Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рыжкова, Е. И. Яковлев, Расслоения с группами многозначных автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 600–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:44:49

УДК 515.16

РАССЛОЕНИЯ С ГРУППАМИ МНОГОЗНАЧНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

А. В. Рыжкова, Е. И. Яковлев

Построена категория, объектами которой являются главные расслоения с фиксированной базой – гладким многообразием B , структурной группой T^k и конечной группой Δ многозначных автоморфизмов; от морфизмов требуется эквивариантность относительно Δ . Найдены инварианты, с их помощью вычислена группа классов эквивалентности объектов категории. Приведены примеры, указаны приложения к динамике систем с гироскопическими силами.

Библиография: 8 названий.

Как известно, анализ ряда задач математической физики приводит к рассмотрению гироскопических систем с многозначным функционалом действия [1]. В случае конечности индекса иррациональности $k - 1$ формы гироскопических сил такой системы преодолеть некоторые из возникающих трудностей удастся с помощью главного расслоения ξ , для которого базой является конфигурационное многообразие B , а структурной группой – тор T^k [2], [3]. Предположим, что интересующая нас гироскопическая система обладает конечной группой симметрий Δ , т.е. инвариантна относительно некоторого действия $R: B \times \Delta \rightarrow B$. Возникает вопрос – какими дополнительными свойствами должно при этом обладать соответствующее расслоение ξ ?

Нами получен точный ответ на этот вопрос. Оказывается, что на тотальном пространстве E индуцируется многозначное действие группы Δ . При этом Δ становится группой многозначных автоморфизмов расслоения, поэтому мы называем ξ почти Δ -расслоением. Настоящая работа посвящена построению и исследованию категории почти Δ -расслоений. Основной результат состоит в нахождении инвариантов и вычислении с их помощью группы классов эквивалентности почти Δ -расслоений с заданной базой B и фиксированными T^k , Δ и R .

В [4] одним из авторов данной работы с несколько иной точки зрения рассматривались почти Δ -расслоения, для которых действие группы Δ на базе B свободно. В этой ситуации пространство орбит B/Δ является гладким многообразием, а фактор-отображение $\nu: B \rightarrow B/\Delta$ – регулярным накрытием. Если $p: E \rightarrow B$ – проекция расслоения ξ , то $\nu \circ p: E \rightarrow B/\Delta$ – проекция локально-тривиального расслоения со стандартным слоем $\Delta \times T^k$ и многозначными функциями перехода со значениями в той же группе $\Delta \times T^k$. Такие расслоения названы в [4] почти главными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00590.

В данной работе действие группы Δ на B предполагается произвольным, что существенно расширяет множество объектов изучаемой категории (см. примеры в п. 5). Кроме того, инварианты почти Δ -расслоений здесь строятся в терминах гомологий базы B , а не пространства орбит B/Δ как в [4].

1. Категория почти Δ -расслоений. Пусть ξ – гладкое главное расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$ и структурной группой $T^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$. Рассмотрим конечную группу Δ и правое действие $R: B \times \Delta \rightarrow B$. Как обычно, для $a \in B$ и $\delta \in \Delta$ будем полагать $R(a, \delta) = R_\delta(a) = a \cdot \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Допустим, что открытое покрытие $\mathcal{U}$ обладает свойствами

- (1) существует ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ расслоения ξ ;
- (2) $R_\delta(U) = U$ для всех $U \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$.

Тогда $\mathcal{U}$ мы будем называть (ξ, Δ) -покрытием.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Мы исходим из определения, согласно которому гладкое многообразие обладает счетной базой и потому паракомпактно. Кроме того, группа Δ конечна. Следовательно, для произвольного атласа $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ расслоения ξ по теореме 6.1 главы 3 книги [5] найдется вписанное в $\mathcal{V}$ локально конечное регулярное Δ -покрытие $\mathcal{W}$. При этом множества вида $U = \cup_{\delta \in \Delta} W \cdot \delta$, $W \in \mathcal{W}$, образуют (ξ, Δ) -покрытие $\mathcal{U}$ базы B .

Выберем карты $\xi_U, \xi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, для которых $V \cap U \neq \emptyset$. Функция перехода $\xi_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ от ξ_U к ξ_V связывает их равенством

$$\xi_U(a, t) = \xi_V(a, \xi_{VU}(a) + t), \quad (1.1)$$

где $a \in V \cap U$ и $t \in T^k$. Определим отображение $\tau_\delta^{VU}: U \cap V \rightarrow T^k$ формулой

$$\tau_\delta^{VU} = \xi_{VU} \circ R_\delta - \xi_{VU}. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $d\tau_\delta^{VU} \equiv 0$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ будет называться *почти Δ -атласом*. Два таких атласа *эквивалентны*, если их объединение тоже является почти Δ -атласом. Если $\mathcal{A}$ – класс эквивалентности почти Δ -атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, то пару $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ назовем *почти Δ -расслоением*.

Рассмотрим главные расслоения ξ и ξ' с проекциями $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ и структурной группой T^k , а также гладкое отображение $f: E \rightarrow E'$ со свойствами: $p = p' \circ f$ и $f(v \cdot t) = f(v) \cdot t$ для всех $v \in E$ и $t \in T^k$. Тогда $f: \xi \rightarrow \xi'$ – морфизм над B . Допустим, что расслоения ξ и ξ' обладают почти Δ -структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$. Выберем атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$ и множества $U, V \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$. Имеется функция перехода $\zeta_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ от карты ξ_U к карте ξ'_V при морфизме f . При этом для всех $a \in V \cap U$ и $t \in T^k$

$$f \circ \xi_U(a, t) = \xi'_V(a, \zeta_{VU}(a) + t). \quad (1.3)$$

Определим гладкое отображение $\sigma_\delta^{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$, полагая

$$\sigma_\delta^{VU} = \zeta_{VU} \circ R_\delta - \zeta_{VU}, \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Если $d\sigma_\delta^{VU} \equiv 0$ для всех $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, $\xi'_V \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и $\delta \in \Delta$, то f назовем *морфизмом почти Δ -расслоений* $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$.

Далее мы будем считать фиксированными многообразие B , группы T^k , Δ и действие $R: B \times \Delta \rightarrow B$, а также полагать $G = \Delta \times T^k$. Совокупность почти Δ -расслоений над B со структурной группой T^k и их морфизмов образует категорию $\mathcal{K}(B, T^k, \Delta, R)$. Если $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ и $\rho'' = (\xi'', \mathcal{A}'')$ – объекты категории $\mathcal{K}(B, T^k, \Delta, R)$, то найдутся атласы $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}''$, ассоциированные с одним и тем же покрытием $\mathcal{U}$ базы B (см., например, [6, гл. 5, конец п. 2]). Пусть $\{\xi'_{VU}\}$ и $\{\xi''_{VU}\}$ – наборы функций перехода атласов $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}''(\mathcal{U})$ соответственно. Тогда суммы $\xi_{VU} = \xi'_{VU} + \xi''_{VU}$ образуют коцикл и потому существует главное расслоение ξ с базой B , структурной группой T^k и атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, обладающим системой функций перехода $\{\xi_{VU}\}$ (см. [6, гл. 5, п. 3]). Очевидно, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – почти Δ -атлас. Если $\mathcal{A}$ – его класс эквивалентности, то пара $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ является почти Δ -расслоением. При этом формула $[\rho] = [\rho'] + [\rho'']$ корректно определяет групповую операцию на множестве $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$ классов эквивалентности объектов категории $\mathcal{K}(B, T^k, \Delta, R)$. Нейтральный элемент группы $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$ представляет собой класс эквивалентности пары $\rho_0 = (\xi_0, \mathcal{A}_0)$, где ξ_0 – расслоение-произведение B на T^k , а $\mathcal{A}_0$ содержит атлас $\{\text{id}_{B \times T^k}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Отметим, что операция сложения на множестве классов эквивалентности главных расслоений с фиксированной базой B и структурной группой T^1 двумя различными способами описана в [7]. Для ассоциированных векторных расслоений соответствующая операция рассматривается в разделе 10 книги [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Элементы (ξ, Δ) -покрытия $\mathcal{U}$ и их пересечения не обязаны быть связными. Поэтому тождества $d\tau_\delta^{VU} \equiv 0$ и $d\sigma_\delta^{VU} \equiv 0$ равносильны тому, что отображения τ_δ^{VU} и σ_δ^{VU} только локально постоянны. Добавим, что расслоение-произведение ξ_0 может обладать почти Δ -структурой, отличной от $\mathcal{A}_0$.

