Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Псху, О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 592–599

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:00:25

УДК 517.53

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЯХ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А. В. Псху

В данной заметке доказывается утверждение, позволяющее распространять результаты, связанные с наличием или отсутствием у функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$$

вещественных нулей при определенных значениях α и μ на более обширные области изменения этих параметров. Дается геометрическое описание множеств пар (α, μ) , при которых функция $E_{1/\alpha}(z; \mu)$ имеет и при которых не имеет вещественных нулей.

Библиография: 10 названий.

1. Распределению нулей функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)} \quad (1)$$

посвящено значительное количество работ (см., например, [1], [2] и библиографию там). Вопрос о вещественных нулях функции (1) тесно связан с разрешимостью спектральных задач для уравнений дробного порядка (см. [3, гл. 3, 4]).

В данной заметке доказывается утверждение, позволяющее распространять результаты, связанные с наличием или отсутствием у функций типа Миттаг-Леффлера вещественных нулей при определенных значениях α и μ , на более обширные области изменения этих параметров. Дается геометрическое описание множеств пар (α, μ) , при которых функция (1) имеет и при которых не имеет вещественных нулей.

2. Далее будем считать $\xi > 0, \eta > 0$. Обозначим через B множество пар (ξ, η) таких, что функция $E_{1/\xi}(t; \eta)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, т.е., учитывая, что $E_{1/\xi}(t; \eta) > 0$ при $t \geq 0$:

$$B = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0, \exists t \in \mathbb{R}, E_{1/\xi}(t; \eta) < 0\}.$$

Через B^* обозначим множество пар (ξ, η) , для которых функция $E_{1/\xi}(t; \eta)$ не имеет вещественных нулей:

$$B^* = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R}, E_{1/\xi}(t; \eta) > 0\}.$$

Через B_0 обозначим множество пар (ξ, η) таких, что функция $E_{1/\xi}(t; \eta)$ имеет вещественные нули, но не принимает отрицательные значения:

$$B_0 = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0\} \setminus (B \cup B^*).$$

Для фиксированных α и μ обозначим через $D_{\alpha, \mu}$ множество точек (ξ, η) , ограниченное лучом прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и (α, μ) , выходящим из точки (α, μ) в направлении возрастания ξ и η , отрезком с концами в точках $(\alpha, 0)$ и (α, μ) и лучом, лежащим на оси $O\xi$, выходящим из точки $(\alpha, 0)$ в положительном направлении. Все точки границы, за исключением точек, лежащих на оси $O\xi$, и точки (α, μ) , принадлежат множеству $D_{\alpha, \mu}$. То есть

$$D_{\alpha, \mu} = \left\{ (\xi, \eta) : \alpha \leq \xi, 0 < \eta \leq \frac{\mu\xi}{\alpha}, (\xi, \eta) \neq (\alpha, \mu) \right\}.$$

Через $D_{\alpha, \mu}^*$ обозначим множество, ограниченное лучом, выходящим из точки (α, μ) параллельно оси $O\eta$, отрезком с концами в точках $(0, 0)$ и (α, μ) и положительной частью оси $O\eta$. Все граничные точки, кроме точек оси $O\eta$ и точки (α, μ) , принадлежат множеству $D_{\alpha, \mu}^*$. Или

$$D_{\alpha, \mu}^* = \left\{ (\xi, \eta) : 0 < \xi \leq \alpha, \eta \geq \frac{\mu\xi}{\alpha}, (\xi, \eta) \neq (\alpha, \mu) \right\}.$$

Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $(\alpha, \mu) \in B^* \cup B_0$. Тогда $D_{\alpha, \mu}^* \subset B^*$.

2) Пусть $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$. Тогда $D_{\alpha, \mu} \subset B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [4] было введено интегральное преобразование

$$A^{\beta, \delta} v(x) \equiv (A^{\beta, \delta} v)(x) = \int_0^\infty v(t) x^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{t}{x^\beta} \right) dt, \quad 0 < \beta < 1, \quad (2)$$

которое является обобщением преобразования Б. Станковича [5]. Здесь

$$e_{\nu, \gamma}^{\mu, \varepsilon}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\nu k + \mu) \Gamma(-\gamma k + \varepsilon)}$$

— функция типа Райта. В [4] приведено соотношение

$$A^{\beta, \delta} [x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu)] = x^{\mu\beta+\delta-1} E_{1/\alpha\beta}(-x^{\alpha\beta}; \mu\beta + \delta), \quad \mu > 0. \quad (3)$$

Приведем доказательство этого соотношения.

