Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 163–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:39:22

УДК 517.518

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ ОБЛАСТИ

О. В. Бесов

В статье изучаются пространства $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ функций с положительным показателем гладкости $s > 0$, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$. Для области G с определенными геометрическими свойствами установлено вложение $B_{pp}^s(G) = L_{pp}^s(G) \subset L_q(G)$, $1 < p < q < \infty$, при соотношении параметров, определяемом этими геометрическими свойствами.

Библиография: 20 названий.

В статье изучаются пространства $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ функций f с положительным показателем гладкости $s > 0$, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$. Нормы в этих пространствах определены с помощью интегральных норм разности функции f порядка $m > s$, рассматриваемой как функция точки области и шага разности.

Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ возможна характеристизация этих пространств в терминах локальных аппроксимаций функции многочленами степени $m - 1$.

Для области G с определенными геометрическими свойствами устанавливается вложение

$$B_{pp}^s(G) = L_{pp}^s(G) \subset L_q(G), \quad 1 < p < q < \infty,$$

в лебегово пространство $L_q(G)$ при соотношении параметров s, p, q, n , определяемом этими геометрическими свойствами. Это соотношение особенно просто выглядит для области с σ -условием Джона (σ -John domain), $\sigma \geq 1$. Такая область при $\sigma > 1$ может в окрестности точки границы иметь вид пика, направленного во внешность области.

Вложение $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ пространств Соболева ($s \in \mathbb{N}$) для области с нерегулярной границей изучалось в ряде работ (см. [1], [2]). Отметим, что здесь, как и в [1], [2], решающую роль при доказательстве вложения играет надлежащим образом построенное интегральное представление функции по “гибкому конусу”. В данном случае это интегральное представление функции через ее локальные уклонения от многочленов, построение которого приводится.

Пространства $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ на области G с регулярной (т.е. локально липшицевой) границей изучены достаточно полно. Установлено, в частности, что нормы, построенные с помощью разностей различных порядков m', m'' , эквивалентны друг другу. Здесь будет показано, что на области с нерегулярной границей такой эквивалентности, вообще говоря, нет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00602, программы “Ведущие научные школы”, проект 00-15-96047, и фонда INTAS, грант 99-01080.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_1^n x_i e^i$, e^i – орты стандартного базиса. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$ пусть $[x, y]$ – отрезок с концами в точках x, y ; $y + tE = \{x : x = y + tz, z \in E\}$,

$$B(x, t) = \{y : |y - x| \leq t\} = x + B(0, t), \quad B_0 = B(0, 1),$$

χ – характеристическая функция шара B_0 или отрезка $[-1, 1]$.

При $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta^m(y)f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jy),$$

$$\Delta^m(y, E)f(x) = \begin{cases} \Delta^m(y)f(x) & \text{при } B(x, m|y|) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, m|y|) \not\subset E, \end{cases}$$

при $t > 0$

$$\delta^m(t, E)f(x) = \begin{cases} |B_0|^{-1} \int_{|y| < 1} |\Delta^m(ty)f(x)| dy & \text{при } B(x, mt) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, mt) \not\subset E. \end{cases}$$

Все встречающиеся множества измеримы по Лебегу, $|E|$ – мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Все встречающиеся функции действительнoзначны и локально суммируемы.

Для $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ положим

$$\|f\|_{p, E} = \|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{p, \mathbb{R}^n};$$

при $p = \infty$ выражение $(\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p}$ понимается как $\text{ess sup}_E |f|$, $L(E) = L_1(E)$.

При $1 < q < \infty$ через L_q^* обозначается пространство измеримых на $(0, 1)$ функций g с нормой

$$\|g\|_{L_q^*} = \left(\int_0^1 |g(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty, \quad L_\infty^* = L_\infty((0, 1)).$$

Через G будем обозначать область в $\mathbb{R}^n$. При $\delta > 0$ полагаем $G_\delta = \{x : x \in G, \text{dist}(x, \partial G) > \delta\}$. При этом δ считаем столь малым, что $G_\delta \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Символом $B_{pq,r}^{s(m)}(G)$ при $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$ будем обозначать банахово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f\|_{B_{pq,r}^{s(m)}(G)} = \|f\|_{L_r(G_\delta)} + \|f\|_{b_{pq}^{s(m)}(G)},$$

где

$$\|f\|_{b_{pq}^{s(m)}(G)} = \left(\int_{m|h| < 1} \left(\frac{\|\Delta^m(h, G)f\|_p}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q}. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Символом $L_{pq,r}^{s(m)}(G)$ при $1 < p, q \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$ будем обозначать банахово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f \mid L_{pq,r}^{s(m)}(G)\| = \|f \mid L_r(G_\delta)\| + \|f \mid l_{pq}^{s(m)}(G)\|,$$

где

$$\|f \mid l_{pq}^{s(m)}(G)\| = \left\| \left(\int_0^{1/m} \left(\frac{\delta^m(t, G)f}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p. \quad (1.2)$$

При $r = p$ вместо $B_{pq,r}^{s(m)}(G)$, $L_{pq,r}^{s(m)}(G)$ и т.п. будем писать $B_{pq}^{s(m)}(G)$, $L_{pq}^{s(m)}(G)$ и т.п. При $m - 1 \leq s < m$ верхний индекс (m) в обозначениях пространств будем опускать.

Пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, $L_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ ($= F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$) изучены достаточно подробно (см. [3]–[5]). Характеризация пространств Лизоркина–Трибеля L_{pq}^s на $\mathbb{R}^n$ и на областях $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей в терминах шаровых средних от абсолютных величин разностей была предложена Стрихартцем [6] при $q = 2$ (пространства бесселевых потенциалов) и в общем случае Лизоркиным [7]. Другие характеристики пространств $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ на области G с регулярной границей можно найти в [5], [8].

Введем в рассмотрение также пространства функций, характеризующиеся определенными интегральными оценками для их локальных приближений алгебраическими многочленами. Примем некоторые обозначения:

$$\tau_a f(x) = f(x + a), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma_t f(x) = f(tx), \quad t > 0,$$

$\mathcal{P}_{m-1}$ – подпространство пространства $L(B_0)$, состоящее из всех многочленов вида $\sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$ (степени не выше $m - 1$),

$\pi = \pi^{(m-1)}$ – некоторый проектор $L(B_0)$ на $\mathcal{P}_{m-1}$,

$$\pi_{a,t} = \tau_a^{-1} \circ \sigma_t^{-1} \circ \pi \circ \sigma_t \circ \tau_a,$$

$$\begin{aligned} D_{m-1}(t, E)f(x) &= D_{m-1}(t, B(x, t) \cap E)f(x) \\ &= \begin{cases} t^{-n} \|f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x, t))\| & \text{при } B(x, t) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, t) \not\subset E. \end{cases} \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 [9]. Функционалы $D_{m-1}(t, G)f$, образованные с помощью двух разных проекторов π и $\widehat{\pi}$, эквивалентны с постоянными, не зависящими от f , x , t . В самом деле,

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{\pi}_{x,t} f \mid L(B(x, t))\| &= \|f - \pi_{x,t} f - \widehat{\pi}_{x,t}(f - \pi_{x,t} f) \mid L(B(x, t))\| \\ &\leq (1 + \|\widehat{\pi}\|) \|f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x, t))\|. \end{aligned}$$

Из аналогичных оценок ясно также, что $D_{m-1}(t, G)f$ останется эквивалентным после замены в нем приближения функции с помощью проекционного многочлена на ее наилучшее приближение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. При $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{B}_{pq,r}^{s(m)}(G)$, $\tilde{L}_{pq,r}^{s(m)}(G)$ пространства функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с конечными нормами соответственно

$$\begin{aligned} \|f \mid \tilde{B}_{pq,r}^{s(m)}(G)\| &= \|f \mid L_r(G_\delta)\| + \|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\|, \\ \|f \mid \tilde{L}_{pq,r}^{s(m)}(G)\| &= \|f \mid L_r(G_\delta)\| + \|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\|, \end{aligned}$$

где

$$\|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\| = \left(\int_0^1 \|D_{m-1}(t, G)f\|_p^{qt-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad (1.3)$$

$$\|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\| = \left\| \left(\int_0^1 (D_{m-1}(t, G)f)^{qt-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p. \quad (1.4)$$

Через $b_{pq}^{s(m)}(G)$, $l_{pq}^{s(m)}(G)$, $\tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)$, $\tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)$ будем обозначать полунормированные пространства с полунормами, введенными в определениях 1.1–1.3.

Пространства функций, характеризующихся локальными приближениями многочленами, изучались во многих работах, см., например, [4], [9]–[11]. Ближайшими к представленным здесь результатам о совпадении $B_{pq}^s(G) = \tilde{B}_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G) = \tilde{L}_{pq}^s(G)$ являются результаты Аджиева [9], установившего их для областей G с регулярной границей. Этим он дополнил для пространств $B_{pq}^s(G)$ предшествующие результаты Ильина (см. [4]) и распространил на области более общего вида результаты Трибеля [10] для областей с бесконечно гладкой границей. Отметим еще результаты Девора и Шарпли [12], исследовавших для регулярной области $G \subset \mathbb{R}^n$ шкалу пространств $C_p^s(G) = \tilde{L}_{p,\infty}^s(G)$. Другие справки исторического характера можно найти в [4], [5], [8], [9], [11].

Из результатов, относящихся к произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$, отметим результат Кальдерона [13] о характеризации пространства Соболева $W_p^1(G)$ в терминах локальных аппроксимаций.

2. Эквивалентные нормировки пространств $b_{pq}^{s(m)}(G)$, $l_{pq}^{s(m)}(G)$. В [14] установлены следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ при $0 < s < m$, $1 \leq p, q \leq \infty$ полунормы $\|f \mid b_{pq}^{s(m)}(G)\|$ и $\|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\|$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2.2. Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ при $0 < s < m$ и при $1 < p$, $q < \infty$ или $1 < p \leq q = \infty$ полунормы $\|f \mid l_{pq}^{s(m)}(G)\|$ и $\|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\|$ эквивалентны.