2. Многозначные действия и G -связности. Пусть ξ – главное расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$ и структурной группой T^k . Каждая его карта $\xi_U: U \times T^k \rightarrow E_U$ позволяет определить действие $R^U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$ группы Δ на подмногообразии $E_U = p^{-1}(U) \subset E$ с помощью формулы

$$R^U(\xi_U(a, t), \delta) = \xi_U(a \cdot \delta, t). \quad (2.1)$$

При этом для каждого $\delta \in \Delta$

$$p \circ R_\delta^U = R_\delta \circ p. \quad (2.2)$$

Если $\xi_V: V \times T^k \rightarrow E_V$ – другая карта расслоения ξ и $V \cap U \neq \emptyset$, то действия R^U и R^V связаны на $E_{V \cap U}$ равенством

$$R_\delta^U(v) = R_\delta^V(v) \cdot \tau_\delta^{VU}(p(v)), \quad (2.3)$$

где отображение $\tau_\delta^{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ определено формулой (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – атлас главного расслоения ξ , а отображения $R^U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$ заданы с помощью карт $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и формулы (2.1). Набор $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ мы будем называть *псевдодействием* группы Δ на пространстве расслоения ξ , ассоциированным с $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Если $d\tau_\delta^{VU} \equiv 0$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$ (т.е. $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – почти Δ -атлас), то $\mathcal{R}$ назовем *многозначным действием*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из равенств (2.1) и (2.2) следует, что $R_\delta^U: E_U \rightarrow E_U$ – автоморфизм сужения над U расслоения ξ . Поэтому для многозначного действия $\mathcal{R}$ набор $\{\mathcal{R}_\delta^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ естественно назвать *многозначным автоморфизмом* расслоения ξ . При этом Δ становится *группой многозначных автоморфизмов*.

Рассмотрим главное расслоение ξ' с проекцией $p': E' \rightarrow B$ и структурной группой T^k , морфизм $f: \xi \rightarrow \xi'$ и T^k -связности H на E и H' на E' , удовлетворяющие равенству $H'_{f(v)} = df(H_v)$ при всех $v \in E$. Выберем карты ξ_U и ξ'_V расслоений ξ и ξ' и элемент $\delta \in \Delta$. Предположим, что $V \cap U \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если связность H инвариантна относительно преобразования $R_\delta^U: E_U \rightarrow E_U$, то H' инвариантна на $E'_{V \cap U}$ относительно $R_\delta'^V: E'_V \rightarrow E'_V$ тогда и только тогда, когда определенное формулой (1.4) отображение $\sigma_\delta^{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ локально постоянно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что связность H' инвариантна на $E'_{V \cap U}$ относительно $R_\delta'^V$. Выберем компоненту связности W пересечения $V \cap U$, точки $a_0, a_1 \in W$ и путь $x: I \rightarrow W$ с началом $x(0) = a_0$ и концом $x(1) = a_1$. Для некоторого $t_0 \in T^k$ положим $v_0 = \xi_U(a_0, t_0)$. Рассмотрим горизонтальный относительно связности H лифт y пути x с начальной точкой $y(0) = v_0$. Тогда найдется такое $t_1 \in T^k$, что $y(1) = v_1 = \xi_U(a_1, t_1)$. Положим $y_U = f \circ R_\delta^U \circ y$ и $y_V = R_\delta'^V \circ f \circ y$. Пути $y_U: I \rightarrow E'$ и $y_V: I \rightarrow E'$ горизонтальны относительно связности H' . Кроме того, $p' \circ y_U = p' \circ y_V$. Поэтому существует элемент $t \in T^k$, при всех $s \in I$ удовлетворяющий равенству $y_U(s) = y_V(s) \cdot t$. В частности,

$$f(R_\delta^U(v_i)) = R_\delta'^V(f(v_i)) \cdot t \quad (2.4)$$

для $i = 0, 1$. С другой стороны в силу (1.3) и (2.1)

$$f \circ R_\delta^U(v_i) = R_\delta'^V(f(v_i)) \cdot \sigma_\delta^{VU}(a_i). \quad (2.5)$$

Согласно (2.4) и (2.5) $\sigma_\delta^{VU}(a_i) = t$. Этим доказано, что σ_δ^{VU} локально постоянно.

Допустим далее, что для $i = 0, 1$ и любого $\delta \in \Delta$ верно предыдущее равенство. Положим $S_t(v') = v' \cdot t$ для всех $v' \in E'$. В силу (2.5) $S_{-t} \circ f \circ R_\delta^U = R_\delta'^V \circ f$ на $E_{V \cap U}$. Рассмотрим формы ω и ω' связностей H и H' . По определению $S_{-t}^* \omega' = \omega'$. Согласно условию $f^* \omega' = \omega$ и $(R_\delta^U)^* \omega = \omega$. Поэтому $f^*(R_\delta'^V)^* \omega' = (S_{-t} \circ f \circ R_\delta^U)^* \omega' = (R_\delta^U)^* f^* S_{-t}^* \omega' = (R_\delta^U)^* f^* \omega' = (R_\delta^U)^* \omega = \omega = f^* \omega'$. Так как $f: E \rightarrow E'$ – диффеоморфизм, то из доказанного следует равенство $(R_\delta'^V)^* \omega' = \omega'$.

Из предложения 2.1 вытекает ряд важных следствий. Для их компактной формулировки нам потребуются также новые определения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Рассмотрим главное расслоение ξ с проекцией $p: E \rightarrow B$ и структурной группой T^k и псевдодействие $\mathcal{R}$ группы Δ на E , ассоциированное с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. На пространстве расслоения ξ существует T^k -связность H , инвариантная относительно всех $R^U \in \mathcal{R}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – почти Δ -атлас, а $\mathcal{R}$ – многозначное действие группы Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если в обозначениях следствия 1 связность H инвариантна относительно всех $R^U \in \mathcal{R}$, то мы будем говорить, что она *инвариантна относительно многозначного действия $\mathcal{R}$ группы Δ на E* .

СЛЕДСТВИЕ 2. Предположим, что $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение и T^k -связность H на пространстве E главного расслоения ξ инвариантна относительно многозначного действия группы Δ , ассоциированного с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}'(\mathcal{U}')$ – другой атлас главного расслоения ξ , то связность H инвариантна относительно ассоциированного с ним псевдодействия группы Δ на E тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'(\mathcal{U}')$ – почти Δ -атлас и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}') \in \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $G = \Delta \times T^k$, $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение и T^k -связность H на его пространстве E инвариантна относительно многозначных действий группы Δ , ассоциированных с атласами $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Тогда H будет называться G -связностью.

СЛЕДСТВИЕ 3. Допустим, что $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ – почти Δ -расслоения, ω и ω' – формы T^k -связности H и G -связности H' на пространствах E и E' расслоений ρ и ρ' , $f: \xi \rightarrow \xi'$ – морфизм главных T^k -расслоений и $\omega = f^*\omega'$. Тогда $H - G$ -связность на E в том и только в том случае, если $f: \rho \rightarrow \rho'$ – морфизм почти Δ -расслоений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\Omega = d\omega$ – форма кривизны T^k -связности H на пространстве E главного расслоения ξ , F – замкнутая 2-форма на базе B со значениями в $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющая равенству $\Omega = p^*F$. Форма F инвариантна относительно действия группы Δ на B в том и только в том случае, если ξ обладает почти Δ -структурой, относительно которой H является G -связностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{A}$ – почти Δ -структура, относительно которой $H - G$ -связность. Рассмотрим атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и множество $U \in \mathcal{U}$. Тогда $(R_\delta^U)^*\omega = \omega$ на E_U для любого $\delta \in \Delta$. Отсюда и из (2.2) следует равенство $p^*(R_\delta^*F - F) = 0$. Последнее равносильно инвариантности F относительно R_δ .

Пусть далее дано, что $R_\delta^*F = F$ для всех $\delta \in \Delta$. Выберем (ξ, Δ) -покрытие $\mathcal{U}$ базы B , элементы которого односвязны. По определению существует ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ расслоения ξ .

