Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ибрагимов, О задачах линейной дискретной игры преследования, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 707–718

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:26:25

УДК 517.92

О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Г. И. Ибрагимов

В данной работе рассматриваются две задачи линейной дискретной игры преследования. В каждой из них члены последовательности, определяющей управление преследующего, ограничены некоторым заданным положительным числом. В первой задаче члены последовательности, определяющей управление убегающего, ограничены некоторым положительным числом, а во второй задаче – сумма p -х степеней членов этой последовательности ограничена некоторым заданным числом. Для каждой задачи получено необходимое и достаточное условие для возможности завершения преследования из всех точек пространства.

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи. Изучению дифференциальных и дискретных игр преследования посвящено много работ (например, [1]–[12]). Ранее [8], [9] были получены достаточные условия для завершения игры с интегральными ограничениями и для ее дискретного аналога.

В данной работе рассматриваются две задачи линейной дискретной игры преследования. В каждой из них на управление преследующего наложено геометрическое ограничение, а на управление убегающего в первой задаче – геометрическое ограничение, и во второй задаче – суммарное ограничение.

Для каждой задачи получено необходимое и достаточное условие для возможности завершения преследования из всех точек пространства.

Работа продолжает исследования [6], [8], [9] и [11].

Пусть дискретная система описывается рекуррентными уравнениями

$$z(k+1) = Cz(k) - u(k) + v(k), \quad (1)$$

где $z, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, k – номер шага, $k = 1, 2, \dots$, C – постоянная квадратная матрица порядка n , u – управляющий параметр преследования; v – управляющий параметр убегания. Параметр u выбирается в виде последовательности

$$u = u(\cdot) = (u(1), u(2), \dots, u(k), \dots), \quad |u(k)| \leq \rho,$$

где ρ – заданное положительное число. Параметр v выбирается в виде последовательности

$$v = v(\cdot) = (v(1), v(2), \dots, v(k), \dots).$$

При этом рассматриваются два вида ограничений:

1) геометрическое ограничение

$$|v(k)| \leq \sigma, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

2) суммарное ограничение

$$\|v(\cdot)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v(k)|^p \right)^{1/p} \leq \sigma, \quad (3)$$

где p, σ – заданные положительные числа. Таким образом, в этом случае параметр v выбирается в виде последовательности $v = v(\cdot) = (v(1), v(2), \dots, v(k), \dots)$ из замкнутого шара $S(\sigma)$ радиуса σ с центром в начале координат пространства l_p . В ограничении (2) предполагается, что число σ удовлетворяет неравенству $\sigma < \rho$, а в ограничении (3) выполнение этого неравенства не требуется.

Игра (1), (2) (соответственно (1), (3)) считается завершенной, если $z(r) = 0$ для некоторого значения r номера k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в игре (1), (2) (соответственно (1), (3)) из начального положения z_0 возможно *завершение преследования за $N(z_0)$ шагов*, если по любой последовательности $v(\cdot)$, удовлетворяющей ограничению (2) (соответственно (3)), можно построить такую последовательность $u(\cdot) = (u(1), u(2), \dots, u(k), \dots)$, $|u(k)| \leq \rho$, что решение $z = z(\cdot) = \{z(1), z(2), \dots, z(k), \dots\}$ уравнения

$$z(k+1) = Cz(k) - u(k) + v(k), \quad z(1) = z_0,$$

удовлетворяет условию $z(\bar{k}) = 0$, где $1 \leq \bar{k} \leq N(z_0)$. При этом для нахождения значения $u(k)$ параметра u на k -м шаге, $k \geq 1$, разрешается использовать $z(1), z(2), \dots, z(k), v(k)$.

2. Решение задачи 1. В этом разделе дается решение задачи 1. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если все собственные числа матрицы C по модулю не превосходят единицы, то в игре (1), (2) из любого начального положения z_0 возможно завершение преследования за некоторое конечное число шагов $N(z_0)$.