Известно [6] асимптотическое разложение функции Райта при $x \rightarrow \infty$

$$e_{1, \beta}^{1, \delta}(-x) = Y^{1/2-\beta} e^{-Y} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} a_m Y^{-m} + O(Y^{-M}) \right\}, \quad (4)$$

где $Y = (1 - \beta)(\beta^\beta x)^{1/(1-\beta)}$, a_m — константы, зависящие от β и δ .

Из (4) видно, что интеграл (2) сходится для любой функции $v(x)$, интегрируемой на любом конечном отрезке положительной полуоси и удовлетворяющей асимптотическим неравенствам

$$\begin{aligned} |v(x)| &< cx^\varepsilon, & \varepsilon > -1, \quad \delta \neq 0, \quad \varepsilon > -2, \quad \delta = 0, & x \rightarrow 0, \\ |v(x)| &< c \exp(kx^\varepsilon), & \varepsilon < \frac{1}{1-\beta}, & x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Докажем равенство

$$A^{\beta, \delta} x^{\nu-1} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\beta\nu + \delta)} x^{\beta\nu + \delta - 1}. \quad (6)$$

Для этого воспользуемся интегральным представлением функции Райта (см. [6], а также [7])

$$e_{1, \beta}^{1, \delta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \omega\pi)} e^p p^{-\delta} e^{z p^\beta} dp, \quad (7)$$

где через $\gamma(\varepsilon, \omega\pi)$ обозначен контур, состоящий из дуги окружности $|p| = \varepsilon > 0$, $|\arg p| \leq \omega\pi$, и двух лучей $\arg p = \omega\pi$ и $\arg p = -\omega\pi$, $|p| \geq \varepsilon$; значение ω выбрано так, что выполняются неравенства $1 - \omega\beta > 1/2$, $1 \geq \omega > 1/2$; контур проходится в направлении неубывания $\arg p$.

Сделаем замену переменной интегрирования $t = s x^\beta$, воспользуемся (7) и изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} A^{\beta, \delta} x^{\nu-1} &= \int_0^\infty t^{\nu-1} x^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta}\left(-\frac{t}{x^\beta}\right) dt = x^{\beta\nu + \delta - 1} \int_0^\infty s^{\nu-1} e_{1, \beta}^{1, \delta}(-s) ds \\ &= \frac{x^{\beta\nu + \delta - 1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \omega\pi)} e^p p^{-\delta} \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t p^\beta} dt dp. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\arg(p^\beta) < \pi/2$, когда $p \in \gamma(\varepsilon, \omega\pi)$ и (см., например, [8, с. 424, 522])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \omega\pi)} e^p p^{-\delta - \beta\nu} dp = \frac{1}{\Gamma(\delta + \beta\nu)}, \quad \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-1} ds = \Gamma(\nu), \quad \nu > 0,$$

получаем (6). Отметим, что в случае $\delta = 1 - \beta$ соотношение (6) было доказано в [5].

В дальнейшем мы будем использовать асимптотические разложения функции (1). Если $0 < \alpha < 2$, то при $|z| \rightarrow \infty$ справедливы формулы [9, с. 134]

$$E_{1/\alpha}(z; \mu) = - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \pi \geq |\arg z| \geq \frac{\alpha\pi}{2} + \varepsilon, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_{1/\alpha}(z; \mu) &= \frac{1}{\alpha} z^{(1-\mu)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Если же $\alpha \leq 2$, то (см. [9, с. 137])

$$E_{1/\alpha}(z; \mu) = \frac{1}{\alpha} \sum (Z_m)^{1-\mu} \exp(Z_m) - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (10)$$

где $Z_m = z^{1/\alpha} e^{i2\pi m/\alpha}$, а суммирование в первой сумме проводится по тем m , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, для которых выполнены неравенства $|\arg z + 2\pi m| \leq \alpha\pi/2$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим

$$E^n(x; \alpha, \mu) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{\alpha k + \mu - 1}}{\Gamma(\alpha k + \mu)}.$$

Из формулы (6) следует равенство

$$A^{\beta, \delta} E^n(x; \alpha, \mu) \equiv \int_0^\infty E^n(t; \alpha, \mu) x^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{t}{x^\beta} \right) dt = E^n(x; \alpha\beta, \mu\beta + \delta). \quad (11)$$