Для произвольной карты $\bar{\xi}_U \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ рассмотрим сечение $\bar{\sigma}_U: U \rightarrow E_U$, определенное формулой $\bar{\sigma}_U(a) = \bar{\xi}_U(a, 0)$, и локальную форму $\bar{\omega}_U = \bar{\sigma}_U^*\omega$ связности H . Положим $\omega_U^\Delta = (1/|\Delta|) \sum_{\gamma \in \Delta} R_\gamma^* \bar{\omega}_U$. Тогда согласно допущению $d(\omega_U^\Delta - \bar{\omega}_U) = 0$. В силу равенства $H_1(U) = 0$ отсюда следует существование гладкого отображения $\mu_U: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, для которого $d\mu_U = \omega_U^\Delta - \bar{\omega}_U$. Полагая

$$\text{Exp}(r) = \text{Exp}(r^1, \dots, r^k) = (r^1 + \mathbb{Z}, \dots, r^k + \mathbb{Z}) = r + \mathbb{Z}^k$$

и $\xi_U(a, t) = \bar{\xi}_U(a, \text{Exp}(\mu_U(a)) + t)$ для $a \in U$ и $t \in T^k$, определим отображения $\text{Exp}: \mathbb{R}^k \rightarrow T^k$ и $\xi_U: U \times T^k \rightarrow E_U$. Набор $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{\xi_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ представляет собой атлас главного расслоения ξ .

По построению $\sigma_U(a) = \xi_U(a, 0) = \bar{\sigma}_U(a) \cdot (\text{Exp}(\mu_U(a)))$ и $\omega_U = \sigma_U^*\omega = \bar{\omega}_U + d\mu_U = \omega_U^\Delta$. Поэтому

$$R_\delta^* \omega_U = \omega_U \quad (2.6)$$

для любого $\delta \in \Delta$. Если $\mathcal{R}$ – псевдодействие группы Δ на E , ассоциированное с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, то для любых $R^U \in \mathcal{R}$ и $\delta \in \Delta$ имеет место равенство

$$R_\delta^U \circ \sigma_U = \sigma_U \circ R_\delta. \quad (2.7)$$

В силу (2.6) и (2.7)

$$((R_\delta^U)^*\omega - \omega) \circ d\sigma_U = 0. \quad (2.8)$$

Пусть теперь $v \in E_U$ и $X \in T_v E$. Положим $X_0 = d\sigma_U(dp(X))$ и $X_1 = X - X_0$. Тогда $((R_\delta^U)^*\omega - \omega)(X_0) = 0$ согласно (2.8), а $((R_\delta^U)^*\omega - \omega)(X_1) = 0$ в силу вертикальности вектора X_1 . В результате: $((R_\delta^U)^*\omega - \omega)(X) = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$, $\delta \in \Delta$, $v \in E_U$ и $X \in T_v E$. Это значит, что форма ω инвариантна относительно псевдодействия $\mathcal{R}$. Но тогда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – почти Δ -атлас, $\mathcal{R}$ – ассоциированное с ним многозначное действие группы Δ на пространстве расслоения ξ , а $H - G$ -связность.

Рассмотрим почти Δ -расслоения $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ с проекциями $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$, а также формы ω и ω' G -связностей H на E и H' на E' . Предположим, что существует морфизм главных расслоений $f: \xi \rightarrow \xi'$. Тогда на базе B найдется 1-форма D , удовлетворяющая равенству $f^*\omega' - \omega = p^*D$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Отображение f является морфизмом почти Δ -расслоений ρ и ρ' в том и только том случае, если форма D инвариантна относительно действия R группы Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\omega^* = f^*\omega' - \text{форма некоторой } T^k\text{-связности } H^* \text{ на } E$. По следствию 3 предложения 2.1 $f: \rho \rightarrow \rho'$ – морфизм почти Δ -расслоений тогда и только тогда, когда $H^* - G$ -связность. Последнее равносильно существованию такого атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, что ассоциированное с ним многозначное действие $\mathcal{R}$ группы Δ на E удовлетворяет равенствам $(R_\delta^U)^*\omega^* = \omega^*$ при всех $U \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$. Так как форма ω инвариантна относительно всех R_δ^U , предыдущее верно в том и только в том случае, если $(R_\delta^U)^*p^*D = p^*D$. В силу (2.2) полученное равенство имеет место тогда и только тогда, когда $p^*(R_\delta^*D - D) = 0$. Последнее эквивалентно инвариантности формы D относительно R_δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$. Тогда $[\rho] = 0$ в $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$ в том и только в том случае, если на E существует G -связность с тривиальной группой голономии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $H - G$ -связность на E с тривиальной группой голономии. Зафиксируем точки $v \in E$ и $b = p(v)$. Для произвольной точки $a \in B$ выберем кусочно-гладкий путь $x: I \rightarrow B$ с началом $x(0) = b$ и концом $x(1) = a$ и рассмотрим его горизонтальный лифт $\bar{x}: I \rightarrow E$ с начальной точкой $\bar{x}(0) = v$. Положим $\sigma(a) = \bar{x}(1)$. Этим определено гладкое сечение $\sigma: B \rightarrow E$ расслоения ξ .

Пусть $\delta \in \Delta$, $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, $U \in \mathcal{U}$ и KU – компонента связности множества U . Выберем произвольные точки $a_0, b_0 \in KU$ и положим $a_1 = a_0 \cdot \delta$, $b_1 = b_0 \cdot \delta$. Если $x_i, y_i: I \rightarrow B$ – кусочно-гладкие пути с общим началом b и концами $x_i(1) = a_i$, $y_i(1) = b_i$, $i = 0, 1$, а $\bar{x}_i, \bar{y}_i: I \rightarrow E$ – их горизонтальные лифты с начальной точкой v , то $\bar{x}_i(1) = \sigma(a_i)$, $\bar{y}_i(1) = \sigma(b_i)$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим кусочно-гладкий путь $z_0: I \rightarrow KU$ с началом a_0 и концом b_0 . Тогда путь $z_1 = z_0 \cdot \delta$ лежит в U и идет из точки a_1 в точку b_1 . Пусть $\bar{z}_0: I \rightarrow E$ – горизонтальный лифт пути z_0 с началом $\bar{z}_0(0) = \bar{x}_0(1) = \sigma(a_0)$. При этом $\bar{x}_0 + \bar{z}_0$ – горизонтальный лифт пути $x_0 + z_0$ и $(\bar{x}_0 + \bar{z}_0)(0) = v$. Следовательно, $\bar{z}_0(1) = (\bar{x}_0 + \bar{z}_0)(1) = \sigma(b_0)$.

Положим $\bar{z}_\delta = R_\delta^U \circ \bar{z}_0$. Так как H – G -связность и $p \circ R_\delta^U \circ \bar{z}_0 = R_\delta \circ p \circ \bar{z}_0 = z_1$, то $\bar{z}_\delta$ – горизонтальный лифт пути z_1 . Кроме того, найдется такой элемент $t_{KU} \in T^k$, что $\bar{z}_\delta(0) \cdot t_{KU} = \sigma(a_1)$. При этом путь $\bar{z}_1 = \bar{z}_\delta \cdot t_{KU}$ также является горизонтальным лифтом пути z_1 и имеет начало $\bar{z}_1(0) = \bar{x}_1(1) = \sigma(a_1)$. Следовательно, $\bar{x}_1 + \bar{z}_1$ – горизонтальный лифт пути $x_1 + z_1$ и потому $\bar{z}_1(1) = (\bar{x}_1 + \bar{z}_1)(1) = \sigma(b_1)$.