3. Интегральное представление функций. Построим некоторое интегральное представление функции $f \in L(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, которое будет использовано при доказательстве теоремы вложения в п. 4.

Пусть $m \in \mathbb{N}$,

$$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \eta \in B\left(0, \frac{1}{m}\right), \quad \int \eta(x) dx = 1.$$

Пусть $T > 0$, $c_0 > 0$, функции

$$\tau: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad r: (0, T) \rightarrow (0, \infty)$$

непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы,

$$\tau(t) \rightarrow 0, \quad r(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

$$|\tau'(t)| \leq 1, \quad |r'(t)| \leq c_0 \quad \text{при } 0 < t \leq T, \quad r_1(t) = \frac{r(t)}{t}.$$

Рассмотрим функцию $g \in L(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, и пусть 0 – ее точка Лебега. Введем усреднение

$$g_t(0) = \int \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m-1} a_j c_k(r_1(t)) g(jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t))) \eta(v) dv, \quad (3.1)$$

где

$$a_j = (-1)^{j-1} \binom{m}{j},$$

так что

$$\sum_{j=1}^m a_j = 1, \quad \sum_{j=1}^m j^l a_j = -\left(u \frac{d}{du}\right)^l (1-u)^m \Big|_{u=1} = 0 \quad \text{при } l = 1, \dots, m-1, \quad (3.2)$$

а $\{c_k(t)\}_{k=0}^{m-1}$ является решением системы m линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{m-1} c_k(t)(1+kt)^l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m-1. \quad (3.3)$$

Определитель $D(t)$, $t > 0$, системы (3.3) является определителем Вандермонда, так что при $t > 0$ система (3.3) имеет единственное решение. По известной формуле вычисления определителя Вандермонда

$$D(t) = b t^{(m+1)(m-2)/2}.$$

Решение системы (3.3) можно найти по правилу Крамера. Пусть определитель $D_k(t)$ отличается от $D(t)$ заменой в последнем k -го столбца на столбец правых частей системы (3.3), лишь первый элемент которого отличен от нуля. Раскладывая $D_k(t)$ по элементам первой строки, получим $D_k(t) = (-1)^{k-1} D_k^{(m-1)}(t)$, где $D_k^{(m-1)}(t)$ – определитель порядка $m-1$. После вынесения из каждого его столбца множителя, совпадающего с первым элементом этого столбца, он становится определителем Вандермонда порядка $m-1$. Поэтому

$$D_k(t) = Q_{m-1,k}(t) t^{m(m-3)/2},$$

где $Q_{m-1,k}$ – многочлен степени $m-1$. Отсюда

$$c_k(t) = Q_{m-1,k}(t) t^{-m+1}. \quad (3.4)$$

Покажем, что для произвольного многочлена $P_{m-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$ с постоянными коэффициентами введенное усреднение $(P_{m-1})_t(0)$ не зависит от $t > 0$. Достаточно рассмотреть лишь случай $P_{m-1}(x) = p_\alpha(x) = x^\alpha$, $1 \leq |\alpha| \leq m-1$. Но

$$\begin{aligned} [jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t))]^\alpha &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (jr(t)v)^\beta [\tau(t)(1 + kr_1(t))]^{\alpha-\beta} \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (jr(t))^{|\beta|} v^\beta (1 + kr_1(t))^{|\alpha-\beta|} \tau(t)^{\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

где $\beta \leq \alpha$ означает, что $\beta_i \leq \alpha_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда в силу соотношений ортогональности из (3.2), (3.3) имеем

$$(p_\alpha)_t(0) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq 1.$$

В силу же первых соотношений из (3.2), (3.3)

$$(p_0)_t(0) = \int \eta(v) dv = 1 = p_0(0),$$

что и требовалось доказать. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(0) = \frac{\partial}{\partial t} (g - P_{m-1})_t(0), \quad (3.5)$$

где P_{m-1} — произвольный многочлен степени $m-1$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t(0) = & \int \sum_{j,k} a_j \left[c'_k(r_1) r'_1 g(jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t))) \right. \\ & + c_k(r_1(t)) \sum_{i=1}^n D_i g(jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t))) \\ & \left. \times (jr'(t)v_i + \tau'_i(t)(1 + kr_1(t)) + \tau_i(t)kr'_1(t)) \right] \eta(v) dv. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$D_i f(jr(t)v) = \frac{1}{jr(t)} \frac{\partial}{\partial v_i} f(jr(t)v),$$

с помощью интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t(0) = & \int \sum_{j,k} a_j g(jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t))) \left\{ c'_k(r_1(t)) r'_1(t) \eta(v) \right. \\ & \left. - c_k(r_1(t)) \sum_{i=1}^n \left[\frac{r'(t)}{r(t)} \eta(v) + \left(\frac{r'(t)}{r(t)} v_i + \frac{\tau'_i(t)(1 + kr_1(t))}{jr(t)} + \frac{\tau_i(t)kr'_1(t)}{jr(t)} \right) D_i \eta(v) \right] \right\} dv. \end{aligned}$$

В силу (3.5) в правой части последнего равенства можно g заменить на $g - P_{m-1}$, где $P_{m-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$ — многочлен с произвольными коэффициентами.

