Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Гуревич, Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 665–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:31:12

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

П. Л. Гуревич

Рассмотрены эллиптические уравнения порядка $2m$ с общими нелокальными краевыми условиями в плоской ограниченной области G с кусочно-гладкой границей. Изучены обобщенные решения, принадлежащие пространству Соболева $W_2^m(G)$. Доказано, что неограниченный оператор, действующий в пространстве $L_2(G)$, соответствующий эллиптическому уравнению и определенный на функциях из пространства $W_2^m(G)$, удовлетворяющих однородным нелокальным условиям, фредгольмов.

Библиография: 29 названий.

Введение. В одномерном случае нелокальные задачи изучали еще А. Зоммерфельд [1], Я. Д. Тамаркин [2], М. Пиконе [3]. В работе Т. Карлемана [4] ищется гармоническая в двумерной ограниченной области функция, на которую налагается нелокальное условие, связывающее ее значения в различных точках границы. Другую постановку нелокальной задачи, возникающую в теории плазмы, рассмотрели А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [5]: найти гармоническую в прямоугольнике функцию, удовлетворяющую нелокальным условиям на сдвигах границы; при этом сдвиги могут отображать точки границы внутрь области. Различные обобщения указанных задач рассматривали многие авторы [6]–[12].

Наиболее сложной оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей области: решения нелокальной задачи могут иметь степенные особенности вблизи некоторых точек даже при бесконечно гладкой границе области и бесконечно дифференцируемой правой части [13], [14]. Поэтому для изучения таких задач применяют специальные весовые пространства, введенные В. А. Кондратьевым при исследовании краевых задач в областях с особенностями на границе [15]. Наиболее полная теория в этом случае построена в работах А. Л. Скубачевского [13], [16]–[19].

Отметим, что интерес к нелокальным задачам в настоящее время вызван не только значительными теоретическими достижениями, но также важными приложениями, возникающими в биофизике, теории диффузионных процессов [20], теории плазмы [21] и т. д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00312, Министерства образования РФ, грант № Е02-1.0-131, и фонда INTAS, грант № YSF 2002-008.

В работе изучаются *обобщенные решения* эллиптического уравнения порядка $2m$ в двумерной области G , удовлетворяющие нелокальным краевым условиям, которые заданы на частях Γ_j границы области $\partial G = \bigcup \overline{\Gamma_j}$. Под обобщенными решениями понимаются функции из пространства Соболева $W^m(G) = W_2^m(G)$. Доказано, что неограниченный оператор, действующий в пространстве $L_2(G)$ и соответствующий нелокальной эллиптической задаче, фредгольмов.

Заметим, что решение нелокальной задачи можно искать в пространстве “гладких” функций, а именно в пространстве Соболева $W^{2m}(G)$ (см. [22], [23]) или в весовых пространствах $H_a^{2m}(G)$, где

$$\|u\|_{H_a^k(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_G \rho^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2},$$

$k \geq 0$ целое, $a \in \mathbb{R}$, $\rho = \rho(y) = \text{dist}(y, \mathcal{K})$, $\mathcal{K} = \bigcup \overline{\Gamma_j} \setminus \Gamma_j$ – конечное множество точек сопряжения нелокальных условий (см. [13], [17]). В обоих случаях задаче будет соответствовать ограниченный оператор, фредгольмовость которого определяется спектральными свойствами некоторых вспомогательных нелокальных задач с параметром. В свою очередь, на спектральные свойства вспомогательных задач влияют такие факторы, как значения коэффициентов в нелокальных условиях и геометрическая структура носителя нелокальных членов и границы области вблизи множества $\mathcal{K}$. Если же мы ищем обобщенные решения (т.е. функции из $W^m(G)$), то соответствующий неограниченный оператор оказывается фредгольмовым вне зависимости от перечисленных выше факторов.

Ранее вопрос о фредгольмовости неограниченного оператора в $L_2(G)$ изучался лишь в том случае, когда нелокальные условия заданы на сдвигах границы [19], или же в случае нелокального возмущения задачи Дирихле для уравнения второго порядка [11], [12]. Случай эллиптического уравнения порядка $2m$ с общими нелокальными условиями рассматривается впервые.

1. Постановка нелокальных задач в ограниченной области.

1.1. Постановка задачи. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей ∂G . Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial G$, состоящее из конечного числа точек. Пусть $\partial G \setminus \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, где Γ_i – открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞ . Будем предполагать, что в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}$ область G совпадает с некоторым плоским углом.

Обозначим через $\mathbf{P}(y, D_y) = \mathbf{P}(y, D_{y_1}, D_{y_2})$ и $B_{i\mu s}(y, D_y) = B_{i\mu s}(y, D_{y_1}, D_{y_2})$ дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{i\mu}$ ($m_{i\mu} \leq m - 1$) соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞ , а через $\mathbf{P}^0(y, D_y)$ и $B_{i\mu s}^0(y, D_y)$ их главные однородные части, $i = 1, \dots, N$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 0, \dots, S_i$. Здесь $D_y = (D_{y_1}, D_{y_2})$, $D_{y_j} = -i\partial/\partial y_j$.

Сформулируем условия на операторы $\mathbf{P}(y, D_y)$ и $B_{i\mu 0}(y, D_y)$, которые будут соответствовать “локальной” эллиптической задаче. Предположим, что оператор $\mathbf{P}(y, D_y)$ *собственно эллиптивен на $\overline{G}$* ; в частности, для всех $\theta \in \mathbb{R}^2$ и $y \in \overline{G}$ выполнена оценка

$$A^{-1}|\theta|^{2m} \leq |\mathbf{P}^0(y, \theta)| \leq A|\theta|^{2m}, \quad A > 0. \quad (1.1)$$

Далее, пусть $y \in \overline{\Gamma_i}$. Без ограничения общности можем считать, что вблизи заданной точки y кривая $\overline{\Gamma_i}$ определена уравнением $y_2 = 0$. Предположим, что для всех $i = 1, \dots, N$ система операторов $\{B_{i\mu 0}(y, D_y)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к оператору $P(y, D_y)$. Другими словами, пусть многочлен

$$B'_{i\mu 0}(y, \tau) \equiv \sum_{\nu=1}^m b_{i\mu\nu}(y) \tau^{\nu-1} \equiv B_{i\mu 0}^0(y, 1, \tau) \pmod{\mathbf{M}^+(y, \tau)}$$