По построению $\sigma(a_1) = \sigma(R_\delta(a_0))$ и $\sigma(b_1) = \sigma(R_\delta(b_0))$. Кроме того, $\sigma(a_1) = \bar{z}_1(0) = (R_\delta^U \circ \bar{z}_0(0)) \cdot t_{KU} = (R_\delta^U \circ \bar{x}_0(1)) \cdot t_{KU} = (R_\delta^U(\sigma(a_0))) \cdot t_{KU}$. Согласно доказанному $\sigma(b_1) = \bar{z}_1(1) = (R_\delta^U \circ \bar{z}_0(1)) \cdot t_{KU} = (R_\delta^U \circ \bar{y}_0(1)) \cdot t_{KU} = (R_\delta^U(\sigma(b_0))) \cdot t_{KU}$. Таким образом, для всех $a \in KU$ верно равенство

$$(\sigma \circ R_\delta)(a) = (R_\delta^U \circ \sigma)(a) \cdot t_{KU}. \quad (2.9)$$

Определим отображение $f: B \times T^k \rightarrow E$ формулой $f(a, t) = \sigma(a) \cdot t$. Тогда f – морфизм главных расслоений ξ_0 и ξ . Покажем, что он является морфизмом почти Δ -расслоений ρ_0 и ρ . Для этого выберем атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, карту $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и рассмотрим функцию перехода $\zeta_U: U \rightarrow T^k$ от карты $\text{id}_{B \times T^k}$ расслоения ξ_0 к карте ξ_U . Для компоненты KU множества U и произвольных $a \in KU$ и $t \in T^k$ справедливы равенства $f(a, t) = \xi_U(a, \zeta_U(a) + t)$ и $f(a \cdot \delta, t) = \xi_U(a \cdot \delta, \zeta_U(a \cdot \delta) + t)$. Поэтому $\xi_U(a \cdot \delta, \zeta_U(a \cdot \delta) + t) = \sigma(a \cdot \delta) \cdot t$. Согласно (2.9) и (2.1) $\sigma(a \cdot \delta) \cdot t = (R_\delta^U \circ \sigma)(a) \cdot (t_{KU} + t) = R_\delta^U \circ \xi_U(a, \zeta_U(a) + t) \cdot t_{KU} = \xi_U(a \cdot \delta, \zeta_U(a) + t + t_{KU})$. Из полученных равенств следует, что $\zeta_U(a \cdot \delta) = \zeta_U(a) + t_{KU}$ для всех $a \in KU$. Последнее означает, что разность $\zeta_U \circ R_\delta - \zeta_U$ локально постоянна, а $f: \rho_0 \rightarrow \rho$ – морфизм почти Δ -расслоений.

В обратную сторону утверждение предложения очевидно.

3. Характеристические классы. Если Φ – замкнутая n -форма на многообразии B со значениями в $\mathbb{R}^k$, а $[\Phi]$ – ее когомологический класс, то формула $I_{[\Phi]}([c]) = \int_c \Phi$ определяет гомоморфизм $I_{[\Phi]}: H_n(B) \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Обозначим символом $\Lambda_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k)$ группу инвариантных относительно действия группы Δ внешних n -форм на B со значениями в $\mathbb{R}^k$, а символом $H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k)$ – группу гомологий коцепного комплекса

$$\dots \rightarrow \Lambda_\Delta^{n-1}(B, \mathbb{R}^k) \xrightarrow{d} \Lambda_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k) \xrightarrow{d} \Lambda_\Delta^{n+1}(B, \mathbb{R}^k) \rightarrow \dots$$

Положим

$$H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k) = \{[\Phi]_\Delta \in H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k) \mid \text{im } I_{[\Phi]} \subset \mathbb{Z}^k\}.$$

Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$ и ω – форма G -связности H на E . Тогда существует замкнутая 2-форма F на B , удовлетворяющая равенству $d\omega = p^*F$. Согласно предложению 2.2 $F \in \Lambda_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k)$. Так как ξ – главное расслоение со структурной группой T^k , а H – T^k -связность, то $\text{im } I_{[F]} \subset \mathbb{Z}^k$.

Если $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ – другое почти Δ -расслоение с проекцией $p': E' \rightarrow B$, ω' – форма G -связности H' на E' , F' – замкнутая 2-форма на B , $d\omega' = p'^*F'$ и $f: \rho \rightarrow \rho'$ – морфизм,

то по предложению 2.3 $f^*\omega' = \omega + p^*D$, где $D \in \Lambda_\Delta^1(B, \mathbb{R}^k)$. При этом $[F']_\Delta = [F]_\Delta$. Таким образом, когомологический класс $[F]_\Delta$ является инвариантом расслоения ρ в категории $\mathcal{K}(B, T^k, \Delta, R)$. Как обычно, он будет называться характеристическим классом почти Δ -расслоения $\rho = (\xi, \mathcal{A})$. При этом формула $\eta([\rho]) = [F]_\Delta$ определяет гомоморфизм $\eta: \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R) \rightarrow H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k | \mathbb{Z}^k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для гомоморфизма η существует правый обратный гомоморфизм $\bar{\eta}: H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k | \mathbb{Z}^k) \rightarrow \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – замкнутая и инвариантная относительно действия группы Δ 2-форма на B и

$$[F]_\Delta \in H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k | \mathbb{Z}^k). \quad (3.1)$$

Для многообразия B найдется (см., например, [5, гл. III, п. 6]) открытое Δ -покрытие $\mathcal{U}$, обладающее свойствами

- (1) $H_1(U) = 0$ и $H_2(U) = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$;
- (2) $H_1(V \cap U) = 0$ для любых $U, V \in \mathcal{U}$.

Зафиксируем точку $b \in B$. Для любого $U \in \mathcal{U}$ выберем 1-форму ω_U на U , удовлетворяющую равенству $d\omega_U = F|_U$. В каждой компоненте связности KU множества U зафиксируем точку a_{KU} . Символом $x_{KU}: I \rightarrow B$ обозначим некоторый путь с началом $x_{KU}(0) = b$ и концом $x_{KU}(1) = a_{KU}$. Для произвольной точки $a \in KU$ зафиксируем путь $y_{KU}^a: I \rightarrow KU$ с началом $y_{KU}^a(0) = a_{KU}$ и концом $y_{KU}^a(1) = a$.

Рассмотрим далее компоненту связности $K(VU)$ пересечения $V \cap U \neq \emptyset$ для некоторых $U, V \in \mathcal{U}$. Найдутся такие компоненты связности KU и KV множеств U и V , что $K(VU) \subset KV \cap KU$. Поэтому для любой точки $a \in K(VU)$ определена петля

$$x_{K(VU)}^a = x_{KV} + y_{KV}^a - y_{KU}^a - x_{KU}.$$

Пусть $\mathcal{Z}_n(B)$ и $\mathcal{B}_n(B)$ – группы n -мерных сингулярных циклов и границ многообразия B с целыми коэффициентами. Если $x \in \mathcal{B}_1(B)$, то имеется сингулярная 2-цепь c_x с границей $\partial c_x = x$. Положим

$$h_0(x) = \text{Exp} \left(\int_{c_x} F \right), \quad (3.2)$$

где $\text{Exp}: \mathbb{R}^k \rightarrow T^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ – фактор-отображение, определенное ранее в доказательстве предложения 2.2. Если c'_x – другая 2-цепь с той же границей $\partial c'_x = x$, то $c'_x - c_x \in \mathcal{Z}_2(B)$. В силу (3.1) $\text{Exp}(\int_{c'_x - c_x} F) = 0$, где нуль в правой части обозначает нейтральный элемент аддитивной группы T^k . Отсюда следует, что формула (3.2) корректно определяет гомоморфизм $h_0: \mathcal{B}_1(B) \rightarrow T^k$. Так как $\text{Ext}(H_1(B), T^k) = 0$, то для него существует продолжение $h: \mathcal{Z}_1(B) \rightarrow T^k$.

Полагая для каждой компоненты $K(VU)$ множества $V \cap U$ и произвольной точки $a \in K(VU)$

$$\xi_{VU}(a) = h(x_{K(VU)}^a) - \text{Exp} \left(\int_{y_{KV}^a} \omega_V \right) + \text{Exp} \left(\int_{y_{KU}^a} \omega_U \right), \quad (3.3)$$

мы определим отображение $\xi_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$.