Учитывая оценки $|r'(t)| \leq c_0$, $|\tau'| \leq 1$ и оценки для $c_k(t)$, $c'_k(t)$, вытекающие из (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_t(0) \right| & \leq C \int \sum_{j,k} r_1(t)^{-m+1} r(t)^{-1} |(g - P_{m-1})(jr(t)v + \tau(t)(1 + kr_1(t)))| \chi(mv) dv \\ & \leq C_1 \int \sum_{j,k} r_1(t)^{-m+1} |(g - P_{m-1})(y)| r(t)^{-n-1} \chi\left(m \frac{y - \tau(t) - \tau(t)kr(t)/t}{jr(t)}\right) dy \\ & \leq C_2 \int r_1(t)^{-m+1} |(g - P_{m-1})(y)| r(t)^{-n-1} \chi\left(\frac{y - \tau(t)}{mr(t)}\right) dy \\ & = C_2 \int t^{m-1} |(g - P_{m-1})(y)| r(t)^{-m-n} \chi\left(\frac{y - \tau(t)}{mr(t)}\right) dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При этом коэффициенты многочлена P_{m-1} могут зависеть от t .

Заметим, что $g(t) \rightarrow g(0)$ при $t \rightarrow 0$, поскольку 0 – точка Лебега функции g . Это позволяет с помощью формулы Лейбница–Ньютона написать интегральное представление

$$g(0) = - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} g_t(0) dt + g_T(0) \quad (3.7)$$

с важной для дальнейшего оценкой (3.6) подынтегрального выражения.

4. Класс рассматриваемых областей и поточечные оценки. *Регулярной областью* или *областью с регулярной границей* мы называем здесь область $G \subset \mathbb{R}^n$, граница ∂G которой локально представляет собой (после подходящего поворота декартовой системы координат) график функции, удовлетворяющей условию Липшица. Нашей целью является изучение пространств функций дробной гладкости, определенных на нерегулярной области.

Пусть $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial G)$, $\rho_1 = \min\{\rho(x), 1\}$, непрерывно дифференцируемая функция $r(x)$ эквивалентна $\rho_1(x)$ на G , $r(x) \leq \rho_1(x)/2$, $|\text{grad } r(x)| \leq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 [1], [2]. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\delta_0 \in (0, 1)$, $R_0 > 0$ и каждой точке $x \in G$ поставлен в соответствие кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x : [0, t_x] \rightarrow G$ со свойствами

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma \subset B(x, R_0), \quad \rho(\gamma(t_x)) \geq 2\delta_0, \quad |\gamma'| \leq 1 \text{ п.в.}, \quad r(\gamma(t_x)) \geq \frac{1}{2}\delta_0. \quad (4.1)$$

Тогда, положив

$$H_x = \bigcup_{0 \leq t \leq t_x} B(\gamma_x(t), r(\gamma_x(t))), \quad \mathcal{H} = \{H_x : x \in G\},$$

будем писать $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}(\delta_0, R_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Конструкции, подобные $\mathcal{G}(\delta_0, R_0)$, рассматривались в [15], а их обобщения – в [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 [16]. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\delta_0 > 0$, $R_0 > 0$, $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}(\delta_0, R_0)$. Будем говорить, что $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}_0(\delta_0, R_0)$, если существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$\int_0^{t_x} \frac{1}{r(\gamma_x(t))} \chi\left(\frac{y - \gamma_x(t)}{r(\gamma_x(t))}\right) dt \leq C_0 \quad (4.2)$$

для любых $y, x \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В условиях определения 4.1 существует такое число $\kappa > 0$, что

$$\kappa r(x) \leq 3r(y), \quad \text{если } x, y \in G, \quad B(x, r(x)) \cap B(y, r(y)) \neq \emptyset. \quad (4.3)$$

В самом деле, достаточно учесть, как и в [15], что

$$\rho_1(x) \leq \rho_1(y) + |x - y| \leq \rho_1(y) + r(x) + r(y) \leq \frac{3}{2}\rho_1(y) + \frac{1}{2}\rho_1(x),$$

откуда $\rho_1(x) \leq 3\rho_1(y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ назовем *областью с условием гибкого σ -конуса*, если при некоторых $t^* > 0$, $\kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma: [0, t^*] \rightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $|\gamma'| \leq 1$ п.в., такой, что $\rho(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma$ при $0 < t \leq t^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4 [15]. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с σ -условием Джона* (σ -John domain), если существует точка $x^0 \in G$ и постоянная $\kappa > 0$ такие, что для любой точки $x \in G$ найдется спрямляемая кривая $\gamma: [0, l_x] \rightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(l_x) = x^0$, параметризованная с помощью длины дуги и такая, что

$$\rho(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma \quad \text{при } 0 < t \leq l_x.$$

Заметим, что для ограниченной области G определения 4.3 и 4.4 эквивалентны.