есть остаток от деления $B_{i\mu 0}^0(y, 1, \tau)$ на $\mathbf{M}^+(y, \tau)$, где

$$\mathbf{M}^+(y, \tau) = \prod_{\nu=1}^m (\tau - \tau_{\nu}^+(y)),$$

$\tau_1^+(y), \dots, \tau_m^+(y)$ – корни с положительной мнимой частью многочлена $P^0(y, 1, \tau)$, причем $P^0(y, 1, \tau)$, $B_{i\mu 0}^0(y, 1, \tau)$ и $\mathbf{M}^+(y, \tau)$ рассматриваются как многочлены от τ . Тогда условие накрытия означает, что

$$d_i(y) = \det \|b_{i\mu\nu}(y)\|_{\mu, \nu=1}^m \neq 0.$$

Так как каждая из дуг $\overline{\Gamma_i}$, $i = 1, \dots, N$, – компакт, то

$$D = \min_{i=1, \dots, N} \inf_{y \in \overline{\Gamma_i}} |d_i(y)| > 0. \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что нормальность операторов $B_{i\mu 0}(y, D_y)$ на дугах $\overline{\Gamma_i}$ не предполагается.

Для целых $k \geq 0$ обозначим через $W^k(G) = W_2^k(G)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^k(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_G |D^\alpha u|^2 dy \right)^{1/2}$$

(при $k=0$ полагаем $W^0(G) = L_2(G)$). Для целых $k \geq 1$ введем пространство $W^{k-1/2}(\Gamma)$ следов на гладкой кривой $\Gamma \subset \overline{G}$ с нормой

$$\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{W^k(G)}, \quad u \in W^k(G) : u|_{\Gamma} = \psi. \quad (1.3)$$

Положим

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 u = B_{i\mu 0}(y, D_y)u(y)|_{\Gamma_i}.$$

Как отмечалось выше, операторы $P(y, D_y)$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ будут соответствовать “локальной” краевой задаче.

Определим операторы, соответствующие нелокальным условиям вблизи множества $\mathcal{K}$. Пусть Ω_{is} , $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S_i$, – бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой $\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$ и

$$\Omega_{is}(g) \in \mathcal{K} \quad \text{для } g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}. \quad (1.4)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(y, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$ — ε -окрестность множества $\mathcal{K}$. Таким образом, преобразования Ω_{is} отображают дуги $\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ строго внутрь области G , а их концевые точки $\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ в концевые точки.

Уточним структуру преобразований Ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}$. Обозначим преобразование $\Omega_{is}: \mathcal{O}_i \rightarrow \Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ через Ω_{is}^{+1} , а через $\Omega_{is}^{-1}: \Omega_{is}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i$ преобразование, обратное к Ω_{is} . Назовем *орбитой* точки $g \in \mathcal{K}$ и обозначим $\text{Orb}(g)$ множество всех точек вида $\Omega_{i_q s_q}^{\pm 1}(\dots \Omega_{i_1 s_1}^{\pm 1}(g)) \in \mathcal{K}$, $1 \leq s_j \leq S_{i_j}$, $j = 1, \dots, q$, т.е. всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\Omega_{ij s_j}^{+1}$ или $\Omega_{ij s_j}^{-1}$, отображающие точки множества $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$.

Очевидно, для любых $g, g' \in \mathcal{K}$ либо $\text{Orb}(g) = \text{Orb}(g')$, либо $\text{Orb}(g) \cap \text{Orb}(g') = \emptyset$. Далее будем считать, что множество $\mathcal{K}$ состоит из одной орбиты (все результаты без труда переносятся на общий случай, когда $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа непересекающихся орбит). Очевидно, множество (орбита) $\mathcal{K}$ состоит из N точек; обозначим их через g_j , $j = 1, \dots, N$.

Будем считать ε настолько малым (см. ниже замечание 1.3), чтобы существовали окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ точек $g_j \in \mathcal{K}$ такие, что $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j) \supset \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и

- 1) в окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ граница ∂G совпадает с некоторым углом;
- 2) $\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)} \cap \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)} = \emptyset$ для любых $g_j, g_k \in \mathcal{K}$, $k \neq j$;
- 3) если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \subset \mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$.

Для каждой точки $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ зафиксируем преобразование $y \mapsto y'(g_j)$, представляющее собой сдвиг на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворот на некоторый угол и переводящее множество $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ в окрестность нуля $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$, а $G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ и $\Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ соответственно в пересечение плоского угла $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, |\omega| < \omega_j\}$ с окрестностью $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ и пересечение стороны $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \omega = (-1)^\sigma \omega_j\}$ ($\sigma = 1$ или $\sigma = 2$) угла K_j с окрестностью $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$. Здесь (ω, r) — полярные координаты точки y , $0 < \omega_j < \pi$.

УСЛОВИЕ 1.1. Преобразованию $\Omega_{is}(y)$, $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S_i$, при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$, в новой системе координат $\{y'\}$ соответствует поворот и растяжение вектора y' .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Условие 1.1 совместно с условием $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$ означает, что если $g \in \Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}) \cap \overline{\Gamma_j} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, то кривые $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ и $\overline{\Gamma_j}$ пересекаются в точке g под ненулевым углом.

Выберем число ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(g_k) \subset \Omega_{is}(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j))$. Рассмотрим функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\zeta(y) = 1, \quad y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(\mathcal{K}), \quad \text{supp } \zeta \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K}). \quad (1.5)$$

Введем нелокальные операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{i\mu}^1 u &= \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)) (\Omega_{is}(y)), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \\ \mathbf{B}_{i\mu}^1 u &= 0, \quad y \in \Gamma_i \setminus (\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \end{aligned}$$

(запись $(B_{i\mu s}(y, D_y)u)(\Omega_{is}(y))$ означает, что выражение $B_{i\mu s}(x, D_x)u(x)$ берется при значении аргумента $x = \Omega_{is}(y)$). Поскольку $\mathbf{B}_{i\mu}^1 u = 0$, если

$$\text{supp } u \subset \overline{G} \setminus \overline{\theta_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})},$$

будем говорить, что операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ соответствуют нелокальным слагаемым с носителем вблизи множества $\mathcal{K}$.