Рассмотрим управляемый дискретный процесс, описываемый уравнением

$$z(k+1) = Cz(k) - \bar{w}(k), \quad z(1) = z_0, \quad (4)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, управляющий параметр $\bar{w}$ выбирается в виде последовательности $\bar{w} = \bar{w}(\cdot) = (\bar{w}(1), \bar{w}(2), \dots, \bar{w}(k), \dots)$, $|\bar{w}(k)| \leq \rho - \sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что в системе (4) из начального положения z_0 возможен *перевод фазовой точки z в начало координат за $N(z_0)$ шагов*, если можно построить такую последовательность $\bar{w}(\cdot)$, $|\bar{w}(k)| \leq \rho - \sigma$, что решение $z = z(\cdot)$ уравнения (4) с начальным условием $z(1) = z_0$ удовлетворяет условию $z(\bar{k}) = 0$, где $1 \leq \bar{k} \leq N(z_0)$.

ЛЕММА 1. Если все собственные числа матрицы C по модулю не превосходят единицы, то в системе (4) из любого начального положения z_0 возможен перевод фазовой точки z в начало координат за некоторое число шагов $N(z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью неособенного действительного преобразования $z = Sx$ систему (4) можно привести к следующему виду:

$$x(k+1) = Jx(k) - w(k), \quad w(k) = S^{-1}\bar{w}(k), \quad x(1) = x_0 = S^{-1}z_0, \quad (5)$$

где $J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_{l_1}, B_0, B_1, \dots, B_{l_2}\}$ (см. приложение). Предполагается, что $|w(k)| \leq \bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ – некоторое положительное число, которое выбирается ниже. Система (5) естественным образом распадается на следующие системы:

$$x_1^i(k+1) = J_i x_1^i(k) - w_1^i(k), \quad i = 0, 1, \dots, l_1, \quad (6)$$

$$x_2^j(k+1) = B_j x_2^j(k) - w_2^j(k), \quad j = 0, 1, \dots, l_2, \quad (7)$$

где x_1^i и w_1^i (соответственно x_2^j и w_2^j) – векторы, составленные из координат векторов x и w , соответствующих клетке Жордана J_i (соответственно B_j).

Покажем возможность перевода фазовой точки x_1^i в начало координат.

1. Система, соответствующая клетке J_0 . Система уравнений

$$x_1^0(k+1) = J_0 x_1^0(k) - w_1^0(k) \quad (8)$$

распадается на скалярные уравнения вида

$$y(k+1) = \lambda y(k) - w(k).$$

Отсюда имеем

$$y(k+1) = \lambda^k y(1) - (\lambda^{k-1} w(1) + \dots + \lambda w(k-1) + w(k)). \quad (9)$$

А. Случай, когда $|\lambda| < 1$. Тогда для некоторого номера k^0 имеем $|\lambda^{k^0} y(1)| \leq \bar{\rho}$. Полагаем

$$w(k) = \begin{cases} \lambda^{k^0} y(1), & k = k^0, \\ 0, & k \neq k^0. \end{cases}$$

Тогда из (9) вытекает

$$y(k^0+1) = \lambda^{k^0} y(1) - w(k^0) = 0$$

и, следовательно, $y(k) = 0, k \geq k^0 + 1$.

Б. Случай, когда $\lambda = 1$. Тогда согласно (9) имеем

$$y(k+1) = y(1) - (w(1) + \dots + w(k-1) + w(k)). \quad (10)$$

Номер k^0 выберем так, чтобы $|y(1)| \leq k^0 \bar{\rho}$. Полагаем

$$w(k) = \begin{cases} y(1)/k^0, & k = 1, 2, \dots, k^0, \\ 0, & k \geq k^0 + 1. \end{cases}$$

Тогда согласно (10) имеем

$$y(k^0 + 1) = y(1) - \frac{y(1)}{k^0} k^0 = 0.$$

В. Случай, когда $\lambda = -1$. Тогда согласно (9) имеем

$$y(k+1) = (-1)^k y(1) - ((-1)^{k-1} w(1) + \dots - w(k-1) + w(k)).$$

Рассмотрим нечетные номера k , т.е. $k = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots$. Тогда

$$y(2m+2) = -y(1) - (w(1) - w(2) + \dots - w(2m) + w(2m+1)).$$

Пусть m^0 – некоторый номер, удовлетворяющий условию $|y(1)| \leq \bar{\rho}(2m^0 + 1)$. Полагаем

$$\begin{aligned} w(2i+1) &= -\frac{y(1)}{2m^0+1}, & i = 0, 1, \dots, m^0, \\ w(2i) &= \frac{y(1)}{2m^0+1}, & i = 1, \dots, m^0, \\ w(k) &= 0, & k \geq 2m^0 + 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$y(k) = 0, \quad k \geq 2m^0 + 2.$$