Зафиксируем точку $a_{K(VU)} \in K(VU)$ и рассмотрим путь $z: I \rightarrow K(VU)$ с началом $z(0) = a_{K(VU)}$ и концом $z(1) = a$. Положим $y_{KU} = y_{KU}'$, $y_{KV} = y_{KV}'$ и $x_{K(VU)} = x_{K(VU)}'$ при $a' = a_{K(VU)}$. Пусть также

$$z_{KU}^a = x_{KU} + y_{KU} + z - y_{KU}^a - x_{KU}, \quad z_{KV}^a = x_{KV} + y_{KV} + z - y_{KV}^a - x_{KV}.$$

Тогда $x_{K(VU)}^a = -z_{KV}^a + x_{K(VU)} + z_{KU}^a$ и потому

$$h(x_{K(VU)}^a) = -h(z_{KV}^a) + h(x_{K(VU)}) + h(z_{KU}^a).$$

По свойству (1) покрытия $\mathcal{U}$ циклы z_{KU}^a и z_{KV}^a являются границами. Следовательно, $h(z_{KU}^a) = h_0(z_{KU}^a)$ и $h(z_{KV}^a) = h_0(z_{KV}^a)$. При этом

$$h(x_{K(VU)}^a) - h(x_{K(VU)}) = \text{Exp} \left(\int_{y_{KU} + z - y_{KU}^a} \omega_U - \int_{y_{KV} + z - y_{KV}^a} \omega_V \right).$$

Отсюда и из (3.3) получим

$$\xi_{VU}(a) - \xi_{VU}(a_{K(VU)}) = \text{Exp} \left(\int_z (\omega_U - \omega_V) \right). \quad (3.4)$$

Это значит, что отображение $\xi_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ дифференцируемо и

$$\theta \circ d\xi_{VU} = \omega_U - \omega_V, \quad (3.5)$$

где θ – каноническая 1-форма на группе T^k со значениями в ее алгебре Ли $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим произвольный элемент $\delta \in \Delta$. Так как $\mathcal{U}$ – Δ -покрытие, то множество $K'(VU) = R_\delta(K(VU))$ также представляет собой компоненту связности пересечения $V \cap U$. Выберем пути $z_1: I \rightarrow K'(VU)$ и $z_2: I \rightarrow K'(VU)$ с общим началом $z_1(0) = z_2(0) = a_{K'(VU)}$ и концами $z_1(1) = a \cdot \delta$ и $z_2(1) = a_{K(VU)} \cdot \delta$. Тогда согласно (3.4)

$$\begin{aligned} \xi_{VU}(a \cdot \delta) - \xi_{VU}(a_{K'(VU)}) &= \text{Exp} \left(\int_{z_1} (\omega_U - \omega_V) \right), \\ \xi_{VU}(a_{K(VU)} \cdot \delta) - \xi_{VU}(a_{K'(VU)}) &= \text{Exp} \left(\int_{z_2} (\omega_U - \omega_V) \right). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\xi_{VU}(a \cdot \delta) - \xi_{VU}(a_{K(VU)} \cdot \delta) = \text{Exp} \left(\int_{-z_2 + z_1} (\omega_U - \omega_V) \right). \quad (3.6)$$

Путь $-z_2 + z_1$ лежит в $K'(VU)$ и идет из точки $a_{K(VU)} \cdot \delta$ в точку $a \cdot \delta$. Точно такими же свойствами обладает и путь $z' = R_\delta \circ z$. Так как $d(\omega_U - \omega_V) = 0$, $H_1(K'(VU)) = 0$, $R_\delta^* \omega_U = \omega_U$ и $R_\delta^* \omega_V = \omega_V$, то

$$\int_{-z_2 + z_1} (\omega_U - \omega_V) = \int_{z'} (\omega_U - \omega_V) = \int_z (\omega_U - \omega_V).$$

Отсюда, из (3.6) и (3.4) следует, что

$$\xi_{VU}(a \cdot \delta) - \xi_{VU}(a) = \xi_{VU}(a_{K(VU)} \cdot \delta) - \xi_{VU}(a_{K(VU)}). \quad (3.7)$$

Если U, V, W – элементы покрытия $\mathcal{U}$ и $K(WVU)$ – компонента связности пересечения $W \cap V \cap U$, то найдутся такие компоненты KU, KV и KW множеств U, V и W , что $K(WVU) \subset K(W) \cap K(V) \cap K(U)$. При этом согласно (3.3) для произвольной точки $a \in K(WVU)$ имеет место равенство

$$\xi_{UW}(a) + \xi_{WV}(a) + \xi_{VU}(a) = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует существование главного расслоения ξ с базой B и структурной группой T^k , обладающего атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, ассоциированным с покрытием $\mathcal{U}$ и имеющим функции перехода $\{\xi_{VU} \mid V, U \in \mathcal{U}\}$. В силу (3.7) отображения $\tau_{VU}^\delta = \xi_{VU} \circ R_\delta - \xi_{VU}$ из $V \cap U$ в T^k локально постоянны для всех $V, U \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$, и $\delta \in \Delta$. Поэтому $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – почти Δ -атлас. Пусть $\mathcal{A}$ – класс эквивалентности атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Положим $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и

$$\bar{\eta}([F]_\Delta) = [\rho]. \quad (3.9)$$

Заменив в предыдущих построениях форму F формой $\tilde{F} = F + dA$, где A – инвариантная относительно Δ 1-форма на B , получим гладкие отображения $\tilde{\xi}_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$, удовлетворяющие равенству

$$\tilde{\xi}_{VU}(a) - \xi_{VU}(a) = \text{Exp} \left(\int_{x_{KV}} A \right) - \text{Exp} \left(\int_{x_{KU}} A \right).$$

При этом соответствующее набору $\{\tilde{\xi}_{VU} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$ почти Δ -расслоение $\tilde{\rho}$ будет изоморфно расслоению ρ . Следовательно, формула (3.9) корректно определяет отображение $\bar{\eta}: H^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k) \rightarrow \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$.

В силу (3.5) на пространстве расслоения ρ существует G -связность H с набором локальных форм связности $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. По построению $F|_U = d\omega_U$ – проекция на базу B формы кривизны $d\omega$ связности H . Таким образом, $\eta[\rho] = [F]_\Delta$ и $\eta \circ \bar{\eta} = \text{id}$.

Если все построения осуществить для форм F, F' и $F'' = F + F'$, где $[F], [F'] \in H^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k)$, то получатся почти Δ -расслоения ρ, ρ' и ρ'' , имеющие почти Δ -атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}''(\mathcal{U})$ с функциями перехода $\{\xi_{VU}\}$, $\{\xi'_{VU}\}$ и $\{\xi''_{VU} = \xi_{VU} + \xi'_{VU}\}$. Это значит, что $[\rho] + [\rho'] = [\rho'']$, а $\bar{\eta}$ – гомоморфизм.

4. Почти Δ -расслоения с нулевым характеристическим классом. Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение с характеристическим классом $[\bar{F}]_\Delta = 0$. Рассмотрим его проекцию $p: E \rightarrow B$ и G -связность $\bar{H}$, для которой форма связности $\bar{\omega}$ удовлетворяет равенству $d\bar{\omega} = p^*\bar{F}$. Тогда $\bar{F} = dA$, где A – инвариантная относительно Δ 1-форма на B со значениями в пространстве $\mathbb{R}^k$. При этом согласно предложению 2.3 $\omega = \bar{\omega} - p^*A$ – форма G -связности на E и $d\omega = 0$. Таким образом, для почти Δ -расслоения ρ включение $[\rho] \in \ker \eta$ эквивалентно существованию на его пространстве плоской G -связности H .

Предположим, что $x: I \rightarrow B$ – кусочно-гладкая петля, а $\bar{x}: I \rightarrow E$ ее горизонтальный лифт относительно плоской G -связности H . Тогда найдется элемент $\tau_H(x) \in T^k$, удовлетворяющий равенству $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H(x)$. Согласно [4] элемент $\tau_H(x)$ зависит только от гомологического класса цикла $x \in \mathcal{X}_1(B)$. Кроме того, $\tau_H(x + y) = \tau_H(x) + \tau_H(y)$ и $\tau_H(-x) = -\tau_H(x)$. Следовательно, формула $\tau_H([x]) = \tau_H(x)$ корректно определяет гомоморфизм $\tau_H: H_1(B) \rightarrow T^k$, который мы называем гомоморфизмом голономии связности H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ – почти Δ -расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$, H и H^* – плоские G -связности на E , ω и ω^* – их формы связности. Тогда $\omega^* = \omega + p^*A$, где $A \in \mathcal{F}_\Delta^1(B, \mathbb{R}^k)$, и $\tau_{H^*} = \tau_H - \text{Exp} \circ I_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и инвариантность формы A относительно Δ следуют из предложения 2.3, ее замкнутость – из равенств $d\omega = d\omega^* = 0$.

