Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ю. Чередникова, Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 775–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:03:28

УДК 517.53

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВЕСОВЫХ АЛГЕБР ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Л. Ю. Чередникова

Пусть $\mathcal{P}$ – система непрерывных субгармонических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ и $A_{\mathcal{P}}$ – класс голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f таких, что $\log |f(z)| \leq B_f p_f(z) + C_f$, $z \in \mathbb{D}$, где B_f и C_f – постоянные, а $p_f \in \mathcal{P}$. Получены достаточные условия, при которых заданная последовательность чисел $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ является подпоследовательностью нулей какой-нибудь ненулевой голоморфной функции из $A_{\mathcal{P}}$, т.е. Λ – последовательность неединственности для $A_{\mathcal{P}}$.

Библиография: 17 названий.

Введение. Круг известных описаний нулевых последовательностей и последовательностей неединственности для различных алгебр голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ очень обширен. Не претендуя на полноту охвата библиографии по этой тематике, отметим здесь лишь обзор С.В. Шведенко [1], монографию А. Джрбашяна и Ф.А. Шамомяна [2] и наиболее близкие к настоящей работе по типу рассматриваемых алгебр результаты законченного характера Шамомяна [3], [4], продолжившего исследования М.М. Джрбашяна, а также статьи Ч. Горовица, Б. Коренблума, И. Беллера, И. Бруно и К. Массанеда [5]–[9]. При этом весовые функции p , определяющие алгебру голоморфных функций посредством оценок вида $|f| \leq C_f \exp(c_f p)$, C_f, c_f – постоянные, рассматривались, как правило, радиальные, т.е. зависящие только от расстояния до нуля, и положительные. В настоящей работе приводятся достаточные условия, при которых заданная последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ – последовательность неединственности для алгебры голоморфных в круге функций в случае, когда весовые функции, определяющие алгебру, лишь субгармоничны и непрерывны, но, вообще говоря, не радиальны и могут стремиться к $-\infty$ при приближении к отдельным участкам границы (теорема неединственности). В то же время теорема неединственности является новой и для радиальных и положительных весовых функций (следствие). Как показывает сравнение с известными результатами Шамомяна [3, теорема 2.2], [4, теорема А] о полном описании нулевых множеств для некоторых алгебр с радиальными весами, теорема неединственности и ее следствие точны во всяком случае для алгебр, определяемых умеренно растущими радиальными весами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00033.

Автор выражает глубокую признательность Б. Н. Хабибуллину, под чьим руководством выполнена эта работа.

1. Основные результаты. Всюду положительность числа, функции, меры и т.п. понимаем как ≥ 0 , а > 0 суть строгая положительность; аналогичное соглашение предлагается и для отрицательности.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек в $\mathbb{D}$ и Λ не имеет предельных точек в $\mathbb{D}$; H – некоторое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Последовательность Λ называется *последовательностью неединственности для пространства H* , если существует ненулевая функция $f \in H$, обращающаяся в нуль на Λ в том смысле, что кратность нуля функции f в каждой точке из $\mathbb{D}$ не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$).

Рассматривается следующий тип весовых алгебр.

Пусть $\mathcal{P}$ – система непрерывных субгармонических функций в $\mathbb{D}$. Если система $\mathcal{P}$ обладает свойством

(А) для любых $p_1 \in \mathcal{P}$ и $p_2 \in \mathcal{P}$ и для любых постоянных $c_1, c_2 > 0$ найдутся функция $p_3 \in \mathcal{P}$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\max\{c_1 p_1(z), c_2 p_2(z)\} \leq C_1 p_3(z) + C_2, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.1)$$

то класс голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f , удовлетворяющих оценке

$$\log |f(z)| \leq A_f p_f(z) + B_f, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.2)$$

где A_f и B_f – строго положительные постоянные, а p_f – некоторая функция из $\mathcal{P}$, образует алгебру, которую обозначаем далее через $A_{\mathcal{P}}$. Действительно, если $f, g \in A_{\mathcal{P}}$, т.е. вместе с (1.2) справедлива оценка

$$\log |g(z)| \leq A_g p_g(z) + B_g, \quad z \in \mathbb{D},$$

где постоянные $A_g, B_g > 0$, то по условию (А), примененному к функциям $p_1 = p_f$ и $p_2 = p_g$ и постоянным $c_1 = A_f$ и $c_2 = A_g$, получаем оценки

$$\begin{aligned} \log |f + g| &\leq \log(|f| + |g|) \leq \max\{\log |f|, \log |g|\} + \log 2 \\ &\leq \max\{A_f p_f + B_f, A_g p_g + B_g\} + \log 2 \\ &\leq \max\{A_f p_f, A_g p_g\} + \max\{B_f, B_g\} + \log 2 \leq C_1 p + C_2 \end{aligned}$$