Пусть теперь $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}(\delta_0, R_0)$, $r_\gamma(t) = r(\gamma(t))$, $r(x) \leq \rho_1(x)/2$. Зафиксируем $x \in G$, и пусть $\gamma = \gamma_x$ взято из определения 4.1. Построим исходя из $r(x)$ и γ путь $\Gamma = \Gamma_x: [0, T_x] \rightarrow G$, задаваемые формулой

$$\Gamma = \Gamma_x = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq t \leq r(x) = r_\gamma(0), \\ \gamma_x(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) \leq t \leq t_x + r_\gamma(0) = T_x, \end{cases} \quad (4.4)$$

и непрерывную, кусочно непрерывно дифференцируемую функцию $r(t): (0, T_x] \rightarrow (0, \infty)$, задаваемую формулой

$$r(t) = r_\Gamma(t) = r_{\Gamma_x}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 < t \leq r_\gamma(0), \\ r_\gamma(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) \leq t \leq r_\gamma(0) + t_x = T_x. \end{cases} \quad (4.5)$$

Пусть $f \in L(G, \text{loc})$, $x \in G$, $0 < t \leq T_x$. Запишем усреднение (3.1) для функции $g(y) = f(x + y)$ при $\tau(t) = \Gamma(t) - x$, $r(t)$ из (4.4), (4.5) в виде

$$f_t(x) = \int \Omega(y, \Gamma(t) - x, r(t)) f(x + y) dy.$$

Тогда для почти каждого $x \in G$ по формуле Лейбница–Ньютона

$$f(x) = - \int_0^{T_x} \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) dt + f_{T_x}(x). \quad (4.6)$$

В силу (3.6)

$$|f(x)| \leq C \int_0^{T_x} \int t^{m-1} r(t)^{-m-n} \chi\left(\frac{y + x - \Gamma_x(t)}{r(t)}\right) |f(x + y) - P_{m-1}(x, t; y)| dy dt + |f_{T_x}(x)|, \quad (4.7)$$

где $P_{m-1}(x, t; y) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha(x, t) y^\alpha$ — многочлен с произвольными коэффициентами.

Без ограничения общности будем считать, что $\delta_0 < 1/2$. Тогда при $|z| < r(t)$

$$B\left(\Gamma_x(t), \frac{r(t)}{2}\right) \subset \overline{B}(\Gamma_x(t) + z, r(t)) \subset G.$$

Поэтому в (4.7) $\chi(2(y+x-\Gamma_x(t))/r(t))$ можно заменить на $\chi((y+x-z-\Gamma_x(t))/r(t))$ и считать, что $P_{m-1} = P_{m-1}(x, t, z; y)$ — многочлен по y с коэффициентами, зависящими от x, t, z . Выбрав его надлежащим образом, получим

$$|f(x)| \leq C \int_0^{T_x} t^{m-1} r(t)^{-m} D_{m-1}(r(t), G) f(\Gamma_x(t) + z) dt + |f_{T_x}(x)|.$$

Усредняя эту оценку по $z \in B(0, r(t))$, получаем

$$|f(x)| \leq C_1 \int_0^{T_x} \int_{|z| < r(t)} t^{m-1} r(t)^{-m-n} D_{m-1}(r(t), G) f(\Gamma_x(t) + z) dz dt + |f_{T_x}(x)|. \quad (4.8)$$

Введем при $s > 0$ функцию

$$\phi(x) = \sup_{0 < t \leq \rho_1(x)/2} t^{-s} D_{m-1}(t, G) f(x), \quad x \in G.$$

Отметим сразу, что при любом $\theta \in [1, \infty]$ выполняется оценка

$$\phi(x) \leq C \phi_\theta(x) = C \left(\int_0^{\rho_1(x)} \left[\frac{D_{m-1}(t, G) f(x)}{t^s} \right]^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}. \quad (4.9)$$

В самом деле, при $\theta = \infty$ оценка (4.9) очевидна. Если же $1 \leq \theta < \infty$ и

$$t_0^{-s} D_{m-1}(t_0, G) f(x) \geq \frac{\phi(x)}{2},$$

то оценка (4.9) следует из оценки

$$\phi(x) \leq C \left(\int_{t_0}^{2t_0} \left[\frac{D_{m-1}(t, G) f(x)}{t^s} \right]^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}.$$

Последняя оценка очевидна при замене в определении $D_{m-1}(t, G) f$ приближения с помощью проекционного оператора на наилучшее приближение, а значит, и в приведенном виде в силу замечания 1.1.