Таким образом, существует номер k^0 такой, что $y(k) = 0$ при $k \geq k^0 + 1$. Теперь последовательно рассмотрим уравнения системы (8). Согласно доказанному выше существуют номера $k_1^0, k_2^0, \dots, k_l^0$ и управления $w_1^0(\cdot), \dots, w_l^0(\cdot)$ такие, что для решения j -го уравнения

$$y_j^0(k+1) = \lambda_j^0 y_j^0(k) - w_j^0(k), \quad j = 1, \dots, l,$$

системы (8) имеем

$$y_j^0(k) = 0, \quad k \geq k_1^0 + \dots + k_j^0 + 1.$$

Пусть $m^0 = k_1^0 + \dots + k_l^0$. Тогда $y_j^0(k) = 0$, $j = 1, \dots, l$, при $k \geq m^0 + 1$. Следовательно, для решения $x_1^0(\cdot)$ имеем $x_1^0(k) = 0$ при $k \geq m^0 + 1$.

2. Система, соответствующая клетке J_i , $1 \leq i \leq l_1$. Каждая система

$$x_1^i(k+1) = J_i x_1^i(k) - w_1^i(k), \quad k = m+1, m+2, \dots,$$

где $m^i = m^{i-1} + k_{r_i}^i + k_{r_i-1}^i + \dots + k_1^i$, $i = 1, 2, \dots, l_1$. Тогда $x_1^i(k) = 0$ при $k \geq m^i + 1$, $i = 1, 2, \dots, l_1$.

Теперь покажем возможность перевода фазовой точки x_2^i в начало координат.

3. Система, соответствующая клетке B_0 . Система

$$x_2^0(k+1) = B_0 x_2^0(k) - w_2^0(k), \quad k = m+1, m+2, \dots, \quad (13)$$

распадается на системы, имеющие в координатной форме следующий вид:

$$\begin{cases} y_{11}(k+1) = \alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k) - w_{11}(k), \\ y_{21}(k+1) = \beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k) - w_{21}(k), \end{cases} \quad k = m+1, m+2, \dots$$

А. Случай, когда $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. Тогда номер e^0 выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{e^0} R^2(m+1) \leq \bar{\rho}^2,$$

где $R(k) = \sqrt{y_{11}^2(k) + y_{21}^2(k)}$. При $1 \leq k \leq m + e^0 - 1$ полагаем $w_{11}(k) = w_{21}(k) = 0$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} & (\alpha y_{11}(m+e^0) - \beta y_{21}(m+e^0))^2 + (\beta y_{11}(m+e^0) + \alpha y_{21}(m+e^0))^2 \\ & = (\alpha^2 + \beta^2) R^2(m+e^0) = \dots = (\alpha^2 + \beta^2)^{e^0} R^2(m+1) \leq \bar{\rho}^2. \end{aligned}$$

Тогда полагая

$$\begin{aligned} w_{11}(m+e^0) &= \alpha y_{11}(m+e^0) - \beta y_{21}(m+e^0), \\ w_{21}(m+e^0) &= \beta y_{11}(m+e^0) + \alpha y_{21}(m+e^0), \end{aligned}$$

получаем $y_{11}(m+e^0+1) = y_{21}(m+e^0+1) = 0$.

Б. Случай, когда $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Пусть номер e^0 удовлетворяет условию $(e^0 - 1)\bar{\rho} < R(m+1) \leq e^0 \bar{\rho}$ и пусть $\rho_0 = R(m+1)/e^0$. Полагаем

$$\begin{aligned} w_{11}(k) &= \frac{\bar{\rho}_0}{R(k)} (\alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k)), \\ w_{21}(k) &= \frac{\bar{\rho}_0}{R(k)} (\beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k)), \end{aligned} \quad k = m+1, \dots, m+e^0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_{11}(k+1) &= \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0}{R(k)}\right) (\alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k)), \\ y_{21}(k+1) &= \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0}{R(k)}\right) (\beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k)). \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ получаем

$$R^2(k+1) = R^2(k) \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0}{R(k)}\right)^2 (\alpha^2 + \beta^2) = (R(k) - \bar{\rho}_0)^2.$$

где начальным значением для переменных $y_{1,s-1}(k)$ и $y_{2,s-1}(k)$ будут числа $y_{1,s-1}(m + e_s + 1)$ и $y_{2,s-1}(m + e_s + 1)$.