для некоторой функции $p \in \mathcal{P}$ и постоянных $C_1, C_2 > 0$, т.е. класс $A_{\mathcal{P}}$ замкнут относительно сложения. Очевидно, $\alpha f \in A_{\mathcal{P}}$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Наконец, при условии (А)

$$\begin{aligned} \log |fg| &\leq 2 \max\{\log |f|, \log |g|\} \leq 2 \max\{A_f p_f + B_f, A_g p_g + B_g\} \\ &\leq 2 \max\{A_f p_f, A_g p_g\} + 2 \max\{B_f, B_g\} \leq C_1 p + C_2 \end{aligned}$$

для некоторой функции $p \in \mathcal{P}$ и постоянных $C_1, C_2 > 0$, т.е. класс $A_{\mathcal{P}}$ замкнут и относительно умножения. Отметим, что если все функции из класса $\mathcal{P}$ положительны, то выполнение условия (А) достаточно проверить при $c_1 = c_2 = 1$.

Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через ∂D , $\text{diam } D$ и $\text{dist}(z, D)$ обозначаем соответственно границу множества D , диаметр D и евклидово расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до D . Через $D(z, t)$ обозначаем открытый круг с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ радиуса t ; $D(t) \stackrel{\text{def}}{=} D(0, t)$.

Если ν – мера и Λ – последовательность точек в $\mathbb{D}$, то $\nu(D)$ и $\Lambda(D)$ – соответственно ν -мера множества D и число точек последовательности Λ , попавших в D .

Для субгармонической функции p через ν_p обозначаем распределение масс Рисса (ассоциированную меру) функции p .

Для функции $R(t)$, определенной на интервале $[0, 1]$, полагаем

$$R_\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} R\left(\frac{(t - \beta)^+}{1 - \beta}\right), \quad 0 \leq \beta < 1, \quad t \in [0, 1], \quad (1.3)$$

где $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, 0\}$. Основной результат статьи, анонсированный в несколько более слабой форме в [10], следующий.

ТЕОРЕМА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ. Пусть $\mathcal{P}$ – система непрерывных субгармонических функций в $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условию (A), $R(t)$ – убывающая строго положительная непрерывная функция на $[0, 1)$ такая, что для некоторого числа $\beta \leq 1/2$

$$R(t) \leq \beta(1 - t) \quad \text{при} \quad \beta < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t < 1, \quad (1.4a)$$

$$R(t) < \frac{1}{2}(1 - t) \quad \text{при} \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t < 1. \quad (1.4b)$$

Если для системы $\mathcal{P}$ выполнены два условия:

(R) для любой функции $p \in \mathcal{P}$ найдутся функция $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что при некотором $t_0 < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(z + R_\beta(|z|)e^{i\theta}) d\theta \leq C_1 p_1(z) + C_2, \quad t_0 \leq |z| < 1; \quad (1.5)$$

(S) для любой функции $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянной $C > 0$ найдутся функция $p_2 \in \mathcal{P}$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что при некотором $t_0 < 1$ в каждой точке z , $|z| \geq t_0$, для некоторого числа σ (зависящего от z), $0 < \sigma < 1 - |z|$, выполнена оценка

$$\sup_{|\zeta - z| < \sigma} p_1(\zeta) + C \log \frac{1}{\sigma} \leq C_1 p_2(z) + C_2, \quad t_0 \leq |z| < 1, \quad (1.6)$$

и при этом для некоторой системы $\{D_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, непересекающихся борелевских множеств выполнены соотношения

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } D_k}{R(d_k)} < 1, \quad 1 > d_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|z| : z \in D_k\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \quad (1.7)$$

а также последовательность $\Lambda \subset \bigcup_k D_k$ для некоторой функции $p \in \mathcal{P}$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(D_k)}{\nu_p(D_k)} < \infty, \quad (1.8)$$

где ν_p – распределение масс Рисса функции p , то Λ – последовательность неединственности для A_p .

Выполнение условий **(R)** и **(S)** требуется лишь при t , близких к 1. Поэтому в теореме неединственности, вообще говоря, достаточно считать убывающую строго положительную функцию $R(t)$ определенной лишь на некотором интервале $[t', 1)$, $0 \leq t' < 1$. В этом случае можно продолжить ее на весь интервал $[0, 1]$ с сохранением условия (1.4), полагая $R(t) \equiv R(t')$ при $0 \leq t \leq t'$. Тогда в силу непрерывности функций из $\mathcal{P}$, увеличивая, если это необходимо, постоянную $C_2 > 0$ в (1.5) и (1.6), условия **(R)** и **(S)** также можно считать выполненными при всех $z \in \mathbb{D}$ с продолженной на весь интервал $[0, 1]$ функцией $R(t)$. Условия (1.7) и (1.8) также сохраняются ввиду их асимптотического характера.