Из (4.8) имеем

$$|f(x)| \leq C_1 \int_0^{T_x} \int_{|y - \Gamma_x(t)| < r(t)} t^{m-1} r(t)^{s-m-n} \phi(y) dy dt + |f_{T_x}(x)|. \quad (4.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Можно ожидать, что при $1 \leq \theta < \tau \leq \infty$

$$\phi_\tau(x) \leq C(\tau, \theta) \phi_\theta(x).$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $s > 0$, $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}(\delta_0, R_0)$, $x \in G$, пусть $\gamma = \gamma_x: [0, t_x] \rightarrow G$ и функция $r(x)$ те же, что в определении 4.1. Тогда если $f \in L(G, \text{loc})$ и x — точка Лебега функции f , то

$$|f(x)| \leq C A_1 \phi(x) + C A_2 \phi(x) + C A_3 f(x), \quad (4.11)$$

где

$$A_1 \phi(x) = \int_{|y-x| < r(x)} \frac{\phi(y) dy}{|y-x|^{n-s}} \leq \int_{G \cap B(x, 1)} \frac{\phi(y) dy}{|y-x|^{n-s}}, \quad (4.12)$$

$$A_2 \phi(x) = \int_0^{t_x} (t + r(x))^{m-1} r(\gamma(t))^{s-m-n} \int_{|y-\gamma(t)| < r(\gamma(t))} \phi(y) dy dt, \quad (4.13)$$

$$A_3 f(x) = \int_{|y-\gamma(t_x)| < r(\gamma(t_x))} |f(y)| dy \leq \int_{G_{\delta_0} \cap B(x, R_0+1)} |f(y)| dy. \quad (4.14)$$

При этом постоянная C не зависит от f и x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из (4.8), если интеграл по $[0, T_x]$ в (4.8) разбить на два интеграла (по $[0, r(x)]$ и $[r(x), T_x]$), учесть (4.4), (4.5) и заменить во втором из интегралов переменную t на $t + r(x)$. Лемма доказана.

5. Оценки слабого типа. Пусть $1 \leq p < q < \infty$. Говорят, что оператор A имеет *сильный тип* (p, q) , если

$$\|Af\|_{L_q(G)} \leq C \|f\|_{L_p(G)} \quad \forall f \in L_p(G),$$

и что A имеет *слабый тип* (p, q) , если

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in G : |Af(x)| > \lambda\}|^{1/q} \leq C \|f\|_{L_p(G)} \quad \forall f \in L_p(G).$$

Эти две оценки называются соответственно *оценками сильного и слабого типа*. Оценка сильного типа влечет оценку слабого типа, но не наоборот. Однако в некоторых случаях с помощью оценок слабого типа можно получить оценку сильного типа, используя, например, интерполяционную теорему Марцинкевича или другие соображения.

ЛЕММА 5.1. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $s - n/p + n/q \geq 0$. Тогда оператор A_1 имеет *слабый тип* (p, q) . Если же при этом $p > 1$ или $s - n/p + n/q > 0$, то A_1 имеет *сильный тип* (p, q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО при $s - n/p + n/q = 0$ является следствием классических оценок для потенциала Рисса (см., например, [17, гл. 5]). При $s - n/p + n/q > 0$ достаточно воспользоваться неравенством Юнга для сверток.

ЛЕММА 5.2. При $1 \leq r \leq q < \infty$ оператор A_3 имеет *сильный тип* (r, q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенства Юнга.

Обозначим через $M\phi$ максимальную функцию для функции ϕ . Введем для $x \in G$

$$\begin{aligned} N(p, q, x) &= \sup_{R>0} \left[\int_0^{t_x} \chi \left(\frac{R}{t+r(\gamma(t))} \right) (t+r(x))^{(m-1)p'} \right. \\ &\quad \left. \times r(\gamma(t))^{(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right]^{1/p'} |B(x, R)|^{1/q}, \\ N(p, q, G) &= \sup_{x \in G} N(p, q, x). \end{aligned} \quad (5.1)$$

ЛЕММА 5.3 (основная). Пусть

$$\begin{aligned} (G, \mathcal{H}) &\in \mathcal{G}_0(\delta_0, R_0), \quad s > 0, \quad 1 \leq p_0 \leq p < q < \infty, \quad \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ N(p, q, G) + N(p_0, q_0, G) &< \infty. \end{aligned}$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x \in G$

$$A_2\phi(x) \leq CN(p, q, x) \|\phi\|_{L_p(G)}^{1-p/q} (M(|\phi|^{p_0})(x))^{p/(p_0q)} \quad (5.2)$$

для любой функции ϕ с конечной правой частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться леммой 1 из [18].

СЛЕДСТВИЕ 5.1. В условиях леммы 5.3 при $1 \leq p_0 < p$ оператор A_2 имеет сильный тип (p, q) , а при $1 \leq p_0 = p$ слабый тип (p, q) .

6. Теоремы вложения. Здесь будут приведены некоторые теоремы вложения пространств функций положительной гладкости, определенных на области $G \subset \mathbb{R}^n$ с нерегулярной границей, в пространство Лебега $L_q(G)$. Но начнем мы с леммы о вложении в пространство Марцинкевича, содержащее $L_q(G)$, которая является основой для всех последующих вложений.