Для $\rho > 0$ обозначим $G_\rho = \{y \in G : \text{dist}(y, \partial G) > \rho\}$. Рассмотрим операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^2$, удовлетворяющие следующему условию (ср. [13], [18], [22]).

УСЛОВИЕ 1.2. *Существуют числа $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что для всех*

$$u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\theta_{\kappa_1}(\mathcal{K})}) \cap W^{2m}(G_\rho)$$

выполнены неравенства

$$\|\mathbf{B}_{i\mu}^2 u\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leq c_1 \|u\|_{W^{2m}(G \setminus \overline{\theta_{\kappa_1}(\mathcal{K})})}, \quad (1.6)$$

$$\|\mathbf{B}_{i\mu}^2 u\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\theta_{\kappa_2}(\mathcal{K})})} \leq c_2 \|u\|_{W^{2m}(G_\rho)}; \quad (1.7)$$

здесь $i = 1, \dots, N$, $\mu = 1, \dots, m$, $c_1, c_2 > 0$.

Из неравенства (1.6), в частности, следует, что $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u = 0$, если $\text{supp } u \subset \theta_{\kappa_1}(\mathcal{K})$. Поэтому будем говорить, что операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ соответствуют нелокальным слагаемым с носителем вне множества $\mathcal{K}$.

Условия 1.1 и 1.2 будем предполагать выполненными на протяжении всей статьи.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathbf{P}(y, D_y)u = f_0(y), \quad y \in G, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B}_{i\mu} u \equiv \mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u = 0, \quad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (1.9)$$

где $f_0 \in L_2(G)$. Введем пространство $W_B^m(G)$, состоящее из функций $u \in W^m(G)$, удовлетворяющих однородным нелокальным условиям (1.9): $\mathbf{B}_{i\mu} u = 0$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}$: $\text{Dom}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \rightarrow L_2(G)$, действующий в пространстве распределений $\mathcal{D}'(G)$ по формуле

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y, D_y)u, \quad u \in \text{Dom}(\mathbf{P}) = \{u \in W_B^m(G) : \mathbf{P}(y, D_y)u \in L_2(G)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция u называется обобщенным решением задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$, если $u \in \text{Dom}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u = f_0$.

Можно также дать другое, эквивалентное, определение обобщенного решения. Для этого запишем оператор $\mathbf{P}(y, D_y)$ в дивергентной форме:

$$\mathbf{P}(y, D_y) = \sum_{0 \leq |\xi|, |\beta| \leq m} D^\beta p_{\xi\beta}(y) D^\xi,$$

где $p_{\xi\beta}$ – бесконечно дифференцируемые функции.

Для всякого множества $X \in \mathbb{R}^2$, имеющего непустую внутренность, будем обозначать через $C_0^\infty(X)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{X}$ функций с компактными носителями, содержащимися в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция u называется *обобщенным решением* задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$, если $u \in W_B^m(G)$ и для всех $v \in C_0^\infty(G)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{0 \leq |\xi|, |\beta| \leq m} \int_G p_{\xi\beta}(y) D^\xi u \overline{D^\beta v} dy = \int_G f_0 \overline{v} dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Обобщенные решения априори принадлежат пространству $W^m(G)$, тогда как условие 1.2 сформулировано для функций, принадлежащих пространству W^{2m} внутри области и вблизи гладкой части границы. Такая формулировка оправдана тем, что всякое обобщенное решение в действительности принадлежит пространству W^{2m} вне сколь угодно малой окрестности множества $\mathcal{K}$ (см. ниже лемму 2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Выше мы предположили, что число ε достаточно мало (тогда как $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ могут быть произвольными). Покажем, что это не ограничивает общности. Пусть имеется число $\widehat{\varepsilon}$, $0 < \widehat{\varepsilon} < \varepsilon$. Выберем число $\widehat{\varepsilon}_0$, $0 < \widehat{\varepsilon}_0 \leq \widehat{\varepsilon}$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\theta_{\widehat{\varepsilon}_0}(g_k) \subset \Omega_{is}(\theta_{\widehat{\varepsilon}}(g_j))$. Рассмотрим функцию $\widehat{\zeta} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\widehat{\zeta}(y) = 1$ при $y \in \theta_{\widehat{\varepsilon}_0/2}(\mathcal{K})$ и $\text{supp } \widehat{\zeta} \subset \theta_{\widehat{\varepsilon}_0}(\mathcal{K})$. Введем операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{i\mu}^1 u &= \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u))(\Omega_{is}(y)) \quad \text{при } y \in \Gamma_i \cap \theta_\varepsilon(\mathcal{K}), \\ \mathbf{B}_{i\mu}^1 u &= 0 \quad \text{при } y \in \Gamma_i \setminus (\Gamma_i \cap \theta_\varepsilon(\mathcal{K})). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + \mathbf{B}_{i\mu}^2 = \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^1 + \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^2,$$

где $\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^2 = \mathbf{B}_{i\mu}^1 - \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^1 + \mathbf{B}_{i\mu}^2$. Так как $\mathbf{B}_{i\mu}^1 u - \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^1 u = 0$ вблизи множества $\mathcal{K}$, то оператор $\mathbf{B}_{i\mu}^1 - \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}^1$ удовлетворяет при соответствующих $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ условию 1.2 (более подробно см. [22, § 1]). Таким образом, число ε всегда может быть выбрано настолько малым, насколько нам требуется. При этом, однако, следует иметь в виду, что оператор $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ и значения $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ могут измениться.

1.2. Пример нелокальной задачи. Модельным для нас может служить следующий пример.