Для правой части (11) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^n(x; \alpha\beta, \mu\beta + \delta) = x^{\mu\beta + \delta - 1} E_{1/\alpha\beta}(-x^\alpha; \mu\beta + \delta). \quad (12)$$

Из соотношений (8)–(10) следует, что

$$|E^n(x; \alpha, \mu)| \leq C \exp(kx),$$

где C и k – положительные константы, причем, не зависящие от n . С учетом (4) это означает равномерную сходимость несобственного интеграла из (11) на множестве $\{n \in \mathbb{N}\}$. Поэтому можем изменить порядок предельных переходов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\beta, \delta} E^n(x; \alpha, \mu) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/z}^z E^n(t; \alpha, \mu) x^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{t}{x^\beta} \right) dt.$$

Учитывая равномерную сходимость $E^n(x; \alpha, \mu)$ к функции $x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu)$ при $n \rightarrow \infty$ на любом отрезке $[1/z, z]$, $1 < z < \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A^{\beta, \delta} E^n(x; \alpha, \mu) &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{1/z}^z \lim_{n \rightarrow \infty} E^n(t; \alpha, \mu) x^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{t}{x^\beta} \right) dt \\ &= A^{\beta, \delta} x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11)–(13) следует (3).

Известно [10], что при $\delta \geq 0$, $x > 0$,

$$e_{1, \beta}^{1, \delta}(-x) > 0. \quad (14)$$

Поэтому если $u(x) \geq 0$ ($u(x) \not\equiv 0$, $x > 0$), $\delta \geq 0$, то

$$A^{\beta, \delta} u(x) > 0. \quad (15)$$

Из (3) и (15) следует, что если $x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) \geq 0$, $x > 0$, то

$$x^{\mu\beta + \delta - 1} E_{1/\alpha\beta}(-x^{\alpha\beta}; \mu\beta + \delta) > 0.$$

То есть, если $(\alpha, \mu) \in B^* \cup B_0$, то

$$(\alpha\beta, \mu\beta + \delta) \in B^* \quad \forall \beta \in (0, 1), \quad \delta \geq 0. \quad (16)$$

Справедливо соотношение (см., например, [9, с. 120])

$$D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) = x^{\mu+\varepsilon-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu + \varepsilon), \quad (17)$$

где $D_{0x}^{-\varepsilon}$ – оператор дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля:

$$D_{0x}^{-\varepsilon} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\varepsilon}} dt. \quad (18)$$

Из формулы (17) и положительности ядра интеграла в (18) следует, что если $(\alpha, \mu) \in B^* \cup B_0$, то

$$(\alpha, \mu + \varepsilon) \in B^* \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (19)$$

Из (16) и (19) следует первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Из (2) и (14) вытекает, что если функция $v(x) = A^{\beta, \delta} u(x)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $x_0 > 0$, то функция $u(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому из равенства

$$A^{\beta, \delta} \left[x^{(\mu-\delta)/\beta-1} E_{\beta/\alpha} \left(-x^{\alpha/\beta}; \frac{\mu-\delta}{\beta} \right) \right] = x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu),$$

которое эквивалентно (3), следует, что если $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$, то

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\mu-\delta}{\beta} \right) \in B \quad \forall \beta \in (0, 1), \quad \mu > \delta \geq 0. \quad (20)$$

На основании равенства

$$D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\mu-\varepsilon-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu - \varepsilon) = x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) \quad (21)$$

получаем, что если $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$, то

$$(\alpha, \mu - \varepsilon) \in B \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \mu - \varepsilon > 0. \quad (22)$$

С помощью (20) и (22) приходим ко второму утверждению теоремы. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим одно следствие формулы (21). Пусть $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$. Обозначим через $z(\alpha, \mu)$ наименьший по модулю действительный нуль функции $E_{1/\alpha}(z; \mu)$. Очевидно, что $z(\alpha, \mu) < 0$. Из (21) следует, что

$$D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\mu-\varepsilon-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu - \varepsilon) \Big|_{x=z_0} = 0,$$

где $z_0 = [-z(\alpha, \mu)]^{1/\alpha}$. Поэтому существует z_1 такое, что $z_1 \in (0, z_0)$ и $E_{1/\alpha}(-z_1^\alpha; \mu - \varepsilon) = 0$. Другими словами,

$$|z(\alpha, \mu - \varepsilon)| < |z(\alpha, \mu)|,$$

если $\mu > \varepsilon > 0$.