Везде в дальнейшем будем считать, что

$$m \in \mathbb{N}, \quad 0 < s < m, \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \quad 1 \leq \theta \leq \infty. \quad (6.1)$$

ЛЕММА 6.1. Пусть выполнены условия (6.1), область $G \subset \mathbb{R}^n$, $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}(\delta_0, R_0)$,

$$N(p, q, G) < \infty. \quad (6.2)$$

Тогда

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \{x \in G : |f(x)| > \lambda\}^{1/q} \leq C \|f\|_{L_{p\theta, r}^{s(m)}(G)}, \quad (6.3)$$

где C не зависит от функции f с конечной правой частью (6.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый из усеченных гибких конусов H_x из условия леммы можно заменить “правильным” усеченным гибким конусом $\hat{H}_x \subset H_x$ таким, что для построенной по $\hat{H}_x$ левой части (5.1) (обозначим ее через $\hat{N}(p, q, x)$) окажется верной оценка

$$\hat{N}(p, q, x) \leq CN(p, q, x),$$

где C не зависит от $x \in G$. Способ такого “исправления” H_x предложен в [15]. В [2], [16] он применен к случаю, который отличается от нашего формальной заменой в $N(p, q, x)$ параметра s на m . В нашем случае оно проводится так же, как в [2]. Тем самым, без ограничения общности будем считать, что в условиях леммы $\mathcal{G}(\delta_0, R_0)$ заменено на $\mathcal{G}_0(\delta_0, R_0)$.

Используя оценку (4.11), леммы 5.1, 5.2 и следствие 5.1, приходим к оценке

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in G : |f(x)| > \lambda\}|^{1/q} \leq C [\|\phi \mid L_p(G)\| + \|f \mid L_r(G_\delta)\|],$$

где функция ϕ та же, что в (4.9), а постоянная C не зависит от f .

В последней оценке можно в силу (4.9) заменить ϕ на $C_1\phi_0$, что и приводит к (6.3).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. В условиях леммы 6.1 справедлива оценка

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in G : |f(x)| > \lambda\}|^{1/q} \leq C \|f \mid B_{pp,r}^{s(m)}(G)\|,$$

поскольку

$$\|f \mid B_{pp,r}^{s(m)}(G)\| = \|f \mid L_{pp,r}^{s(m)}(G)\|. \quad (6.4)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть в условиях леммы 6.1 имеет место условие $0 < s < m = 1$. Тогда при $1 \leq \theta \leq p$ выполнены оценки

$$\|f \mid L_q(G)\| \leq C \|f \mid L_{p\theta,r}^s(G)\|, \quad (6.5)$$

$$\|f \mid L_q(G)\| \leq C \|f \mid B_{pp,r}^s(G)\|, \quad (6.6)$$

где C не зависит от функции f с конечной правой частью (6.5) или (6.6) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую условиям

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \text{supp } \phi \subset \left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-k}t) = 1,$$

$f_k(x) = \phi(2^{-k}|f(x)|)f(x)$, так что

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x).$$

Введем еще

$$E_k = \{x \in G : |f(x)| > 2^k\}, \quad E_k^* = \{x \in G : |f_k(x)| > 2^{-k-2}\}.$$

Тогда так же, как в [2], имеем

$$\begin{aligned}
 I^q &= \int_G |f(x)|^q dx + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} |f(x)|^q dx \\
 &\leq \sum_k \int_{E_k \setminus E_{k-1}} |f_k(x) + f_{k+1}(x)|^q dx \\
 &\leq \sum_k 2^{(k+1)q} |\{x \in G : |f_k(x) + f_{k+1}(x)| > 2^k\}| \\
 &\leq \sum_k 2^{(k+1)q} (|E_k^*| + |E_{k+1}^*|) = 2^{2q}(2^q + 1) \sum_k 2^{(k-2)q} |E_k^*|.
 \end{aligned}$$

Используя теорему 6.1, получаем отсюда, что

$$\begin{aligned}
 I^q &\leq C \sum_k \|f_k\|_{L_{p\theta, r}^s(G)}^q \\
 &\leq C_1 \left(\sum_k \|f_k\|_{l_{p\theta}^s(G)}^p \right)^{q/p} + C_1 \left(\sum_k \|f_k\|_{L_r(G_\delta)}^r \right)^{q/r} \\
 &\leq C_1 \left(\sum_k \|f_k\|_{l_{p\theta}^s(G)}^p \right)^{q/p} + C_2 \|f\|_{L_r(G_\delta)}^q.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Покажем, что

$$\sum_k \|f_k\|_{l_{p\theta}^s(G)}^p \leq C \|f\|_{l_{p\theta}^s(G)}^p. \tag{6.8}$$

Зафиксируем x, h . Предполагая, что $|f(x+h)| \geq |f(x)|$, имеем

$$\begin{aligned}
 |f_k(x+h) - f_k(x)| &= |\phi(2^{-k}|f(x+h)|)f(x+h) - \phi(2^{-k}|f(x)|)f(x)| \\
 &\leq \phi(2^{-k}|f(x+h)|)|f(x+h) - f(x)| + |f(x)| \cdot |\phi(2^{-k}|f(x+h)|) - \phi(2^{-k}|f(x)|)| \\
 &\leq \phi(2^{-k}|f(x+h)|)|f(x+h) - f(x)| + |f(x)| 2^{-k} \left| \int_{|f(x)|}^{|f(x+h)|} \phi'(2^{-k}t) dt \right| \\
 &\leq \phi(2^{-k}|f(x+h)|)|f(x+h) - f(x)| + \int_{|f(x)|}^{|f(x+h)|} 2^{-k} t |\phi'(2^{-k}t)| dt.
 \end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается и при $|f(x+h)| < |f(x)|$.