ПРИМЕР 1.1. Пусть операторы $\mathbf{P}(y, D_y)$ и $B_{i\mu s}(y, D_y)$ те же, что и выше. Пусть $\Omega_{is}, i = 1, \dots, N, s = 1, \dots, S_i$, — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность θ_i (всей) кривой Γ_i на множество $\Omega_{is}(\theta_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$. Рассмотрим нелокальную задачу

$$\mathbf{P}(y, D_y)u = f_0(y), \quad y \in G, \quad (1.10)$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u(y)|_{\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)u)(\Omega_{is}(y))|_{\Gamma_i} = 0, \quad (1.11)$$

$$y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Подчеркнем: изначально мы не предполагаем, что преобразования Ω_{is} удовлетворяют условию (1.4); однако далее мы представим нелокальные операторы в виде суммы операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^0$, $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^2$, причем преобразования, которые войдут в определение операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^1$, будут удовлетворять условию (1.4). Выберем для этого ε настолько малым, чтобы для любой точки $g \in \mathcal{K}$ множество $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)}$ пересекалось с дугой $\overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$ только, если $g \in \overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$. Если для $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ выполнено $\Omega_{is}(g) \in \mathcal{K}$, то наложим на преобразование $\Omega_{is}(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g)$ условие 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Согласно замечанию 1.1 условие 1.1 есть ограничение на геометрическую структуру носителя нелокальных членов вблизи множества $\mathcal{K}$. Если же $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}) \subset \partial G \setminus \mathcal{K}$, то на характер подхода кривой $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ к границе ∂G (так же, как и в работах [13], [17]) никаких ограничений не налагается.

Обозначим через $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ функцию, удовлетворяющую соотношениям (1.5), и введем операторы

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{i\mu}^0 u &= B_{i\mu 0}(y, D_y)u(y)|_{\Gamma_i}, \quad \mathbf{B}_{i\mu}^1 u = \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u))(\Omega_{is}(y))|_{\Gamma_i}, \\ \mathbf{B}_{i\mu}^2 u &= \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)((1 - \zeta)u))(\Omega_{is}(y))|_{\Gamma_i}\end{aligned}$$

(см. рис. 1.1, 1.2).

Рис. 1.1

Так как носитель функции ζ сосредоточен вблизи множества $\mathcal{K}$, можно считать, что преобразования Ω_{is} , фигурирующие в определении оператора $\mathbf{B}_{i\mu}^1$, заданы в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$ и удовлетворяют условию (1.4). Кроме того, согласно [22, п. 1.2] оператор $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ удовлетворяет условию 1.2. Следовательно, задача (1.10), (1.11) представима в виде (1.8), (1.9).

1.3. Нелокальные задачи вблизи множества $\mathcal{K}$. При изучении задачи (1.8), (1.9) особое внимание следует уделять поведению решений в окрестности множества $\mathcal{K}$ точек сопряжения нелокальных условий. Выпишем соответствующие модельные задачи.

Рис. 1.2

Обозначим $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ через $u_j(y)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(g_j)$, $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда нелокальная задача (1.8), (1.9) в ε -окрестности множества (орбиты) $\mathcal{K}$ примет вид

$$\mathbf{P}(y, D_y)u_j = f_0(y), \quad y \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(g_j) \cap G,$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u_j(y)|_{\mathcal{O}_{\varepsilon}(g_j) \cap \Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} (B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u_k))(\Omega_{is}(y))|_{\mathcal{O}_{\varepsilon}(g_j) \cap \Gamma_i} = f_{i\mu}(y),$$

$$y \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(g_j) \cap \Gamma_i, \quad i \in \{1 \leq i \leq N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

где $f_{i\mu} = -\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$.

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ – описанные в п. 1.1 преобразования координат. Обозначим $K_j^{\varepsilon} = K_j \cap \mathcal{O}_{\varepsilon}(0)$, $\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon} = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_{\varepsilon}(0)$, введем функции

$$U_j(y') = u_j(y(y')), \quad f_j(y') = f_0(y(y')), \quad y' \in K_j^{\varepsilon}, \quad f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')), \quad y' \in \gamma_{j\sigma}^{\varepsilon},$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ переводит Γ_i в сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j , и переобозначим y' через y . Тогда в силу условия 1.1 задача (1.8), (1.9) примет вид

$$\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j = f_j(y), \quad y \in K_j^{\varepsilon}, \quad (1.12)$$

$$\sum_{k,s} (B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = f_{j\sigma\mu}(y), \quad y \in \gamma_{j\sigma}^{\varepsilon}. \quad (1.13)$$

Здесь (и далее, если не оговорено противное) $j, k = 1, \dots, N$, $\sigma = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 0, \dots, S_{j\sigma k}$; $\mathbf{P}_j(y, D_y)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)$ – операторы порядков $2m$ и $m_{j\sigma\mu}$, $m_{j\sigma\mu} \leq m - 1$, соответственно с переменными коэффициентами класса C^{∞} :

$$\mathbf{P}_j(y, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} p_{j\alpha}(y) D_y^{\alpha}, \quad B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}(y) D_y^{\alpha};$$

$\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ – оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и растяжения в $\chi_{j\sigma ks} > 0$ раз в плоскости $\{y\}$, причем $|(-1)^{\sigma} b_j + \omega_{j\sigma ks}| < b_k$, если $(k, s) \neq (j, 0)$ (см. замечание 1.1), и $\omega_{j\sigma j0} = 0$, $\chi_{j\sigma j0} = 1$ (т.е. $\mathcal{G}_{j\sigma j0}y \equiv y$).

2. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач. Сформулируем основной результат, доказательству которого будет посвящен этот раздел.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть оператор $\mathbf{P}(y, D_y)$ собственнo эллиптичен на $\overline{G}$ и для всех $i = 1, \dots, N$ система операторов $\{B_{i\mu 0}(y, D_y)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к $\mathbf{P}(y, D_y)$ на дуге $\overline{\Gamma_i}$. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2. Тогда оператор $\mathbf{P}$ фредгольмов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Задаче (1.8), (1.9) можно сопоставить ограниченный оператор, действующий из $W^{2m}(G)$ в $L_2(G)$. Такой оператор изучен в [22], [23]: показано, что в отличие от рассматриваемого случая на его фредгольмовость влияют спектральные свойства некоторых вспомогательных нелокальных задач с параметром и выполнение определенных алгебраических соотношений между операторами $\mathbf{P}(y, D_y)$, $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ в точках множества $\mathcal{K}$.

2.1. Конечномерность ядра. В этом пункте мы установим конечномерность ядра оператора $\mathbf{P}$. Для этого предварительно исследуем гладкость обобщенных решений задачи (1.8), (1.9) сначала вне некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$, а затем вблизи множества $\mathcal{K}$. Следующая лемма является обобщением части 1 теоремы 5 в [24].