Рассмотрим петлю $x: I \rightarrow B$ и ее горизонтальные лифты $\bar{x}: I \rightarrow E$ и $\bar{x}^*: I \rightarrow E$ относительно связностей H и H^* . Тогда найдется такой кусочно-гладкий путь $r: I \rightarrow \mathbb{R}^k$, что $\bar{x}^* = \bar{x} \cdot (\text{Exp} \circ r)$. При этом

$$\omega^* \left(\frac{d\bar{x}^*}{ds} \right) = \omega \left(\frac{d\bar{x}}{ds} \right) + \frac{dr}{ds} + A \left(\frac{dx}{ds} \right).$$

Из полученного равенства следует, что $dr/ds = -A(dx/ds)$ или

$$r(1) - r(0) = - \int_x A. \quad (4.1)$$

По построению пути r и гомоморфизма τ_H имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(1) &= \bar{x}(1) \cdot (\text{Exp}(r(1))) = \bar{x}(0) \cdot (\tau_H([x]) + \text{Exp}(r(1))) \\ &= \bar{x}^*(0) \cdot (\text{Exp}(-r(0)) + \tau_H([x]) + \text{Exp}(r(1))). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\bar{x}^*(1) = \bar{x}^*(0) \cdot \tau_{H^*}([x])$. Таким образом, $\tau_H([x]) + \text{Exp}(r(1) - r(0)) = \tau_{H^*}([x])$. В силу (4.1) последнее влечет за собой доказываемое равенство.

Пусть для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Hom}^\Delta(H_n(B), \mathbb{R}^k) = \{h \in \text{Hom}(H_n(B), \mathbb{R}^k) \mid h([x \cdot \delta]) = h([x]) \forall \delta \in \Delta\}.$$

Для $[F]_\Delta \in H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k)$, $[F] \in H^n(B, \mathbb{R}^k)$ и $[c] \in H_n(B)$ положим

$$I_\Delta([F]_\Delta) = I_{[F]}. \quad (4.2)$$

ЛЕММА. *Отображение $I_\Delta: H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Hom}^\Delta(H_n(B), \mathbb{R}^k)$, определенное формулой (4.2), является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения I_Δ и его гомоморфность очевидны.

Если $I_\Delta([F]_\Delta) = 0$, то согласно теореме Де Рама $F = dA$, где $A \in \Lambda^{n-1}(B, \mathbb{R}^k)$. Полагая $\hat{A} = (1/|\Delta|) \sum_{\delta \in \Delta} R_\delta^* A$, получим форму $\hat{A} \in \Lambda_\Delta^{n-1}(B, \mathbb{R}^k)$. Легко видеть, что $d\hat{A} = F$. Следовательно, $[F]_\Delta = 0$ в $H_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k)$ и $\ker I_\Delta = 0$.

Пусть далее $h \in \text{Hom}^\Delta(H_n(B), \mathbb{R}^k)$. По той же теореме Де Рама гомоморфизму h соответствует форма $\Phi \in \mathcal{Z}^n(B, \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющая равенству $\int_c \Phi = h([c])$ для всех $[c] \in H_n(B)$. Положим, как и выше, $F = (1/|\Delta|) \sum_{\delta \in \Delta} R_\delta^* \Phi$. Тогда $F \in \mathcal{Z}_\Delta^n(B, \mathbb{R}^k)$ и

$$\int_c F = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} \int_{c \cdot \delta} \Phi = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} h([c \cdot \delta]) = h([c]).$$

Поэтому $I_\Delta([F]_\Delta) = h$ и гомоморфизм I_Δ сюръективен.

Для почти Δ -расслоения ρ с нулевым характеристическим классом и плоской G -связности H на его пространстве рассмотрим гомоморфизм голономии $\tau_H \in \text{Hom}(H_1(B), T^k)$ и гомоморфизм $\text{Exp}_*^\Delta: \text{Hom}^\Delta(H_1(B), \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Hom}(H_1(B), T^k)$, определенный формулой $\text{Exp}_*^\Delta(h) = \text{Exp} \circ h$. Положим

$$\eta_0([\rho]) = \tau_H + \text{im } \text{Exp}_*^\Delta. \quad (4.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Формула (4.3) корректно определяет отображение

$$\eta_0: \ker \eta \rightarrow \text{Hom}(H_1(B), T^k) / \text{im } \text{Exp}_*^\Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ и ρ' — почти Δ -расслоения, H и H' — плоские G -связности на их пространствах, ω и ω' — формы связностей H и H' . Если $f: \rho \rightarrow \rho'$ — морфизм, то $\omega^* = f^* \omega'$ — форма некоторой плоской G -связности H^* на пространстве расслоения ρ . При этом $\tau_{H^*} = \tau_{H'}$ и справедливы все утверждения предложения 4.1. В такой ситуации для любых $[x] \in H_1(B)$ и $\delta \in \Delta$

$$I_{[A]}([x \cdot \delta]) = \int_{x \cdot \delta} A = \int_x R_\delta^* A = \int_x A = I_{[A]}([x]).$$

Следовательно, $\text{Exp} \circ I_{[A]} \in \text{im } \text{Exp}_*^\Delta$ и потому смежные классы $\tau_H + \text{im } \text{Exp}_*^\Delta$ и $\tau_{H'} + \text{im } \text{Exp}_*^\Delta$ совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Рассмотрим почти Δ -расслоение $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ с проекцией $p: E \rightarrow B$, плоскую G -связность H на его пространстве E и гомоморфизм голономии $\tau_H: H_1(B) \rightarrow T^k$. Тогда существует почти Δ -атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, обладающий свойствами

- (1) локальные формы ω_U связности H тождественно равны нулю для всех $U \in \mathcal{U}$;
- (2) функции перехода ξ_{VU} локально постоянны для любых $U, V \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$.

При этом если $x: I \rightarrow B$ — петля, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = 1$ — разбиение отрезка $I = [0, 1]$, $KU_1, \dots, KU_l$ — компоненты связности элементов покрытия $\mathcal{U}$, удовлетворяющие условиям $x([s_{i-1}, s_i]) \subset KU_i$, и $a_i = x(s_i)$, то

$$\tau_H([x]) = \xi_{U_1 U_l}(a_l) + \xi_{U_l U_{l-1}}(a_{l-1}) + \dots + \xi_{U_2 U_1}(a_1). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим покрытие $\mathcal{U}$ базы B с теми же свойствами, что и в предложении 3.1. Пусть $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ – ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас из $\mathcal{A}$, $\{\hat{\xi}_{VU}\}$ – ее система функций перехода, а $\{\hat{\omega}_U\}$ – соответствующий набор локальных форм связности H . По условию на связность и по выбору покрытия для всех $U \in \mathcal{U}$ найдутся функции $\hat{\phi}_U: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, удовлетворяющие равенству $d\hat{\phi}_U = \hat{\omega}_U$. Положим $\phi_U = \text{Exp} \circ \hat{\phi}_U$ и

$$\xi_U(a, t) = \hat{\xi}_U(a, t) \cdot (-\phi_U(a)) \quad (4.5)$$

для карт $\hat{\xi}_U \in \hat{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$, точек $a \in U$ и элементов $t \in T^k$. Этим определены карты $\xi_U: U \times T^k \rightarrow E_U$ расслоения ξ .

Если $U, V \in \mathcal{U}$ и $V \cap U \neq \emptyset$, то $\xi_{VU} = \phi_V + \hat{\xi}_{VU} - \phi_U$ – функция перехода от карты ξ_U к карте ξ_V . Согласно (2.6) формы $\hat{\omega}_U \circ dR_\delta - \hat{\omega}_U$ тождественно равны нулю. Следовательно, $\phi_U \circ R_\delta - \phi_U$ – локально постоянное отображение для всех $U \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$. А это значит, что $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{\xi_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ – почти Δ -атлас и $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим локальные формы ω_U связности H относительно атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. В силу (4.5) $\hat{\omega}_U = \omega_U + d\hat{\phi}_U$. По построению отображения $\hat{\phi}_U$ отсюда следует, что $\omega_U \equiv 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$.

Для любых $U, V \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$, в силу (3.5) и согласно доказанному $d\xi_{VU} \equiv 0$. Поэтому функции перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ локально постоянны.