Аналогично рассмотренному выше случаю число e_{r-1} и управления $w_{1,s-1}(\cdot)$ и $w_{2,s-1}(\cdot)$ выберем так, чтобы $y_{1,s-1}(k) = y_{2,s-1}(k) = 0$ при $k = m + e_s + e_{s-1} + 1$. При $k \geq m + e_s + e_{s-1} + 1$ полагаем $w_{1,s-1}(k) = 0$, $w_{2,s-1}(k) = 0$. Тогда при таких k имеем $y_{1,s-1}(k) = y_{2,s-1}(k) = 0$. Далее рассуждения проводятся аналогично случаям $s, s-1$.

Таким образом, существуют числа $e_s, e_{s-1}, \dots, e_1$ и управления $w_{1s}(\cdot), w_{2s}(\cdot), \dots, w_{11}(\cdot), w_{21}(\cdot)$ такие, что

$$y_{1j}(k) = y_{2j}(k) = 0, \quad k \geq m + e_s + \dots + e_j + 1, \quad j = s, s-1, \dots, 1.$$

Теперь последовательно рассмотрим системы (7) при $j = 1, 2, \dots, l_2$. Согласно доказанному выше для j -й системы существуют числа $e_{s_j}^j, e_{s_j-1}^j, \dots, e_1^j$ и управления $w_{1,s_j}^j(\cdot), w_{2,s_j}^j(\cdot), \dots, w_{11}^j(\cdot), w_{21}^j(\cdot)$ такие, что выполнены соотношения $x_2^j(k) = 0$, $k \geq n^j + 1$, где $n^j = n^{j-1} + e_{s_j}^j + e_{s_j-1}^j + \dots + e_1^j + 1$, $j = 1, 2, \dots, l_2$. Таким образом, $x(k) = 0$, $k \geq n^{l_2} + 1$.

5. *Завершение доказательства леммы 1.* Пусть

$$w(\cdot) = (w(1), w(2), \dots, w(k), \dots), \quad |w(k)| \leq \bar{\rho}$$

— последовательность, переводящая в системе (5) фазовую точку x из начального положения $x_0 = S^{-1}z_0$ в начало координат за $N(x_0)$ шагов, т.е. $x(N(x_0)) = 0$. Тогда $z(N(x_0)) = Sx(N(x_0)) = 0$, т.е. управление $\bar{w}(k) = Sw(k)$, $k = 1, 2, \dots$, переводит фазовую точку z из начального положения z_0 в начало координат за $N(x_0)$ шагов.

Покажем допустимость управления $\bar{w}(k)$.

Поскольку S — неособенная действительная матрица, то $S'S$ — симметрическая положительно определенная матрица, где S' — транспонирование матрицы S . Согласно утверждению 1 (см. приложение) для наибольшего собственного значения λ матрицы $S'S$ верно неравенство

$$x'S'Sx \leq \lambda|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $\bar{w}(k) = Sw(k)$, то

$$|\bar{w}(k)|^2 = w'(k)S'Sw(k) \leq \lambda|w(k)|^2.$$

Если тогда полагаем $\bar{\rho} = (\rho - \sigma)/\sqrt{\lambda}$, то

$$|\bar{w}(k)| \leq \sqrt{\lambda}|w(k)| \leq \sqrt{\lambda}\bar{\rho} = \rho - \sigma.$$

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Стратегию преследующего построим так:

$$u(k) = v(k) + \bar{w}(k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{w}(\cdot) = (\bar{w}(1), \bar{w}(2), \dots, \bar{w}(k), \dots)$, $|\bar{w}(k)| \leq \rho - \sigma$, — управление, переводящее в системе (4) фазовую точку z из начального положения z_0 в начало координат. Допустимость этой стратегии очевидна. Тогда получаем систему (4). Согласно лемме 1 в системе (4) из начального положения z_0 возможен перевод фазовой точки z в начало координат. Теорема 1 доказана.