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнено условие 1.2. Пусть $u \in W^m(G)$ – обобщенное решение задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$. Тогда

$$u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\theta_\delta(\mathcal{K})}) \quad \text{при любом } \delta > 0. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим через $W_{\text{loc}}^k(G)$ пространство распределений v на G таких, что $\psi v \in W^k(G)$ для всех $\psi \in C_0^\infty(G)$. По теореме 3.2 из [25, гл. 2] имеем

$$u \in W_{\text{loc}}^{2m}(G). \quad (2.2)$$

Отсюда и из оценки (1.7) следует, что

$$\mathbf{B}_{i\mu}^2 u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\theta_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}). \quad (2.3)$$

Зафиксируем произвольную точку $g \in \Gamma_i \setminus \overline{\theta_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\overline{\theta_\delta(g) \cap \Gamma_i} \subset \Gamma_i \setminus \overline{\theta_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}. \quad (2.4)$$

Тогда в окрестности $\theta_\delta(g)$ функция u есть решение “локальной” задачи

$$\mathbf{P}(y, D_y)u = f_0(y), \quad y \in \theta_\delta(g) \cap G, \quad (2.5)$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u = f'_{i\mu}(y), \quad y \in \theta_\delta(g) \cap \Gamma_i, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (2.6)$$

где $f'_{i\mu}(y) = -\mathbf{B}_{i\mu}^1 u(y) - \mathbf{B}_{i\mu}^2 u(y)$, $y \in \theta_\delta(g) \cap \Gamma_i$. В силу соотношений (2.2)–(2.4) и определения оператора $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ имеем $f'_{i\mu} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\theta_\delta(g) \cap \Gamma_i)$.

Применяя к задаче (2.5), (2.6) теорему 8.2 из [25, гл. 2]¹, получим, что

$$u \in W^{2m}(\bar{\theta}_{\delta/2}(g) \cap G). \quad (2.7)$$

Используя метод разбиения единицы, из (2.2) и (2.7) выводим

$$u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\theta_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}). \quad (2.8)$$

2) Из включения (2.8) и неравенства (1.6) следует, что

$$\mathbf{B}_{i\mu}^2 u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i). \quad (2.9)$$

Учитывая (2.9), мы можем повторить рассуждения п. 1) доказательства для произвольной точки $g \in \Gamma_i$ и $\delta > 0$ такого, что

$$\overline{\theta_\delta(g) \cap \Gamma_i} \subset \Gamma_i.$$

В результате получим включение (2.7), справедливое уже для произвольной точки $g \in \Gamma_i$. Отсюда и из (2.2), используя метод разбиения единицы, выводим (2.1).

Теперь изучим гладкость решений задачи (1.8), (1.9) в окрестности множества $\mathcal{K}$. Так как вблизи множества $\mathcal{K}$ обобщенные решения могут иметь степенные особенности [13], то решения естественно рассматривать в соответствующих весовых пространствах. Введем эти пространства.

Пусть либо $Q = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, |\omega| < b\}$, либо $Q = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < d, |\omega| < b\}$, $0 < b < \pi$, $d > 0$, либо $Q = G$; в первом и втором случаях обозначим через $\mathcal{M}$ множество $\{0\}$, а в третьем случае – множество $\mathcal{K}$. Введем пространство $H_a^k(Q)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{Q} \setminus \mathcal{M})$ по норме

$$\|w\|_{H_a^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q \rho^{2(a-k+|\alpha|)} |D_y^\alpha w|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ – целое, $\rho = \rho(y) = \text{dist}(y, \mathcal{M})$. Через $H_a^{k-1/2}(\gamma)$ при $k \geq 1$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\gamma \subset \bar{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\gamma)} = \inf \|w\|_{H_a^k(Q)}, \quad w \in H_a^k(Q) : w|_\gamma = \psi. \quad (2.10)$$

Пусть u – обобщенное решение задачи (1.8), (1.9), а $U_j(y') = u_j(y(y'))$, $j = 1, \dots, N$, – функции, соответствующие множеству (орбите) $\mathcal{K}$ и удовлетворяющие задаче (1.12), (1.13) с правой частью $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$ (см. п. 1.3).

¹В теореме 8.2 из [25, гл. 2] дополнительно предполагается, что операторы $B_{i\mu 0}(y, D_y)$ нормальны на Γ_i , а их порядки различны. Однако нетрудно проверить, что упомянутая теорема верна и без этого предположения (см. [25, гл. 2, п. 8.3]).

Положим $d_1 = \min\{\chi_{j\sigma ks}, 1\}/2$, $d_2 = 2 \max\{\chi_{j\sigma ks}, 1\}$. Будем считать ε настолько малым, что $d_2\varepsilon < \varepsilon_1$. Тогда в силу леммы 2.1

$$U_j \in W^{2m}(K_j^{d_2\varepsilon} \cap \{|y| > \delta\}) \quad \text{при любом } \delta > 0. \quad (2.11)$$

Далее, из включения $U_j \in W^m(K_j^{d_2\varepsilon})$ и из [26, лемма 5.2] следует, что

$$U_j \in H_{a-m}^m(K_j^{d_2\varepsilon}) \subset H_{a-2m}^0(K_j^{d_2\varepsilon}), \quad a > 2m - 1. \quad (2.12)$$

Наконец, $f_j \in L_2(K_j^\varepsilon)$ и в силу леммы 2.1 и оценки (1.6) $f_{j\sigma\mu} \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)$. Следовательно, согласно [26, лемма 5.2]

$$f_j \in H_a^0(K_j^\varepsilon), \quad f_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon), \quad a > 2m - 1. \quad (2.13)$$

При помощи следующих двух лемм мы покажем, что из соотношений (2.11)–(2.13) вытекает включение $U_j \in H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$.