Пусть $\bar{x}: I \rightarrow E$ – горизонтальный лифт петли x относительно H . В силу равенства нулю локальных форм связности существуют такие элементы $t_i \in T^k$, что

$$\bar{x}(s) = \xi_{U_i}(x(s), t_i) \quad (4.6)$$

для всех $s \in [s_{i-1}, s_i]$ и $i = 1, \dots, l$. Так как $a_i \in KU_{i-1} \cap KU_i$, из (4.6) следуют равенства $\bar{x}(s_i) = \xi_{U_{i-1}}(a_i, t_{i-1}) = \xi_{U_i}(a_i, t_i)$. Поэтому $t_i = \xi_{U_i U_{i-1}}(a_i) + t_{i-1}$. Применяя эту рекуррентную формулу и (4.6), получим

$$\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot (\xi_{U_1 U_l}(a_l) + \xi_{U_l U_{l-1}}(a_{l-1}) + \dots + \xi_{U_2 U_1}(a_1)).$$

Последнее равносильно (4.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Отображение η_0 является гомоморфизмом групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим почти Δ -расслоения ρ и ρ' , для которых $[\rho], [\rho'] \in \ker \eta$, и плоские G -связности H и H' на их пространствах. Для некоторого покрытия $\mathcal{U}$ базы B найдутся почти Δ -атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ этих расслоений, обладающие свойствами из предложения 4.3. Пусть $\{\xi_{VU}\}$ и $\{\xi'_{VU}\}$ – системы функций перехода атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$. Согласно определению сложения в группе $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$ некоторое почти Δ -расслоение $\rho'' \in [\rho] + [\rho']$ обладает набором функций перехода $\{\xi''_{VU}\}$, где $\xi''_{VU} = \xi_{VU} + \xi'_{VU}$. При этом на пространстве расслоения ρ'' существует G -связность H'' с локальными формами связности $\{\omega''_U \equiv 0\}$. Но тогда для произвольной петли $x: I \rightarrow B$ и гомоморфизмов голономии $\tau_H, \tau_{H'}$ и $\tau_{H''}$ имеют место формулы вида (4.4). Следовательно, $\tau_{H''} = \tau_H + \tau_{H'}$ и $\eta_0([\rho'']) = \eta_0([\rho]) + \eta_0([\rho'])$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Гомоморфизм η_0 сюръективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент $e = \tau + \text{im Exp}_*^\Delta$, где $\tau \in \text{Hom}(H_1(B), T^k)$. Выберем точку $b \in B$ и покрытие $\mathcal{U}$ многообразия B такое же, что и в предложении 3.1. Точно так, как в предложении 3.1, для компонент связности $K(VU)$ пересечений $V \cap U$ множеств $U, V \in \mathcal{U}$ и точек $a \in K(VU)$ построим петли $x_{K(VU)}^a: I \rightarrow B$. Положим

$$\xi_{VU}(a) = \tau(-[x_{K(VU)}^a]). \quad (4.7)$$

По выбору покрытия $\mathcal{U}$ для любых $a, a' \in K(VU)$ циклы $x_{K(VU)}^a$ и $x_{K(VU)}^{a'}$ гомологичны. Следовательно, $\xi_{VU}: V \cap U \rightarrow T^k$ — гладкое локально постоянное отображение. При этом для каждого $\delta \in \Delta$ разность $\xi_{VU} \circ R_\delta - \xi_{VU}$ также является локально постоянным отображением из $V \cap U$ в T^k .

Если $U, V, W \in \mathcal{U}$ и $a \in W \cap V \cap U$, то имеет место равенство (3.8). Поэтому существует почти Δ -расслоение $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$, имеющим систему функций перехода $\{\xi_{VU}\}$. Поскольку набор 1-форм $\{\omega_U \equiv 0\}$ удовлетворяет условию (3.5), на пространстве расслоения ρ имеется G -связность H с локальными формами связности $\{\omega_U\}$.

Рассмотрим петлю $x: I \rightarrow B$, разбиение $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = 1$ отрезка I и компоненты связности $KU_1, \dots, KU_l$ множеств из $\mathcal{U}$ такие, что $x([s_{i-1}, s_i]) \subset KU_i$. Положим $a_i = x(s_i)$. Тогда по предложению 4.3 справедливо равенство (4.4). Отсюда в силу (4.7) следует, что

$$\tau_H([x]) = \tau(-[x_{U_1 U_l}^{a_l} + x_{U_l U_{l-1}}^{a_{l-1}} + \dots + x_{U_2 U_1}^{a_1}]). \quad (4.8)$$

Поскольку петли $-(x_{U_1 U_l}^{a_l} + x_{U_l U_{l-1}}^{a_{l-1}} + \dots + x_{U_2 U_1}^{a_1})$ и x гомологичны, (4.8) эквивалентно равенству $\tau_H([x]) = \tau([x])$. Этим доказано, что $\tau_H = \tau$ и $\eta_0([\rho]) = e$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Ядро $\ker \eta_0$ состоит только из нейтрального элемента группы $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ — почти Δ -расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$, обладающее плоской G -связностью H на его пространстве E , и $\eta_0([\rho]) = 0$. Тогда существует гомоморфизм $\bar{\tau} \in \text{Hom}^\Delta(H_1(B), \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющий равенству $\tau_H = \text{Exp} \circ \bar{\tau}$. В силу доказанной выше леммы ему соответствует такая форма $A \in \mathcal{Z}_\Delta^1(B, \mathbb{R}^k)$, что $I_\Delta([A]_\Delta) = \bar{\tau}$.

Рассмотрим форму ω связности H и положим $\hat{\omega} = \omega + p^* A$. Тогда по предложению 2.3 $\hat{\omega}$ — форма некоторой G -связности $\hat{H}$ на E . Согласно предложению 4.1, построению формы A и определению (4.2) $\tau_{\hat{H}} = \tau_H - \text{Exp} \circ I_{[A]} = \text{Exp} \circ (\bar{\tau} - I_{[A]}) = 0$. Таким образом, группа голономии G -связности $\hat{H}$ тривиальна. Отсюда по предложению 2.4 вытекает, что $[\rho] = 0$ в группе $\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$.

5. Основной результат. Примеры. Приложения. Пусть $\eta: \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R) \rightarrow H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k)$ — гомоморфизм, построенный перед предложением 3.1, im Exp_*^Δ — образ естественного гомоморфизма $\text{Exp}_*^\Delta: \text{Hom}^\Delta(H_1(B), \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Hom}(H_1(B), T^k)$, а $\eta_0: \ker \eta \rightarrow \text{Hom}(H_1(B), T^k) / \text{im Exp}_*^\Delta$ — гомоморфизм, определенный формулой (4.3). Согласно предложениям 4.4, 4.5 и 4.6 η_0 — изоморфизм. Рассмотрим включение $\iota: \ker \eta \rightarrow \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R)$ и положим $\zeta = \iota \circ \eta_0^{-1}$. Тогда из предложения 3.1 следует, что справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. *Последовательность групп и гомоморфизмов*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_1(B), T^k) / \text{im Exp}_*^\Delta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R) \xrightarrow{\eta} H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k) \rightarrow 0$$

точна и расщепляется. Поэтому

$$\mathcal{B}(B, T^k, \Delta, R) \cong H_\Delta^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Hom}(H_1(B), T^k) / \text{im Exp}_*^\Delta.$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим сферу $B = S^2 = \{r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \mid u \in [-\pi/2, \pi/2], v \in [0, 2\pi]\}$ и группы $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\Delta = \mathbb{Z}_n$. Определим действие $R: B \times \Delta \rightarrow B$, полагая

$$R_{[j]}(r(u, v)) = r\left(u, v + \frac{2\pi j}{n}\right) \quad (5.1)$$

для $[j] = j + \mathbb{Z}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Геометрически $R_{[j]}$ есть поворот сферы на угол $2\pi j/n$ вокруг прямой $(0, 0) \times \mathbb{R}$. Пространство орбит B/Δ является орбиобразом с двумя коническими точками и гомеоморфно сфере S^2 .

Так как преобразования $R_{[j]}$ сохраняют ориентацию, то они индуцируют тождественное преобразование группы $H_2(B)$. Поэтому $H_\Delta^2(B, \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}) \cong H^2(B, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. В силу односвязности сферы $\text{Hom}(H_1(B), T^1) / \text{im Exp}_*^\Delta = 0$. Отсюда и из теоремы 5.1 следует, что $\mathcal{B}(B, T^1, \Delta, R) \cong \mathbb{Z} \cong \mathcal{B}(B, T^1)$, где $\mathcal{B}(B, T^1)$ – группа классов эквивалентности главных расслоений с базой B и структурной группой T^1 .