3. Решение задачи 2.

ТЕОРЕМА 2. Если все собственные числа матрицы C по модулю не превосходят единицы, то в игре (1), (3) из любого начального положения z_0 возможно завершение преследования за некоторое конечное число шагов $N(z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему (1). Пусть r , $0 < r < \rho$, — произвольное фиксированное число. Полагаем

$$u(k) = \begin{cases} v(k) + w(k), & |v(k)| \leq \rho - r, \\ 0, & |v(k)| > \rho - r, \end{cases}$$

где $w(k) \leq r$.

Если все время $|v(k)| \leq \rho - r$, $k \geq 1$, то $u(k) = v(k) + w(k)$, $k \geq 1$, и из уравнения (1) получаем уравнение

$$z(k+1) = Cz(k) - w(k).$$

Тогда согласно решению задачи 1 существуют число $N_1 = N_1(z(1))$ и управление $w(\cdot)$ такие, что $z(N_1 + 1) = 0$.

Если на некотором шаге k_1 выполнено неравенство $|v(k_1)| > \rho - r$, то рассмотрим систему

$$z(k+1) = Cz(k) - u(k) + v(k)$$

при $k \geq k_1 + 2$ с начальным условием $z(k_1 + 1) = Cz(k_1) + v(k_1)$.

Если теперь все время $|v(k)| \leq \rho - r$, $k \geq k_1 + 1$, то согласно решению задачи 1 существуют число $N_2 = N_2(z(k_1))$ и управление $w(\cdot)$ такие, что $z(N_2 + 1) = 0$ и т.д.

Таким образом, для предотвращения завершения игры должны на некоторых шагах $k_1, k_2, \dots$ выполняться неравенства

$$|v(k_i)| > \rho - r, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Так как последовательность $v(1), v(2), \dots$ удовлетворяет ограничению (3), неравенства (16) могут выполняться лишь конечное число раз. Затем все время выполняется неравенство $|v(k)| \leq \rho - r$. Тогда опять согласно решению задачи 1 существуют число N_0 и управление $w(\cdot)$ такие, что $z(N_0 + 1) = 0$, т.е. в игре (1), (3) возможно завершение преследования за конечное число шагов. Теорема 2 доказана.

4. Невозможность завершения преследования из некоторых точек пространства. Теперь рассмотрим систему (4).

ЛЕММА 2. Если матрица C имеет собственное число μ по модулю больше единицы, то в системе (4) с $|\bar{w}(k)| \leq \hat{\rho}$ из некоторых начальных положений $z(1)$ невозможен перевод фазовой точки z в начало координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью действительного неособенного преобразования $z = Sx$ систему (4) приведем к виду

$$x(k+1) = Jx(k) - \omega(k), \quad \omega(k) = S^{-1}\bar{w}(k), \quad (17)$$

где $J = S^{-1}CS$ – жорданова форма матрицы C .

Достаточно показать невозможность перевода в системе (17) фазовой точки z в начало координат из некоторых начальных положений $x(1)$ при $|\omega(k)| \leq \rho_1$, где ρ_1 – произвольное положительное число. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $\mu, \mu > 1$, – вещественное собственное число матрицы C . Тогда система (17) содержит скалярное уравнение вида

$$y(k+1) = \mu y(k) - \omega(k),$$

где y и ω – координаты векторов x и w соответственно. Для доказательства теоремы достаточно показать, что можно выбрать начальное положение $y(1)$ так, чтобы $y(k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Действительно,

$$\begin{aligned} |y(k+1)| &\geq |\mu^k y(1)| - (|\mu^{k-1}| |\omega(1)| + \dots + |\mu| |\omega(k-1)| + |\omega(k)|) \\ &\geq |\mu^k y(1)| - \rho_1 (|\mu^{k-1}| + \dots + |\mu| + 1) = |\mu|^k \left(|y(1)| - \frac{\rho_1 (1 - |\mu|^{-k})}{|\mu| - 1} \right). \end{aligned}$$

Если

$$|y(1)| > \frac{\rho_1 (1 - |\mu|^{-k})}{|\mu| - 1},$$

то ясно, что выполняется неравенство $|y(k+1)| > 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Б. Пусть $\mu = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, $|\mu| > 1$. Тогда система (17) содержит систему вида