3. С помощью теоремы 1 можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы включения*

$$\{(\alpha, \mu) : 0 < \mu < \alpha\} \subset B, \quad (23)$$

$$D_{1,1}^* \cup D_{2,3}^* \subset B^*, \quad D_{2,3} \subset B. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \mu < \alpha < 2$. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) dx &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_0^z x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) dx \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} z^\mu E_{1/\alpha}(-z^\alpha; \mu + 1). \end{aligned}$$

Учитывая асимптотическое поведение функции типа Миттаг-Леффлера (8), получаем, что

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} E_{1/\alpha}(-x^\alpha; \mu) dx = 0, \quad 0 < \mu < \alpha < 2.$$

Это означает, что функция $E_{1/\alpha}(x; \mu)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения при $0 < \mu < \alpha < 2$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому из теоремы 1 следует (23).

Далее, известно, что

$$E_1(-x; 1) = e^{-x}, \quad x^2 E_{1/2}(-x^2; 3) = 1 - \cos x.$$

То есть $(1, 1) \in B^*$, а $(2, 3) \in B_0$. Из теоремы 1 получаем (24).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что часть свойства (24), а именно то, что $D_{1,1}^* \subset B^*$, содержится в работе [1] (см. также [2]).

4. Докажем утверждение, дающее представление о геометрии множеств B , B^* и B_0 . Далее будем обозначать через $\mathbb{R}_+^2 = \{(\xi, \eta) : \xi > 0, \eta > 0\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует кривая σ такая, что*

- 1) $\sigma \subset \mathbb{R}_+^2$;
- 2) кривую σ можно задать параметрически $\sigma = \{(\xi, \eta) : \xi = s(\eta), \eta > 0\}$, причем функция $s(\eta)$ не убывает и удовлетворяет условию Липшица, т.е. если $\eta_1 > \eta_2$, то

$$0 \leq s(\eta_1) - s(\eta_2) \leq \eta_1 - \eta_2; \quad (25)$$

- 3) кривая σ делит $\mathbb{R}_+^2$ на две связанные части, одна из которых совпадает с B , а вторая принадлежит B^* , а именно:

$$\begin{aligned} B &= \{(\xi, \eta) : s(\eta) < \xi < \infty, \eta > 0\}, \\ B^* \cup B_0 &= \{(\xi, \eta) : 0 < \xi \leq s(\eta), \eta > 0\}, \quad B_0 \subset \sigma. \end{aligned} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $A = (\xi_0, \eta_0)$ обозначим через $l(A)$ луч, выходящий из точки A параллельно оси $O\xi$ в направлении возрастания абсциссы ξ : $l(A) = \{(\xi, \eta) : \xi > \xi_0, \eta = \eta_0\}$.

Пусть M – фиксированная точка оси $O\eta$ с положительной ординатой μ , $M = (0, \mu)$, $\mu > 0$.

Из (24) следует, что подмножество точек луча $l(M)$, принадлежащих множеству B^* , непусто и ограничено. Поэтому существует точка $C_0 = (\alpha_0, \mu)$, $\alpha_0 > 0$, такая, что для любого сколь угодно малого ε найдется δ , $\varepsilon > \delta \geq 0$, такое, что точка $C_{0\delta} = (\alpha_0 - \delta, \mu)$ принадлежит множеству B^* , а все точки луча $l(C_0)$ не принадлежат B^* . Отсюда в силу теоремы 1 следует, что все точки интервала $MC_{0\delta}$ принадлежат B^* . Учитывая произвольность выбора ε , получаем

$$MC_0 \subset B^*, \quad l(C_0) \subset B \cup B_0. \quad (27)$$

Аналогично, из (24) следует, что подмножество точек луча $l(M)$, принадлежащих множеству B , является непустым и их абсциссы ограничены снизу. Поэтому существует точка $C_1 = (\alpha_1, \mu)$, $\alpha_1 > 0$, такая, что для произвольного ε найдется δ , $\varepsilon > \delta \geq 0$, такое, что точка $C_{1\delta} = (\alpha_1 + \delta, \mu)$ принадлежит множеству B , а все точки интервала MC_1 принадлежат $B^* \cup B_0$. Из теоремы 1 следует, что все точки луча $l(C_{1\delta})$ принадлежат B . То есть