Как известно, произвольное такое расслоение имеет вид $\xi = t\chi$, где $t \in \mathbb{Z}$, а χ – расслоение Хопфа. Простейший его атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ определяется покрытием $\mathcal{U}$, состоящим из множеств $U = \{r(u, v) \in B \mid u \in (-\pi/4, \pi/2]\}$ и $V = \{r(u, v) \in B \mid u \in [-\pi/2, \pi/4]\}$, а также функцией перехода $\xi_{VU}(r(u, v)) = mv/2\pi + \mathbb{Z}$. Если точка $w = r(u, v)$ лежит в пересечении $E_U \cap E_V$, то согласно (5.1)

$$\xi_{VU}(R_{[j]}(w)) = \frac{m}{2\pi} \left(v + \frac{2\pi j}{n} \right) + \mathbb{Z} = \frac{mv}{2\pi} + \frac{mj}{n} + \mathbb{Z},$$

при этом $\tau_{[j]}^{VU}(w) = \xi_{VU}(R_{[j]}(w)) - \xi_{VU}(w) = mj/n + \mathbb{Z}$.

Так как правая часть полученного равенства от точки w не зависит, то $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – искомый почти Δ -атлас. Согласно доказанному выше любой другой почти Δ -атлас расслоения ξ эквивалентен $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. С другой стороны, $\tau_{[j]}^{VU} = 0$ в T^1 в том и только в том случае, если $m \equiv 0 \pmod n$.

ВЫВОДЫ. Для действия (5.1)

- (1) *главное расслоение $\xi = t\chi$ допускает (причем единственную) структуру почти Δ -расслоения при любом $t \in \mathbb{Z}$;*
- (2) *структурой, инвариантной относительно Δ , оно обладает тогда и только тогда, когда характеристическое число t нацело делится на порядок n группы Δ .*

ПРИМЕР 2. Пусть теперь $B = T^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ и $\Delta = \mathbb{Z}_2$. Действие $R: B \times \Delta \rightarrow B$ определим формулой

$$R_{[j]}(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = ((-1)^j x + \mathbb{Z}, (-1)^j y + \mathbb{Z}). \quad (5.2)$$

При этом имеются четыре неподвижные точки $(s/2 + \mathbb{Z}, t/2 + \mathbb{Z})$, $s, t \in \{0, 1\}$. Поэтому B/Δ — орбиобразие. Оно также гомеоморфно сфере S^2 .

Так как $R_{[1]}$ сохраняет ориентацию тора, то $H_{\Delta}^2(B, \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}^{\Delta}(H_2(B), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Вместе с тем $R_{[1]}$ меняет ориентации одномерных симплексов. Поэтому $\text{Hom}^{\Delta}(H_1(B), \mathbb{R}) = 0$ и $\text{Hom}(H_1(B), T^1)/\text{im Exp}_*^{\Delta} \cong T^2$. По теореме 5.1 отсюда следует, что $\mathcal{B}(B, T^1, \Delta, R) \cong \mathbb{Z} \oplus T^2 \cong \mathcal{B}(B, T^1) \oplus T^2$. Таким образом, для действия (5.2) каждое главное расслоение с базой $B = T^2$ и структурной группой T^1 обладает бесконечным набором попарно не изоморфных почти Δ -структур.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим, наконец, проективную плоскость $B = \mathbb{R}P^2$ и зададим действие той же группы $\Delta = \mathbb{Z}_2$ на B , полагая

$$R_{[j]}(x: y: z) = ((-1)^j x: (-1)^j y: z). \quad (5.3)$$

Неподвижными являются точки $(0: 0: 1)$ и $(x: y: 0)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$, $B/\Delta \approx D^2$.

Очевидно, $H_{\Delta}^2(B, \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}) = 0$. Поскольку $R_{[1]}$ переводит образующий элемент группы $H_1(B)$ в себя, то $\text{Hom}^{\Delta}(H_1(B), \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_1(B), \mathbb{R})$. Следовательно,

$$\text{Hom}(H_1(B), T^1)/\text{im Exp}_*^{\Delta} = \text{Ext}(H_1(B), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

В результате $\mathcal{B}(B, T^1, \Delta, R) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathcal{B}(B, T^1)$. Это значит, что каждое из двух (не изоморфных) главных расслоений с базой $B = \mathbb{R}P^2$ и структурной группой T^1 допускает (при действии (5.3)) почти Δ -структуру, но только одну.

Пусть далее g — риманова (лоренцева) метрика, f — замкнутая 2-форма и u — гладкая функция на многообразии B . Четверку $\Gamma = (B, g, f, u)$ принято называть *гироскопической системой*. Предположим, что выполнены условия

$$f = \theta \circ F, \quad \text{где} \quad \theta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad [F] \in H^2(B, \mathbb{R}^k \mid \mathbb{Z}^k), \quad u > 0. \quad (5.4)$$

Тогда существует главное расслоение ξ с проекцией $p: E \rightarrow B$, структурной группой T^k и характеристическим классом $[F]$. На его пространстве E найдется T^k -связность H с формой связности ω и формой кривизны $d\omega = p^*F$. Полагая

$$\bar{g} = \frac{|\theta|^2}{2u \circ p} \langle \omega, \omega \rangle + p^*g, \quad (5.5)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартная евклидова метрика на $\mathbb{R}^k$, можно построить риманову (лоренцеву) метрику $\bar{g}$ на E . Любое движение системы Γ представляет собой проекцию подходящим образом выбранной геодезической многообразия $(E, \bar{g})$ [2], [3].

Допустим, что система Γ инвариантна относительно действия $R: B \times \Delta \rightarrow B$ конечной группы Δ . Легко видеть, что при этом форму F также можно выбрать инвариантной.

Действительно, если $f = \hat{\theta} \circ \hat{F}$, где форма $\hat{F}$ удовлетворяет условию $\text{im } I_{[\hat{F}]} \subset \mathbb{Z}^k$, но не инвариантна относительно R , то положим $\theta = (1/|\Delta|)\hat{\theta}$ и $F = \sum_{\delta \in \Delta} R_{\delta}^* \hat{F}$. Тогда $\theta \circ F = (1/|\Delta|) \sum_{\delta \in \Delta} R_{\delta}^* f = f$ и $I_{[F]} = \sum_{\delta \in \Delta} I_{R_{\delta}^* \hat{F}} = \sum_{\delta \in \Delta} I_{\hat{F}} \circ R_{\delta}$. Следовательно, $\text{im } I_{[F]} \subset \mathbb{Z}^k$. По построению $R_{\delta}^* F = F$ для всех $\delta \in \Delta$.

Согласно предложению 2.2 при инвариантности формы F расслоение ξ обладает почти Δ -структурой $\mathcal{A}$, а H является G -связностью, $G = \Delta \times T^k$. В этой ситуации метрика $\bar{g}$ инвариантна как относительно действия $S: E \times T^k \rightarrow E$ структурной группы T^k , так и относительно соответствующего $\mathcal{A}$ многозначного действия $\mathcal{R}$ группы Δ .

Пусть теперь на пространстве E почти Δ -расслоения $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ задана инвариантная относительно S и $\mathcal{R}$ риманова (лоренцева) метрика $\bar{g}$. Тогда ортогональные слоям касательные векторы к E образуют G -связность H . С ее помощью метрика $\bar{g}$ легко приводится к виду (5.5). Это значит, в частности, что она индуцирует гомоморфизм $\theta: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, а также метрику g , форму F и функцию u на базе B . Полагая $f = \theta \circ F$, получим гироскопическую систему $\Gamma = (B, g, f, u)$, удовлетворяющую условиям (5.4) и инвариантную относительно R .

ВЫВОДЫ.

- (1) Каждая гироскопическая система Γ на многообразии B , обладающая свойствами (5.4) и инвариантная относительно действия $R: B \times \Delta \rightarrow B$, порождает почти Δ -расслоение ρ и инвариантную относительно действия $S: E \times T^k \rightarrow E$ структурной группы T^k и многозначного действия $\mathcal{R}$ группы Δ риманову (лоренцеву) метрику $\bar{g}$ на его пространстве E . При этом динамика системы Γ моделируется геодезическими многообразия $(E, \bar{g})$.
- (2) Верно и обратное. Любое почти Δ -расслоение ρ и инвариантная относительно S и $\mathcal{R}$ риманова (лоренцева) метрика $\bar{g}$ на его пространстве могут быть получены таким образом с помощью некоторой инвариантной гироскопической системы на базе B .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
- [2] Яковлев Е. И. Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 1. С. 89–92.
- [3] Яковлев Е. И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 2. С. 256–271.
- [4] Яковлев Е. И. Почти главные расслоения // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 9. С. 151–176.
- [5] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
- [6] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
- [7] Kobayashi S. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. 1956. V. 8. P. 29–45.
- [8] Чжэнь Шэн-Шэнь. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.