Обозначим $K_{jq} = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q}/2 < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q}\}$, где $q = 0, \dots, 4$.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для всех $U \in \prod_j W^{2m}(K_{j0})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_j \|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} &\leq c \sum_j \left\{ \|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j\|_{L_2(K_{j1})} \right. \\ &\quad + \sum_{\sigma, \mu} \|\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D_y)U|_{\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}})} \\ &\quad \left. + \|U_j\|_{L_2(K_{j1})} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $c > 0$ не зависит от U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общей теории эллиптических уравнений следует, что

$$\begin{aligned} \|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} &\leq k_1 \left(\|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j\|_{L_2(K_{j3})} \right. \\ &\quad + \sum_{\sigma, \mu} \|B_{j\sigma\mu j0}(y, D_y)U_j|_{\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j3}})} \\ &\quad \left. + \|U_j\|_{L_2(K_{j3})} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть $(k, s) \neq (j, 0)$. Так как при этом $\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma}) \cap \overline{K_{k2}}$ лежит строго внутри области K_{k1} , используя непрерывность оператора следа в пространствах Соболева, аналогично (2.15) получаем

$$\begin{aligned} &\|B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j3}})} \\ &\leq k_2 \|B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k|_{\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma}) \cap \overline{K_{k2}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma}) \cap \overline{K_{k2}})} \\ &\leq k_3 (\|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_k\|_{L_2(K_{k1})} + \|U_k\|_{L_2(K_{k1})}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из оценок (2.15) и (2.16) вытекает (2.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть нормы в $C^0(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$ операторов $\mathbf{P}_j(y, D_y)$ и нормы в $C^{2m-m_{j\sigma\mu}}(\overline{K_{j0}})$ коэффициентов $b_{j\sigma\mu k s \alpha}$ операторов $B_{j\sigma\mu k s}(y, D_y)$ ограничены константой C . Пусть той же константой C ограничены нормы в $C^1(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$, $|\alpha| = 2m$, при старших производных в операторах $\mathbf{P}_j(y, D_y)$. Тогда константа c в неравенстве (2.14) зависит только от C , от константы A в (1.1) и от константы D в (1.2).

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнено условие 1.1. Предположим, что функция U удовлетворяет соотношениям (2.11), (2.12) и является решением задачи (1.12), (1.13) с правой частью $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$, удовлетворяющей соотношениям (2.13). Тогда $U \in \Pi_j H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$ и

$$\begin{aligned} \sum_j \|U_j\|_{H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})} &\leq c \sum_j \left\{ \|f_j\|_{H_a^0(K_j^{\varepsilon})} + \sum_{\sigma, \mu} \|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon})} \right. \\ &\quad \left. + \|U_j\|_{H_{a-2m}^0(K_j^{\varepsilon})} \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $c > 0$ не зависит от U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K_{jq}^s = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q} 2^{-s-1} < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q} 2^{-s}\}$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно,

$$\bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j1}^s = K_j^{\varepsilon}, \quad \bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j4}^s = K_j^{\varepsilon/d_2^3}. \quad (2.18)$$

Положим $U_j^s(y') = U_j(2^{-s}y')$ и сделаем замену переменных $y = 2^{-s}y'$ в уравнении

$$\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m} p_{j\alpha}(y) D_y^{\alpha} U_j(y) = f_j(y), \quad y \in K_{j1}^s,$$

и в нелокальных условиях

$$\sum_{k, s} \sum_{|\alpha| \leq m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu k s \alpha}(x) D_x^{\alpha} U_j(x) \Big|_{x=\mathcal{G}_{j\sigma k s} y} = f_{j\sigma\mu}(y), \quad y \in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^s};$$

умножая обе части первого из получившихся равенств на $2^{-s \cdot 2m}$, а второго — на $2^{-s \cdot m_{j\sigma\mu}}$, имеем

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} p_{j\alpha}^s(y') 2^{s(|\alpha|-2m)} D_{y'}^{\alpha} U_j^s(y') = 2^{-s \cdot 2m} f_j^s(y'), \quad y' \in K_{j1}^0, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k, s} \sum_{|\alpha| \leq m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu k s \alpha}^s(x') 2^{s(|\alpha|-m_{j\sigma\mu})} D_{x'}^{\alpha} U_j^s(x') \Big|_{x'=\mathcal{G}_{j\sigma k s} y'} &= 2^{-s \cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s(y'), \\ y' &\in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^0}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $p_{j\alpha}^s(y') = p_{j\alpha}(2^{-s}y')$, $b_{j\sigma\mu k s \alpha}^s(x') = b_{j\sigma\mu k s \alpha}(2^{-s}x')$, $f_j^s(y') = f_j(2^{-s}y')$ и $f_{j\sigma\mu}^s(y') = f_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$.

Применяя к задаче (2.19), (2.20) лемму 2.2, получим

$$\begin{aligned} \sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} &\leq k_1 \sum_j \left\{ \|2^{-s \cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma, \mu} \|2^{-s \cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^0})} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где константа k_1 в силу замечания 2.2 не зависит от s .

Обозначим через $\Phi_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям: $\Phi_{j\sigma\mu}|_{\gamma_{j\sigma}^\varepsilon} = f_{j\sigma\mu}$ и

$$\|\Phi_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j^\varepsilon)} \leq 2\|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)} \quad (2.22)$$

(существование такой функции вытекает из (2.10)). Тогда $\Phi_{j\sigma\mu}^s|_{\gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^0}} = f_{j\sigma\mu}^s$, где $\Phi_{j\sigma\mu}^s(y') = \Phi_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$. Следовательно, из (2.21) и (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} &\leq k_1 \sum_j \left\{ \|2^{-s \cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma, \mu} \|2^{-s \cdot m_{j\sigma\mu}} \Phi_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_{j1}^0)} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Делая в неравенстве (2.23) обратную замену переменных $y' = 2^s y$, получим

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|2^{-s|\alpha|} D_y^\alpha U_j\|_{L_2(K_{j4}^s)} &\leq k_1 \sum_j \left\{ \|2^{-s \cdot 2m} f_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma, \mu} \sum_{|\alpha| \leq 2m-m_{j\sigma\mu}} \|2^{-s(|\alpha|+m_{j\sigma\mu})} \Phi_{j\sigma\mu}\|_{L_2(K_{j1}^s)} + \|U_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Умножая неравенство (2.24) на $2^{-s(a-2m)}$, суммируя по s и учитывая (2.22) и (2.18), выводим (2.17).

Лемма 2.3 совместно с леммой 2.1 дает $u \in H_a^{2m}(G)$, $a > 2m-1$, где u — произвольное обобщенное решение задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$.

