamma)$. Определим на $\Gamma_{\beta} \cup T_{\beta}c$ меру μ_{β} по формуле $\mu_{\beta}(S) = \mu(T_{\beta}^{-1}(S))$, где S – произвольное борелевское множество. Из (9) и (10) следует, что данная мера удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_{\beta}} (\xi - T_{\beta}c)^n d\mu_{\beta}(\xi) = 0, \quad (11)$$

где $\xi = T_{\beta}z$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\int_{\Gamma_{\beta}} d\mu_{\beta} = -1. \quad (12)$$

Повторяя рассуждения, касающиеся меры μ , получаем из (11) и (12), что

$$d\mu_\beta(\xi)|_{T_\beta(\gamma)} = -\frac{1}{2\pi i} d\ln(\xi - T_\beta c)|_{T_\beta(\gamma)} + dF_\beta(\xi)|_{T_\beta(\gamma)},$$

где $F_\beta(\xi)$ голоморфна в области $D_\beta = T_\beta(D)$, непрерывна на $T_\beta(\gamma)$ и непрерывно продолжается из D_β по некасательным путям в каждую точку дуги $T_\beta(\gamma)$.

Следовательно,

$$d\mu(z)|_\gamma = -\frac{1}{2\pi i} d\ln(z_\beta - T_\beta c)|_\gamma + dF_\beta(z_\beta)|_\gamma.$$

Таким образом, на γ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c} = F_1(z) - F_\beta(z_\beta). \quad (13)$$

Так как γ – аналитическая дуга, на γ выполняется равенство $z_\beta = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна в некоторой окрестности дуги γ . Отсюда и из (13) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - c}{\varphi(z) - T_\beta c} = F(z) - F_\beta(\varphi(z)) \quad (14)$$

при всех $z \in \gamma$.

Найдем область, в которой функция $F(z) - F_\beta(\varphi(z))$ была бы определена и голоморфна, и граница которой содержала бы некоторую дугу, лежащую на γ .

Пусть $a \in \gamma$. Вычислим производную функции $\varphi(z)$ в точке a . Пусть сначала угол наклона касательной к γ в точке a по отношению к вещественной оси не равен $\pi/2$. Пусть k – тангенс данного угла. Тогда нетрудно доказать, что $\varphi'(a) = (1 + k\beta^{-1}i)/(1 + ki)$.

Пусть теперь γ касается вертикальной прямой в точке a . Нетрудно доказать, что $\varphi'(a) = 1/\beta$.

Таким образом, во всех случаях φ однолистка в некоторой окрестности точки a . Пусть $\gamma_1 \subset \gamma$ – дуга с концами в точке a и в некоторой внутренней точке дуги γ , γ_2 – гладкая жорданова дуга, имеющая точку a одним из своих концов, не касающаяся кривой γ в точке a , $\gamma_2 \setminus \{a\} \subset D$. Будем считать, что угол между γ_1 и γ_2 в точке a лежит в интервале $(0; \pi)$. Так как $\varphi(z)$ однолистка в окрестности точки a , то угол между $\varphi(\gamma_1)$ и $\varphi(\gamma_2)$ в точке a равен углу между γ_1 и γ_2 в точке a . Отображение T_β имеет диагональную матрицу с положительным определителем. Следовательно, угол между $T_\beta(\gamma_1)$ и $T_\beta(\gamma_2)$ в точке a лежит в интервале $(0; \pi)$. Так как $\varphi(\gamma_1) = T_\beta(\gamma_1)$, углы между $\varphi(\gamma_1)$ и $\varphi(\gamma_2)$ и между $\varphi(\gamma_1)$ и $T_\beta(\gamma_2)$ в точке a лежат в интервале $(0; \pi)$. Так как $T_\beta(\gamma_2 \setminus \{a\}) \subset D_\beta$, а D_β – область Каратеодори, то $\varphi(\gamma_2 \setminus \{a\}) \subset D_\beta$, если γ_2 имеет достаточно малую длину.

Пусть точки a и b , принадлежащие γ , расположены достаточно близко друг к другу. Из предыдущих рассуждений следует, что существует гладкая дуга $\tilde{\gamma}$ с концами в точках a и b , не касающаяся γ в данных точках, лежащая, за исключением концов, в D и такая, что $\varphi(\tilde{\gamma}) \setminus (\{\varphi(a)\} \cup \{\varphi(b)\}) \subset D_\beta$. Пусть U – область, ограниченная дугой $\tilde{\gamma}$ и под дугой дуги γ , имеющей концы в точках a и b . Так как D и D_β – области Каратеодори, то $U \subset D$ и $\varphi(U) \subset D_\beta$. Поэтому функция $F(z) - F_\beta(\varphi(z))$ определена и голоморфна в U .

Пусть $c \in U$ и $\varphi(c) \neq T_\beta c$. Тогда $T_\beta c \in D_\beta$. Так как дуга $\varphi(\gamma) \subset \partial D_\beta$, то $T_\beta c \notin \varphi(\gamma)$. Следовательно, функция $\ln((z - c)/(\varphi(z) - T_\beta c))$ голоморфна в некоторой окрестности V дуги γ . В то же время данная функция не продолжается до функции, голоморфной в области U . Так как (14) выполняется на γ , а ∂U содержит некоторую дугу, лежащую на γ , по теореме единственности Привалова ([10, гл. X, § 2, теорема 1]) (14) выполняется также и в $V \cap U$. Таким образом, функция $\ln((z - c)/(\varphi(z) - T_\beta c))$ продолжается до функции, голоморфной в U . Из полученного противоречия следует, что не существует меры μ с носителем на $\Gamma \cup \{c\}$, удовлетворяющей условиям $\mu(\{c\}) = 1$ и $\mu \perp P_L(\Gamma \cup \{c\})$. Следовательно, функция, равная 0 на Γ и 1 в точке c , принадлежит классу $P_L(\Gamma \cup \{c\})$. Пункт а) доказан.

Докажем б). Из доказательства а) следует, что существует точка $c \in D$ такая, что любая мера μ с условиями $\text{Supp}(\mu) \subseteq (\Gamma \cup \{c\})$ и $\mu \perp P_L(\Gamma \cup \{c\})$ удовлетворяет условию $\mu(\{c\}) = 0$. Но тогда $\text{Supp}(\mu) \subseteq \Gamma$, $\mu \perp P_L(\Gamma)$. Следовательно, $\mu = 0$ и $P_L(\Gamma \cup \{c\}) = C(\Gamma \cup \{c\})$. Предложение 2 доказано.

Автор выражает искреннюю благодарность П. В. Парамонову и К. Ю. Федоровскому за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зайцев А. Б. О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 75–87.
- [2] Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 123–144.
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [4] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
- [5] Бишоп Э. Граничные меры аналитических дифференциалов // Некоторые вопросы теории приближений. М.: ИЛ, 1963. С. 87–100.
- [6] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
- [7] Федоровский К. Ю. О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
- [8] Carmona J. J., Fedorovski K. Yu., Paramonov P. V. On Uniform Approximation by Polyanalytic Polynomials and the Dirichlet Problem for Bianalytic Functions. Preprint No. 415. Barcelona. Spain: Centre de Recerca Matematica, 1999.
- [9] Paramonov P. V., Verdera J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. № 2. P. 249–259.
- [10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.