$$l(C_1) \subset B, \quad MC_1 \subset B^* \cup B_0. \quad (28)$$

Докажем, что $C_0 = C_1$. Допустим, что $C_0 \neq C_1$. Тогда, очевидно, $\alpha_1 > \alpha_0$ и из (27) и (28) следует, что все точки интервала C_0C_1 принадлежат B_0 . Поэтому если C' – произвольная точка интервала C_0C_1 , то в силу теоремы 1 все точки интервала C_0C' принадлежат B^* , а интервал $C'C_1$ лежит в B , что противоречит (27) и (28). Это означает, что точки C_0 и C_1 совпадают, и справедливы включения

$$MC \subset B^*, \quad l(C) \subset B,$$

где $C = C_0 = C_1$.

Таким образом, для каждой точки $M = (0, \mu)$, $\mu > 0$, существует точка $C = C(\mu)$, $C \neq M$, которая делит луч $l(M)$ на интервал, лежащий в B^* , и луч, принадлежащий B . Объединение таких точек $C(\mu)$ для всех положительных μ обозначим через σ . Очевидно, что σ представляет собой кривую, лежащую в $\mathbb{R}_+^2$, и ее можно задать параметрически $\sigma = \{(\xi, \eta) : \xi = s(\eta), \eta > 0\}$; при этом справедливы включения

$$\{(\xi, \eta) : s(\eta) < \xi < \infty, \eta > 0\} \subset B, \quad \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < s(\eta), \eta > 0\} \subset B^*. \quad (29)$$

Из этих включений, замечая, что $\mathbb{R}_+^2 = B \cup B^* \cup B_0$, следует, что $B_0 \subset \sigma$. Далее, пусть (α_0, μ_0) – фиксированная точка из $\mathbb{R}_+^2$. Нетрудно заметить, что при фиксированном x функция $E_{1/\alpha}(x; \mu)$ является непрерывной функцией параметров α и μ , по крайней мере, в некоторой окрестности точки (α_0, μ_0) . Поэтому, если $E_{1/\alpha_0}(x_0; \mu_0) < 0$ для некоторого x_0 , то, очевидно, $E_{1/\alpha}(x_0; \mu) < 0$ для всех (α, μ) из достаточной малой окрестности точки (α_0, μ_0) . То есть множество B является открытым. Это означает, что точки кривой σ не могут принадлежать множеству B , так как они являются для него граничными. Отсюда и из (29) следует (26).

Докажем (25). Пусть $(\alpha, \mu) \in \sigma$, т.е. $\alpha = s(\mu)$. Тогда из (26) и теоремы 1 следует, что для любого $\delta > 0$ верны включения $D_{\alpha-\delta, \mu} \subset B^*$ и $D_{\alpha+\delta, \mu} \subset B$. Поэтому в силу произвольности δ кривая σ заключена между прямыми, проходящими через точку (α, μ) , одна из которых параллельна оси $O\eta$, а вторая проходит через начало координат. То есть для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$s(\mu) \leq s(\mu + \varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\mu}(\mu + \varepsilon).$$

Отсюда, так как $\alpha = s(\mu)$, получаем

$$0 \leq s(\mu + \varepsilon) - s(\mu) \leq \frac{s(\mu)}{\mu} \varepsilon.$$

Из (23) следует, что $\mu \geq s(\mu)$, и мы приходим к (25).

Выражаю искреннюю благодарность А. П. Солдатову и А. Ю. Попову за весьма полезные замечания, сделанные относительно этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение нулей функции Миттаг-Леффлера // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 2. С. 165–168.
- [2] Седлецкий А. М. Неасимптотические свойства корней функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 3. С. 405–420.
- [3] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
- [4] Псху А. В. Интегральное преобразование с функцией Райта в ядре // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2002. Т. 6. № 1. С. 35–47.
- [5] Станкович Б. О једној класи сингуларних интегралних једначина // Зборник радова САН. 43. Математички институт САН. 1955. Т. 4. С. 81–130.
- [6] Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. (Oxford). 1940. V. 11. P. 36–48.
- [7] Псху А. В. Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.
- [8] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
- [9] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [10] Stanković B. On the function of E. M. Wright // Pubs Inst. Math. Beograd. 1970. V. 10. № 24. P. 113–124.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик
E-mail: pskhu@mail1333.com

Поступило
25.07.2003