Из [16, лемма 2.1] и [17, теорема 3.2] следует, что при почти всех $a > 2m-1$ множество решений из $H_a^{2m}(G)$ задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 = 0$ образует конечномерное пространство. Таким образом, доказан следующий результат.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2. Тогда ядро оператора $\mathbf{P}$ конечномерно.

2.2. Замкнутость оператора и его образа. Конечномерность коядра. Для доказательства фредгольмовости оператора $\mathbf{P}$ нам потребуется рассмотреть задачу (1.8), (1.9) в пространствах с весом a таким, что $0 < a \leq m$. Трудность здесь заключается в том, что из принадлежности $u \in H_a^{2m}(G)$ теперь, вообще говоря, не следует, что $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ принадлежит $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$; поэтому и сумма $\mathbf{B}_{i\mu} u = \mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ может не принадлежать $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Можно лишь гарантировать, что $\mathbf{B}_{i\mu} u \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $a' > 2m-1$ (это следует из принадлежности $\mathbf{B}_{i\mu} u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ и [26, лемма 5.2]). Однако в [23, §6] доказано, что

$$\{\mathbf{P}(y, D_y)u, \mathbf{B}_{i\mu} u\} \in \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma) \quad \text{при всех } u \in H_a^{2m}(G), \quad a > 0,$$

где $\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) = H_a^0(G) \times \prod_{i,\mu} H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, а $\mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)$ – некоторое *конечномерное* пространство, вложенное в $\{0\} \times \prod_{i,\mu} H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ при любом $a' > 2m-1$, т.е. пространство $\mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)$ содержит лишь функции вида $\{0, f_{i\mu}\}$, $f_{i\mu} \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $f_{i\mu} \notin H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Зафиксируем некоторое число $a' > 2m-1$. Тогда любая функция $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)$ представима единственным образом в виде $\{f_0, f_{i\mu}\} = \{f_0, f_{i\mu}^1\} + \{0, f_{i\mu}^2\}$, где $\{f_0, f_{i\mu}^1\} \in \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma)$, $\{0, f_{i\mu}^2\} \in \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)$, и ее норма равна

$$\|\{f_0, f_{i\mu}\}\|_{\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)} = \left(\|\{f_0, f_{i\mu}^1\}\|_{\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma)}^2 + \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}^2\|_{H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

Более того, по теореме 6.1 из [23] оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}(y, D_y), \mathbf{B}_{i\mu}\}: H_a^{2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma), \quad a > 0,$$

фредгольмов при почти всех $a > 0$. Другими словами, если $u \in H_a^{2m}(G)$, то $\mathbf{L}_a u$ “принадлежит” пространству $\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma)$ с точностью до функции вида $\{0, f_{i\mu}\}$ из *конечномерного* пространства $\mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)$.

Используя оператор $\mathbf{L}_a$, докажем следующий результат.

ЛЕММА 2.5. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2. Тогда оператор $\mathbf{P}$ замкнут, образ $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ замкнут и $\text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{P}) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим при $0 < a \leq m$ вспомогательный неограниченный оператор $\mathbf{P}_a: \text{Dom}(\mathbf{P}_a) \subset L_2(G) \rightarrow L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}_a u = \mathbf{P}(y, D_y)u, \quad u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_a) = \{u \in H_a^{2m}(G) : \mathbf{B}_{i\mu} u = 0, \mathbf{P}(y, D_y)u \in L_2(G)\}.$$

Зафиксируем такое a , $0 < a \leq m$, чтобы оператор $\mathbf{L}_a$ был фредгольмов. Покажем, что тогда и оператор $\mathbf{P}_a$ будет фредгольмов.

Из фредгольмовости $\mathbf{L}_a$, компактности вложения $H_a^{2m}(G) \subset H_a^0(G)$ (см. [15, лемма 3.5]) и теоремы 7.1 из [27] следует, что для всех $u \in H_a^{2m}(G)$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leq k_1 (\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)} + \|u\|_{H_a^0(G)}). \quad (2.25)$$

Пусть теперь $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_a)$; тогда $\mathbf{L}_a u = \{\mathbf{P}(y, D_y)u, 0\}$, $\mathbf{P}(y, D_y)u \in L_2(G) \subset H_a^0(G)$ и, следовательно,

$$\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G, \Gamma)} = \|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{H_a^0(G)}.$$

Отсюда и из (2.25), учитывая непрерывность вложения $L_2(G) \subset H_a^0(G)$ при $a > 0$, получим

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leq k_2 (\|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{H_a^0(G)}) \leq k_3 (\|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{L_2(G)}), \quad (2.26)$$

где $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_a)$. Из неравенства (2.26) вытекает, что оператор $\mathbf{P}_a$ замкнут. Следовательно, снова используя (2.26) и теорему 7.1 из [27], получим что $\dim \ker \mathbf{P}_a < \infty$ (ясно, что $\ker \mathbf{P}_a = \ker \mathbf{L}_a$) и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$ замкнут.

Рассмотрим произвольную функцию $f_0 \in L_2(G)$. Очевидно, $f_0 \in H_a^0(G)$. В силу [23, следствие 6.1] существуют функционалы $F_1, \dots, F_{q_0}$ из сопряженного пространства $\mathcal{H}_a^0(G, \Gamma)^*$ такие, что если $\langle \{f_0, 0\}, F_q \rangle = 0$, $q = 1, \dots, q_0$, то задача (1.8), (1.9) имеет решение $u \in H_a^{2m}(G)$. Так как

$$|\langle \{f_0, 0\}, F_q \rangle| \leq k_4 \|f_0\|_{H_a^0(G)} \leq k_5 \|f_0\|_{L_2(G)},$$

по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существуют функции $f_1, \dots, f_{q_0} \in L_2(G)$ такие, что $\langle \{f_0, 0\}, F_q \rangle = (f_0, f_q)_{L_2(G)}$, $q = 1, \dots, q_0$. Следовательно, $\text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \leq q_0$. Итак, оператор $\mathbf{P}_a$ фредгольмов.

2) Поскольку $H_a^{2m}(G) \subset H_{a-m}^m(G) \subset W^m(G)$ при $a \leq m$, имеет место соотношение

$$\mathbf{P}_a \subset \mathbf{P}. \quad (2.27)$$

Из (2.27), в частности, следует, что образ $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ замкнут и $\text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{P}) \leq \text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \leq q_0$.