Отметим также, что условие (1.4) обеспечивает (см. лемму 2, оценку (4.14)) то, что $z + R_\beta(|z|)e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ для всех $z \in \mathbb{D}$, т.е. левая часть в (1.5) определена при всех $z \in \mathbb{D}$.

Доказательство теоремы неединственности следует схеме доказательства аналогичных результатов для алгебр и пространств целых функций из [11, теорема 3.1] (см. также элементы этой схемы в [12]). В отличие от традиционных методов описания нулевых последовательностей и последовательностей неединственности из [1]–[9] это доказательство неконструктивно в том смысле, что не использует каких-либо конкретных представлений голоморфных функций с заданными ограничениями на рост вблизи границы $\partial\mathbb{D}$.

Несколько ослабляя теорему неединственности, два условия **(R)** и **(S)** можно объединить в одно.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $R(t)$ такая же, как в теореме неединственности. Если система $\mathcal{P}$ непрерывных субгармонических положительных функций удовлетворяет условию

(RS) для любой функции $p \in \mathcal{P}$ и для любой постоянной C найдутся функция $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что при некотором $t_0 < 1$ выполнены неравенства

$$\sup_{|z-\zeta| \leq R_\beta(|z|)} p(\zeta) + C \log \frac{1}{R_\beta(|z|)} \leq C_1 p_2(z) + C_2, \quad t_0 \leq |z| < 1, \quad (1.9)$$

и при этом для некоторой системы $\{D_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, непересекающихся борелевских множеств выполнены соотношения (1.7) и (1.8), то Λ – последовательность неединственности для A_p .

Действительно, условие **(RS)** влечет за собой свойство **(R)** по принципу максимума для субгармонических функций и свойство **(S)** для значений $\sigma = \sigma(z) = R_\beta(|z|)$.

2. Применение мер и функций Йенсена. Основные свойства мер Йенсена, их потенциалов и функций Йенсена можно найти в [13].

Как обычно, $\text{supp } \nu$ – носитель меры ν .

Положительно борелевскую меру μ с компактным носителем $\text{supp } \mu$ в $\mathbb{D}$ называют *мерой Йенсена* (для круга $\mathbb{D}$), если для любой субгармонической в $\mathbb{D}$ функции u выполнено неравенство $u(0) \leq \int u d\mu$. Мера Йенсена есть ни что иное, как выметание меры Дирака, т.е. единичной массы, сосредоточенной в нуле.

Субгармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* (для круга $\mathbb{D}$), если функция V неотрицательна, тождественно равна нулю вне некоторого круга радиуса менее 1 с центром в нуле и справедливо асимптотическое соотношение $V(\zeta) \leq -\log |\zeta| + O(1)$ при $\zeta \rightarrow 0$.

Если μ – мера Йенсена, то функция

$$V_\mu(\zeta) = \int \log |z - \zeta| d\mu(z) - \log |\zeta|,$$

называемая далее *потенциалом меры μ* , является функцией Йенсена. Соответствие $\mu \rightarrow V_\mu$ задает биекцию класса всех мер Йенсена для $\mathbb{D}$ на класс всех функций Йенсена для $\mathbb{D}$.

Имеет место следующее обобщение классической формулы Пуассона–Йенсена: *если p – субгармоническая функция в $\mathbb{D}$ с распределением масс Рисса ν_p , $p(0) \neq -\infty$, и μ – мера Йенсена для $\mathbb{D}$, то выполнено равенство*

$$\int p d\mu = \int V_\mu d\nu_p + p(0). \quad (2.1)$$

Если функция f не равна тождественно величине $a \in [-\infty, +\infty]$, то пишем $f \not\equiv a$.