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \alpha y_1(k) - \beta y_2(k) - \omega_1(k), \\ y_2(k+1) = \beta y_1(k) + \alpha y_2(k) - \omega_2(k). \end{cases}$$

Обозначив

$$y(k) = \sqrt{y_1^2(k) + y_2^2(k)}, \quad \omega(k) = \sqrt{\omega_1^2(k) + \omega_2^2(k)},$$

получаем

$$\begin{aligned} y(k+1) &= [(\alpha y_1(k) - \beta y_2(k) - \omega_1(k))^2 + (\beta y_1(k) + \alpha y_2(k) - \omega_2(k))^2]^{1/2} \\ &\geq [(\alpha y_1(k) - \beta y_2(k))^2 + (\beta y_1(k) + \alpha y_2(k))^2]^{1/2} - (\omega_1^2(k) + \omega_2^2(k))^{1/2} \\ &\geq |\mu| y(k) - \omega(k). \end{aligned}$$

Итак $y(k+1) \geq |\mu| y(k) - \omega(k)$. Далее рассуждения проводятся аналогично случаю А. Лемма 2 доказана.

Следующая теорема показывает, что условие: все собственные числа матрицы C не превосходят единицы, является и необходимым условием для завершения преследования из всех точек пространства.

ТЕОРЕМА 3. Если матрица C имеет собственное число μ по модулю больше единицы, то в игре (1), (2) (соответственно (1), (3)) из некоторых начальных положений z_0 невозможно завершение преследования.

Для доказательства теоремы 3 достаточно полагать в системе (1) $v(k) = 0, k = 1, 2, \dots$ и для полученной системы

$$z(k+1) = Cz(k) - u(k), \quad |u(k)| \leq \rho,$$

применить лемму 2.

Приложение. Здесь мы приведем некоторые известные факты и утверждения [13], [14] в нужной для нас форме.

Жорданова форма матрицы. Известно, что матрица C подобна некоторой матрице J , если существует неособенная действительная матрица S такая, что $C = SJS^{-1}$, где

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & & 0 \\ & J_1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & J_{l_1} & & \\ & & & B_0 & \\ & & & & B_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & B_{l_2} \end{pmatrix},$$

т.е. $J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_{l_1}, B_0, B_1, \dots, B_{l_2}\}$, $J_0, J_1, \dots, J_{l_1}$ соответствуют действительным собственным числам матрицы C , а $B_0, B_1, \dots, B_{l_2}$ – собственным числам, имеющим ненулевую мнимую часть:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_l \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1, \dots, l_1, B_0 = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_s\},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} T_j & E_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & T_j & E_2 & \dots & O_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O_2 & O_2 & O_2 & \dots & T_j \end{pmatrix}, \quad T_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},$$

$j = 1, \dots, l_2$, E_2 – единичная (2×2) -матрица, O_2 – нулевая (2×2) -матрица, α_j и β_j – вещественные и мнимые части собственных чисел матрицы C .

УТВЕРЖДЕНИЕ (см. [13, с. 252]). Если A – вещественная симметрическая матрица, а $\lambda^-(A)$ и $\lambda^+(A)$ – ее минимальное и максимальное собственные числа соответственно, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\lambda^-(A)|x|^2 \leq x'Ax \leq \lambda^+(A)|x|^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Понтрягин Л. С. Избранные труды. М.: Наука, 1988.
- [3] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [4] Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [5] Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
- [6] Никольский М. С. О задаче преследования при различных ограничениях на управления догоняющего и убегающего // Теория оптимальных решений. Киев: Изд-е Ин-та кибернетики, 1975. С. 59–66.
- [7] Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000.
- [8] Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б., Хамдамов А. А. О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 4. С. 456–469.
- [9] Сатимов Н. Ю., Фазылов А. З., Хамдамов А. А. О задачах преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1388–1396.
- [10] Рихсиев Б. Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989.
- [11] Ибрагимов Г. И. К задаче группового преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 2. С. 201–212.
- [12] Ибрагимов Г. И. Игровая задача на выпуклом замкнутом множестве // Матем. труды. 2001. Т. 4. № 2. С. 96–112.
- [13] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [14] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Университет мировой экономики и дипломатии, г. Ташкент

Поступило
30.01.2004