Осталось доказать, что $\mathbf{P}$ замкнут². Обозначим через $h_1, \dots, h_k$ базис в пространстве

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{P}) \ominus \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

Тогда существуют функции $v_1, \dots, v_k \in \text{Dom}(\mathbf{P})$ такие, что $\mathbf{P}v_j = h_j$, $j = 1, \dots, k$. Так как $h_j \notin \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, то $v_j \notin \text{Dom}(\mathbf{P}_a)$. Ясно также, что функции $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы, так как линейно независимы функции $h_1, \dots, h_k$.

Рассмотрим конечномерное пространство

$$\mathcal{N} = \text{Span}(v_1, \dots, v_k, \ker \mathbf{P}) \ominus \ker \mathbf{P}_a.$$

²Отметим, что из замкнутости образа некоторого оператора $\mathbf{P}$ в гильбертовом пространстве и конечномерности его ядра и коядра, вообще говоря, не следует замкнутость самого оператора $\mathbf{P}$; это можно показать, используя рассуждения, близкие к приведенным, например, в [28, гл. 2, п. 18]. Однако если дополнительно предположить, что оператор $\mathbf{P}$ является расширением фредгольмова оператора, то, как мы увидим, $\mathbf{P}$ будет замкнут.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{N} \cap \text{Dom } \mathbf{P}_a = \{0\}$. Действительно, если $u \in \mathcal{N} \cap \text{Dom } \mathbf{P}_a$, то

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + v,$$

где α_i — некоторые константы, $v \in \ker \mathbf{P}$. Тогда, учитывая (2.27), имеем

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i = \mathbf{P}u = \mathbf{P}_a u \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

Следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, и, значит, $u = v$. Снова используя (2.27), видим, что $u = v \in \ker \mathbf{P}_a$. Отсюда, по определению пространства $\mathcal{N}$, получаем $u = 0$.

Обозначим через $\text{Gr } \mathbf{P}$ ($\text{Gr } \mathbf{P}_a$) график оператора $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$). Как известно, оператор $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$) замкнут тогда и только тогда, когда замкнут его график $\text{Gr } \mathbf{P}$ ($\text{Gr } \mathbf{P}_a$) в $L_2(G) \times L_2(G)$.

Так как $\text{Gr } \mathbf{P}_a$ замкнут (как график замкнутого оператора) и $\text{Gr } \mathbf{P}_a \subset \text{Gr } \mathbf{P}$, а пространства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$ конечномерны, то для доказательства замкнутости оператора $\mathbf{P}$ достаточно показать, что

$$\text{Gr } \mathbf{P} \subset \text{Gr } \mathbf{P}_a \dot{+} (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp). \quad (2.28)$$

Очевидно, сумма в (2.28) действительно является прямой суммой: если

$$(u, f) \in \text{Gr } \mathbf{P}_a \cap (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp),$$

то $u \in \text{Dom } \mathbf{P}_a \cap \mathcal{N} = \{0\}$ и, следовательно, $(u, f) = (u, \mathbf{P}_a u) = (0, 0)$.

Далее, пусть $(u, f) \in \text{Gr } \mathbf{P}$, т.е. $u \in \text{Dom } \mathbf{P}$ и $f = \mathbf{P}u$. Представим функцию f в виде суммы

$$f = f_1 + f_2,$$

где $f_1 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, $f_2 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Выберем элемент $u_1 \in \text{Dom}(\mathbf{P}_a)$ такой, что $\mathbf{P}_a u_1 = f_1$. Тогда $u_2 = u - u_1 \in \text{Dom}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u_2 = f_2$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_2 \perp \ker \mathbf{P}_a; \quad (2.29)$$

если это соотношение не выполнено, то следует рассмотреть проекцию u_{2a} функции u_2 на $\ker \mathbf{P}_a$ и заменить u_1 на $u_1 + u_{2a}$, а u_2 — на $u_2 - u_{2a}$. Очевидно, $(u_1, f_1) \in \text{Gr } \mathbf{P}_a$ и, учитывая (2.29), $(u_2, f_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Таким образом, соотношение (2.28) и вся лемма доказаны.

Из лемм 2.4 и 2.5 вытекает теорема 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Используя результаты работы [29], можно показать, что теорема 2.1 справедлива и в том случае, когда преобразования Ω_{is} *нелинейны* вблизи точек множества $\mathcal{K}$, а их линейные части удовлетворяют условию 1.1.

Автор выражает благодарность профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). V. 3. Reale Accad. Lincei: Roma, 1909. P. 116–124.
- [2] Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
- [3] Picone M. Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Acad. Nazionale Lincei. Atti dei Convegni. 1932. V. 15. P. 942–948.
- [4] Carleman T. Sur la théorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongress. V. 1. Zürich, 1932. P. 132–151.
- [5] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [6] Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 187–246.
- [7] Browder F. Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 735–750.
- [8] Житарапу Н. В., Эйдельман С. Д. О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений // Матем. исслед. 1971. Т. 6. № 2 (20). С. 63–73.
- [9] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб. матем. ж. 1972. Т. 13. № 1. С. 165–181.
- [10] Кишкис К. Ю. Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.
- [11] Гущин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
- [12] Гущин А. К. Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.
- [13] Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.
- [14] Skubachevskii A. L. Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russian J. Math. Phys. 2001. V. 8. P. 365–374.
- [15] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [16] Скубачевский А. Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
- [17] Скубачевский А. Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
- [18] Skubachevskii A. L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.
- [19] Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
- [20] Feller W. Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.
- [21] Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
- [22] Gurevich P. L. Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I // Russian J. Math. Phys. 2003. V. 10. № 4. P. 436–466.
- [23] Gurevich P. L. Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II // Russian J. Math. Phys. 2004. V. 11. № 1. P. 1–44.
- [24] Скубачевский А. Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1590–1599.

- [25] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [26] Ковалева О. А., Скубачевский А. Л. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 6. С. 882–898.
- [27] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
- [28] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [29] Гуревич П. Л. Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 81–120.

Московский авиационный институт
E-mail: gurevichp@yandex.ru

Поступило
30.03.2004