В основу нашего исследования положен общий результат Хабибуллина из [14, теорема 1] (различные вариации на ту же тему см. в его же работах [13, основная теорема], [15, теорема 1.3], [16, § 11], а также в книге П. Кусиса [12, гл. III, § C.1, теорема Хабибуллина]), который мы формулируем здесь частично и лишь для круга $\mathbb{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [14, теорема 1]. *Пусть u – субгармоническая функция в $\mathbb{D}$, M – непрерывная вещественнозначная функция в $\mathbb{D}$. Если существует постоянная C такая, что для всех мер Йенсена μ (для круга $\mathbb{D}$) выполнено неравенство*

$$\int u d\mu \leq \int M d\mu + C, \quad (2.2)$$

то найдется голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $h \not\equiv 0$ такая, что для любой точки $z \in \mathbb{D}$ и любого σ , $0 < \sigma < \text{dist}(z, \partial\mathbb{D})$, выполнено неравенство

$$u(z) + \log |h(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta) + 3 \log(1 + |z| + \sigma) - \log \sigma. \quad (2.3)$$

Придадим этому предложению удобную для применения в настоящей работе форму (ср. [13, основная теорема]).

Последовательность Λ называется *последовательностью нулей* голоморфной в $\mathbb{D}$ функции f , если кратность нуля функции f в каждой точке из $\mathbb{D}$ совпадает с числом повторений этой точки в последовательности Λ . Если Λ – последовательность нулей функции f , то часто удобно отождествлять эту последовательность с мерой, обозначаемой тем же символом Λ , такой, что $\Lambda(B)$ – число точек последовательности Λ , попавших в $B \subset \mathbb{D}$. Связано это с тем, что распределение масс Рисса субгармонической функции $\log |f|$ есть мера Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек в $\mathbb{D}$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{D}$, $0 \notin \Lambda$, и M – непрерывная вещественнозначная функция в $\mathbb{D}$. Если существует постоянная C такая, что для всех мер Йенсена μ выполнено неравенство

$$\sum_n V_\mu(\lambda_n) \leq \int M d\mu + C, \quad (2.4)$$

то найдется голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f \neq 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$ выполнена оценка

$$\log |f(z)| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} M(\zeta) + \log \frac{1}{\sigma(z)}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из начальных условий на последовательность Λ по классической теореме Вейерштрасса следует, что существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция f_Λ с последовательностью нулей в точности Λ , $f_\Lambda \neq 0$. Применяя обобщенную формулу Пуассона–Йенсена (2.1) к субгармонической функции $p = \log |f_\Lambda|$ с распределением масс Рисса Λ , получаем

$$\int \log |f_\Lambda(z)| d\mu(z) = \int V_\mu d\Lambda + \log |f_\Lambda(0)| = \sum_n V_\mu(\lambda_n) + \log |f_\Lambda(0)|.$$

Из этого равенства и условия (2.4) вытекает существование постоянной C такой, что неравенство

$$\int \log |f_\Lambda(z)| d\mu(z) \leq \int M d\mu + C + \log |f_\Lambda(0)|$$

выполнено для всех мер Йенсена μ . Отсюда по предложению 1 с постоянной $C' = C + \log |f_\Lambda|(0)$ вместо C найдется голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция $h \neq 0$ такая, что для любой точки $z \in \mathbb{D}$ и для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$ (при выборе $\sigma = \sigma(z)$) выполнена оценка

$$\begin{aligned} \log |f_\Lambda(z)| + \log |h(z)| &\leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta) + 3 \log(1 + |z| + \sigma(z)) - \log \sigma \\ &\leq \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma} M(\zeta) + 3 \log 2 + \log \frac{1}{\sigma}. \end{aligned}$$

Последнее при $f = 2^{-3} f_\Lambda h$ дает в точности (2.5). При этом по построению $f \neq 0$ и $f(\Lambda) = 0$.

3. Лемма сравнения. Доказательство следующей леммы, играющей ключевую роль, следует доказательству результата из [11, лемма 1.1] (см. также [12, гл. III, С, лемма сравнения]). Полагаем $\log^+ t = \max\{0, \log t\}$.

ЛЕММА СРАВНЕНИЯ. Пусть λ и ν – две положительные борелевские меры с носителями в $\mathbb{D}$, представленные в виде суммы положительных мер с компактными носителями

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(k)}, \quad \nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(k)} \quad (3.1)$$

так, что

$$\lambda^{(k)}(\mathbb{D}) \leq \nu^{(k)}(\mathbb{D}). \quad (3.2)$$

Предположим, что носители мер $\text{supp } \lambda^{(k)}$ и $\text{supp } \nu^{(k)}$ лежат в борелевских множествах $D_k \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \dots$. Положим

$$d_k = \sup\{|z| : z \in D_k\}, \quad d_k^\circ = \inf\{|z| : z \in D_k\}. \quad (3.3)$$

Допустим, что удается построить последовательность положительных чисел $\{R_k\}$ так, что

$$\text{diam } D_k < R_k < \min\{1 - d_k, d_k^\circ\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Тогда для любой меры Йенсена μ с потенциалом $V = V_\mu$ выполнена оценка

$$\int V d\lambda \leq \sum_k \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \left(\int_{D_k} V d\nu^{(k)} + \int_{\mathbb{D}} \int_{D_k} \log^+ \frac{R_k}{|z - \zeta|} d\nu^{(k)}(\zeta) d\mu(z) \right). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z, z' \in D_k$. Рассмотрим круг $D(z, R_k)$. В силу условия (3.4) с учетом определений (3.3) этот круг относительно компактен в области $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Тогда определено гармоническое продолжение H_V функции Йенсена V внутрь круга $D(z, R_k)$. Функция H_V положительна, так как $V \geq 0$. При этом $z' \in D(z, \text{diam } D_k) \subset D(z, R_k)$ по условию (3.4). Из субгармоничности V в круге $D(z, R_k)$ и из неравенства Харнака [17, теорема 1.18], примененного к функции H_V в круге $D(z, R_k)$, получаем

$$\begin{aligned} V(z') &\leq H_V(z') \leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} H_V(z) = \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда по условию (3.2)

$$\begin{aligned} \int_{D_k} V(z') d\lambda^{(k)}(z') &\leq \lambda^{(k)}(D_k) \sup_{z' \in D_k} V(z') \\ &\leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta \cdot \nu^{(k)}(D_k) \end{aligned}$$

для любой точки $z \in D_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{D_k} V(z') d\lambda^{(k)}(z') &\leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \inf_{z \in D_k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta \cdot \nu^{(k)}(D_k) \\ &\leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \int_{D_k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta d\nu^{(k)}(z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из классической формулы Грина для субгармонической в круге $D(z, R_k)$ функции V имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + R_k e^{i\theta}) d\theta = V(z) + \int_{D(z, R_k)} \log^+ \frac{R_k}{|z - \zeta|} d\mu, \quad (3.7)$$

поскольку распределение масс Рисса потенциала $V = V_\mu$ вне нуля – это в точности мера μ . Подставляя правую часть равенства (3.7) вместо внутреннего интеграла в правой части (3.6), получаем

$$\int_{D_k} V(z') d\lambda^{(k)}(z') \leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \int_{D_k} \left(V(z) + \int_{D(z, R_k)} \log^+ \frac{R_k}{|z - \zeta|} d\mu \right) d\nu^{(k)}(z).$$

Отсюда, применяя теорему Фубини о повторных интегралах, имеем

$$\begin{aligned} \int_{D_k} V(z') d\lambda^{(k)}(z') \\ \leq \frac{R_k + \text{diam } D_k}{R_k - \text{diam } D_k} \cdot \left(\int_{D_k} V(z) d\nu^{(k)}(z) + \int_{D(z, R_k)} \int_{D_k} \log^+ \frac{R_k}{|z - \zeta|} d\nu^{(k)}(z) d\mu \right) \end{aligned}$$

при всех $k = 1, 2, \dots$. После суммирования последних неравенств по всем k в силу представлений (3.1) получаем в точности требуемое неравенство (3.5).

4. Доказательство теоремы неединственности. Следующая лемма – аналог соответствующего факта из [11, лемма 3.1], установленного в [11] для функций, мер и последовательностей в $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 1. Пусть p – непрерывная субгармоническая функция в $\mathbb{D}$, последовательность $\Lambda \subset \mathbb{D}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{D}$ и $0 \notin \Lambda$. Допустим, что распределение масс ν_p функции p и ассоциированная с последовательностью Λ мера Λ представимы в виде сумм положительных мер с компактными носителями

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{(k)}, \quad \nu_p = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(k)} \quad (4.1)$$

так, что для некоторой постоянной $A > 0$

$$\Lambda^{(k)}(\mathbb{D}) \leq A \nu_p^{(k)}(\mathbb{D}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

и носители $\text{supp } \Lambda^{(k)}$ и $\text{supp } \nu^{(k)}$ содержатся в борелевских множествах $D_k \subset \mathbb{D}$, $0 \notin D_k$, $k = 1, 2, \dots$. Допустим, что выбрана последовательность R_k такая, что

$$\alpha \text{ diam } D_k \leq R_k < \min\{1 - d_k, d_k^0\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

где d_k, d_k° из (3.3), а число $\alpha > 1$. Положим

$$\widehat{R}(z) = \sup\{R_k : \exists D_k, \text{dist}(z, D_k \cap \text{supp } \mu_p) \leq R_k\}. \quad (4.4)$$

Если для некоторой непрерывной функции $R^*(z)$ на $\mathbb{D}$ выполнены неравенства

$$\widehat{R}(z) \leq R^*(z) < 1 - |z|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.5)$$

то найдется голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f \not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda) = 0$ и при некоторой постоянной $B > 0$ для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$, выполнена оценка

$$\log |f(z)| \leq B \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} \int_0^{2\pi} p(\zeta + R^*(\zeta)e^{i\theta}) d\theta + \log \frac{1}{\sigma(z)}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму сравнения с мерой $\lambda = \Lambda$ и с мерой $\Lambda\nu$ вместо меры ν . Тогда неравенство (3.5) с учетом оценок (4.2), (4.3), $\alpha > 1$, представления (4.1) и определения (4.4) перейдет в неравенство

$$\begin{aligned} \sum_n V_\mu(\lambda_n) &= \int V_\mu d\Lambda \\ &\leq A \sum_k \frac{R_k + R_k/\alpha}{R_k - R_k/\alpha} \left(\int_{D_k} V_\mu d\nu^{(k)} + \int_{\mathbb{D}} \int_{D_k} \log^+ \frac{R_k}{|z-\zeta|} d\nu^{(k)}(\zeta) d\mu(z) \right) \\ &\leq A \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \left(\int V_\mu d\nu_p + \int_{\mathbb{D}} \sum_k \int_{D_k} \log^+ \frac{\widehat{R}(z)}{|z-\zeta|} d\nu^{(k)}(\zeta) d\mu(z) \right) \\ &\leq B' \left(\int V_\mu d\nu_p + \iint \log^+ \frac{\widehat{R}(z)}{|z-\zeta|} d\nu_p(\zeta) d\mu(z) \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $B' = A(\alpha+1)/(\alpha-1) > 0$ – постоянная, справедливое для всех мер Йенсена μ с потенциалом V_μ .

Применяя обобщение (2.1) формулы Пуассона–Йенсена к первому интегралу в последней скобке из (4.7), получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_n V_\mu(\lambda_n) &\leq B' \left(\int p(z) d\mu(z) - p(0) + \iint \log^+ \frac{\widehat{R}(z)}{|z-\zeta|} d\nu_p(\zeta) d\mu(z) \right) \\ &= B' \int \left(p(z) + \int \log^+ \frac{\widehat{R}(z)}{|z-\zeta|} d\nu_p(\zeta) \right) d\mu(z) + C, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $C = \max\{-B'p(0), 1\} > 0$ – постоянная, а неравенство (4.8) по-прежнему справедливо для всех мер Йенсена μ с потенциалом V_μ . Из классической формулы Пуассона–Йенсена для круга $D(z, \widehat{R}(z))$ следует

$$p(z) + \int \log^+ \frac{\widehat{R}(z)}{|z-\zeta|} d\nu_p(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(z + \widehat{R}(z)e^{i\theta}) d\theta.$$

Подставляя это выражение в правую часть (4.8), для всех мер Йенсена μ с потенциалом V_μ получаем

$$\sum_n V_\mu(\lambda_n) \leq \int \left(B \int_0^{2\pi} p(z + \hat{R}(z)e^{i\theta}) d\theta \right) d\mu(z) + C, \quad (4.9)$$

где $B = B'/2\pi > 0$ и $C > 0$ – постоянные. Используя (4.5), в силу монотонного возрастания средних по окружности для субгармонической функции p и непрерывности p из неравенства (4.9) получаем (2.4) для всех мер Йенсена μ , где

$$M(z) = B \int_0^{2\pi} p(z + R^*(z)e^{i\theta}) d\theta \quad (4.10)$$

– непрерывная функция. Тогда из предложения 2 сразу следует заключение леммы 1.

Следующая лемма оценивает функцию (4.4). Пусть $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, 0\}$.

ЛЕММА 2. Пусть $R(t)$ – убывающая строго положительная функция на $[0, 1)$ и при некотором $\beta < 1$ выполнено

$$R(t) \leq \beta(1 - t), \quad t < 1, \quad (4.11)$$

а $\{D_k\}$ – система подмножеств в круге $\mathbb{D}$, $d_k = \sup_{z \in D_k} |z|$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда для функции

$$\hat{R}(\zeta) = \sup\{R(d_k) : \exists D_k, \text{dist}(\zeta, D_k) \leq R(d_k)\}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad (4.12)$$

в обозначении (1.3) справедлива оценка

$$\hat{R}(\zeta) \leq R\left(\frac{(|\zeta| - \beta)^+}{1 - \beta}\right) = R_\beta(|\zeta|). \quad (4.13)$$

При этом, если $\beta \leq 1/2$ и для функции $R(t)$ выполнено условие (1.4), то имеет место оценка

$$t + R_\beta(t) < 1, \quad 0 \leq t < 1. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R_k = R(d_k)$. Если $\text{dist}(\zeta, D_k) \leq R_k$, $\zeta \in \mathbb{D}$, то $|\zeta| \leq d_k + R_k$ и в силу (4.11) справедлива оценка

$$d_k \geq |\zeta| - R_k \geq |\zeta| - \beta(1 - d_k) = |\zeta| - \beta + \beta d_k.$$

Отсюда $d_k \geq (|\zeta| - \beta)/(1 - \beta)$ и ввиду убывания функции $R(t)$ получаем

$$R(d_k) \leq R\left(\frac{(|\zeta| - \beta)^+}{1 - \beta}\right) = R_\beta(|\zeta|),$$

что и требовалось в (4.13).

Если $t < \beta \leq 1/2$, то $t + R_\beta(t) = t + \beta < 2\beta < 1$. При $t \geq \beta$, но $\beta < 1/2$ согласно (1.4a) получаем

$$t + R_\beta(t) \leq t + \beta \left(1 - \frac{t - \beta}{1 - \beta}\right) = \frac{t(1 - 2\beta) + \beta}{1 - \beta} < 1.$$

Наконец, при $t \geq \beta = 1/2$, используя (1.4b), имеем

$$t + R_\beta(t) < t + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t - 1/2}{1/2}\right) = 1,$$

и окончательно получаем (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ. Систему непересекающихся борелевских множеств $\{D_k\}$ можно дополнить конечным набором новых борелевских множеств, предкомпактных в $\mathbb{D}$, так, что (после перенумерации) объединение множеств D_k покрывает $\text{supp } \nu_p$ и по-прежнему выполнены условия (1.7) и (1.8). Выберем в качестве мер $\Lambda^{(k)}$ и $\nu^{(k)}$ сужения мер соответственно Λ и ν_p на множества D_k . В частности, имеет место представление (4.1) и согласно условию (1.8) найдется постоянная $A > 0$ такая, что, начиная с некоторого номера k , выполнены неравенства из (4.2). Пусть числа d_k и d_k° определены так же, как в (3.3) и (1.7). Ввиду выполнения неравенств (4.2) при всех достаточно больших k и согласно условиям (1.7) и (1.4) можно подобрать номер k_0 и число $\alpha > 1$ так, что

$$\Lambda^{(k)}(\mathbb{D}) \leq A \nu_p^{(k)}(\mathbb{D}), \quad k > k_0, \quad (4.15)$$

и одновременно

$$\alpha \text{diam } D_k < R_k \stackrel{\text{def}}{=} R(d_k) \leq \beta(1 - d_k) \leq d_k^\circ, \quad D_k \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad k > k_0. \quad (4.16)$$

В частности, начиная с номера $k_0 + 1$, выполнены условия (4.3). Пусть ν^0 – сужение меры ν_p на объединение множеств $\bigcup_{k=1}^{k_0} D_k$, $\nu^1 = \nu_p - \nu^0$. В частности, ν^0 – мера с компактным носителем в $\mathbb{D}$. Представим нашу функцию p в виде суммы субгармонических функций $p = p_0 + p_1$, где

$$p_0(z) = \int_{\mathbb{D}} \log |z - \zeta| d\nu^0(\zeta), \quad p_1 = p - p_0. \quad (4.17)$$

Представим также последовательность Λ в виде объединения последовательностей $\Lambda = \Lambda^0 \cup \Lambda^1$, где Λ^0 – все точки последовательности Λ , попавшие в объединение $\bigcup_{k=1}^{k_0} D_k$, а последовательность Λ^1 состоит из всех остальных точек.

Рассмотрим систему множеств $\{D_k^1\}$, $D_k^1 = D_{k_0+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Согласно (4.15) и (4.16) и построению функции p_1 и последовательности Λ^1 выполнены условия (4.1)–(4.3) леммы 1 (с системой $\{D_k^1\}$ вместо $\{D_k\}$, с последовательностью Λ^1 вместо Λ и с функцией p_1 вместо p). В качестве функции R^* в (4.5) по лемме 2 можно взять непрерывную функцию R_β из (4.13). По лемме 1 найдется голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f_1 \not\equiv 0$ такая, что $f_1(\Lambda^1) = 0$ и при некоторой постоянной $B > 0$ для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$, выполнена оценка

$$\log |f_1(z)| \leq B \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} \int_0^{2\pi} p_1(\zeta + R_\beta(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta + \log \frac{1}{\sigma(z)} \quad (4.18)$$

при всех $|z| < 1$.

Из представления (4.17) функции p_0 следует ее непрерывность вне носителя меры ν^0 и, следовательно, существование некоторой постоянной c_0 такой, что для некоторого числа $t_0 < 1$

$$Bp_0(z) \geq -c_0, \quad t_0 \leq |z| < 1. \quad (4.19)$$

Далее на каждом шаге возможно увеличение числа $t_0 < 1$.

Пусть f_0 – многочлен с последовательностью нулей Λ^0 , являющийся, очевидно, ограниченной функцией в $\mathbb{D}$. Тогда в силу (4.19) найдется постоянная C_0 такая, что

$$\log |f_0(z)| \leq B p_0(z) + C_0, \quad t_0 \leq |z| < 1, \quad f_0(\Lambda^0) = 0, \quad f_0 \not\equiv 0.$$

Отсюда ввиду монотонного возрастания средних по окружностям для субгармонической функции p_0 следует

$$\log |f_0(z)| \leq B \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} \int_0^{2\pi} p_0(\zeta + R_\beta(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta + C_0, \quad t_0 \leq |z| < 1,$$

для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$.

Напомним, что $\Lambda = \Lambda^0 \cup \Lambda^1$, $p = p_0 + p_1$. Следовательно, объединяя последнюю оценку с (4.18), для голоморфной в $\mathbb{D}$ функции $f = f_0 f_1 \not\equiv 0$, $f(\Lambda) = 0$, получаем

$$\log |f(z)| \leq B \sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} \int_0^{2\pi} p(\zeta + R_\beta(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta + \log \frac{1}{\sigma(z)} + C_0$$

при $t_0 \leq |z| < 1$ для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Отсюда по условию **(R)** следует существование функции $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянных $C'_1, C'_2 > 0$ таких, что

$$\log |f(z)| \leq C'_1 \left(\sup_{|z-\zeta| \leq \sigma(z)} p_1(\zeta) + \frac{1}{C'_1} \log \frac{1}{\sigma(z)} \right) + C'_2, \quad t_0 \leq |z| < 1,$$

для любой строго положительной функции $\sigma(z) < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Выберем в качестве функции $\sigma(z)$ соответствие, которое каждой точке z сопоставляет число σ в условии **(S)** при $C = 1/C'_1$. Тогда согласно последней оценке по условию **(S)** найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\log |f(z)| \leq C_1 p_2(z) + C_2, \quad t_0 \leq |z| < 1, \quad (4.20)$$

для некоторой функции $p_2 \in \mathcal{P}$. Учитывая непрерывность функции p_2 , увеличив, если необходимо, постоянную C_2 , оценку (4.20) можно продолжить на все $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, $f \in A_{\mathcal{P}}$. Вместе со свойствами $f \not\equiv 0$ и $f(\Lambda) = 0$ это означает, что Λ – последовательность неединственности для $A_{\mathcal{P}}$, и теорема неединственности доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.
- [2] Djrbashian A., Shamoyan F. A. Topics in the theory of A_p^α spaces. Leipzig: Teubner-Texte, 1988.
- [3] Шамоян Ф. А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН АрмССР. Матем. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 405–422.
- [4] Шамоян Ф. А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН АрмССР. Матем. 1983. Т. 18. № 1. С. 15–27.
- [5] Horovitz C. Zero sets and radial zero sets in function spaces // J. Anal. Math. 1995. V. 65. P. 145–159.
- [6] Korenblum B. An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math. 1975. V. 135. № 3–4. P. 187–219.
- [7] Beller E. Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions // Israel J. Math. 1977. V. 27. № 3–4. P. 320–330.
- [8] Beller E., Horovitz C. Zero sets and random zero sets in certain function spaces // J. Anal. Math. 1994. V. 64. P. 203–217.
- [9] Bruna J., Massaneda X. Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth // J. Anal. Math. 1995. V. 66. P. 217–252.
- [10] Чередникова Л. Ю., Хабибуллин Б. Н. Множества неединственности для весовых алгебр голоморфных в круге функций // Труды международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. I. Комплексный анализ. Уфа, 2000. С. 195–200.
- [11] Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 125–148.
- [12] Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publications CRM, 1996.
- [13] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
- [14] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.
- [15] Khabibullin B. N. Dual approach to certain questions for weighted spaces of holomorphic functions // Israel Mathematical Conference Proceedings (Tel-Aviv, 1997). V. 15. Tel-Aviv, 1997. P. 207–219.
- [16] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 167–190.
- [17] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.