Отсюда

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 |f_k(x+h) - f_k(x)|^\theta \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \\
 &\leq 2^\theta \int_0^1 [\phi(2^{-k}|f(x+h)|) + \phi(2^{-k}|f(x)|)]^\theta |f(x+h) - f(x)|^\theta \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \\
 &\quad + C \int_0^1 \left| \int_{|f(x)|}^{|f(x+h)|} dt \right|^{\theta/\theta'} \int_{|f(x)|}^{|f(x+h)|} |\phi'(2^{-k}t)|^\theta dt \frac{dh}{h^{s\theta+1}}.
 \end{aligned}$$

При $\theta \leq p$ имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_k \|f_k \mid l_{p\theta}^s(G)\|^p &\leq C \int_G \left(\int_0^1 \sum_k |f_k(x+h) - f_k(x)|^\theta \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \right)^{p/q} dx \\
 &\leq C_1 \int_G \left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^\theta \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \right)^{p/\theta} dx \\
 &\quad + C_1 \int_G \left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^{\theta/\theta'} |f(x+h) - f(x)| \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \right)^{p/\theta} dx \\
 &\leq C_2 \int_G \left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^\theta \frac{dh}{h^{s\theta+1}} \right)^{p/\theta} dx = C_2 \|f \mid l_{p\theta}^s(G)\|^p,
 \end{aligned}$$

и оценка (6.8) установлена.

Из (6.8) и (6.7) следует (6.5). Оценка же (6.6) совпадает со случаем $\theta = p$ оценки (6.5). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. *В условиях леммы 6.1 при $1 \leq \theta \leq p < \tilde{q} < q$ существует постоянная $C > 0$ такая, что имеют место неравенства*

$$\|f \mid L_{\tilde{q}}(G)\| \leq C \|f \mid L_{p\theta,r}^{s(m)}(G)\|, \quad (6.9)$$

$$\|f \mid L_{\tilde{q}}(G)\| \leq C \|f \mid B_{pp,r}^{s(m)}(G)\| \quad (6.10)$$

для всех функций f с конечной правой частью (6.9) или (6.10) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (6.10) совпадает с (6.9) при $\theta = p$ в силу (6.4). Установим (6.9). С помощью лемм 4.1, 5.1–5.3 доказательство (6.9) сводится к оценке нормы оператора

$$A_2: L_p(G) \rightarrow L_{\tilde{q}}(G)$$

с использованием (5.3). Эта оценка устанавливается так же, как утверждение iii) леммы 4.2 из [2].

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть $1 < p < q < \infty$ и выполнены условия леммы 6.1 с заменой (6.2) на*

$$N(p_0, q_0, G) + N(p_1, q_1, G) < \infty,$$

где $1 \leq p_j < q_j < \infty$, $j = 0, 1$, $q_0 \neq q_1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\mu}{p_0} + \frac{\mu}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\mu}{q_0} + \frac{\mu}{q_1}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Тогда при $1 \leq \theta \leq p$ выполнены оценки

$$\|f \mid L_q(G)\| \leq C \|f \mid L_{p\theta,r}^{s(m)}(G)\|, \quad (6.11)$$

$$\|f \mid L_q(G)\| \leq C \|f \mid B_{pp,r}^{s(m)}(G)\|, \quad (6.12)$$

где C не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (6.12) в силу (6.4) совпадает с (6.11) при $\theta = p$. Для доказательства (6.11) в силу (4.11) и (4.9) достаточно установить ограниченность операторов

$$A_1: L_p(G) \rightarrow L_q(G), \quad A_2: L_p(G) \rightarrow L_q(G), \quad A_3: L_r(G) \rightarrow L_q(G_\delta),$$

считая при этом, что $(G, \mathcal{H}) \in \mathcal{G}_0(\delta_0, R_0)$ (обоснование последнего см. в начале доказательства леммы 6.1).

Ограниченность операторов A_1 и A_3 следует соответственно из лемм 5.1 и 5.2.

Оператор A_2 по следствию 5.1 имеет слабый тип (p_0, q_0) и слабый тип (p_1, q_1) . Поэтому в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича он имеет сильный тип (p, q) . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть в условиях леммы 6.1 выполнены следующие соотношения параметров:

$$1 \leq p_0 < p < q < \infty, \quad \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \\ N(p, q, G) + N(p_0, q_0, G) < \infty.$$

Тогда при $1 \leq \theta \leq p$ справедливы оценки (6.11), (6.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. то же, что и в теореме 6.3, с тем лишь отличием, что ограниченность оператора A_2 устанавливается с помощью следствия 5.1 без использования интерполяционной теоремы Марцинкевича.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть для области G с условием гибкого σ -конуса, $\sigma \geq 1$ (см. определение 4.3), выполнены условия (6.1),

$$1 < p < q < \infty \quad (1 \leq p < q < \infty \text{ при } 0 < s < m = 1), \quad 1 \leq r \leq q, \\ s - (m - s)(\sigma - 1) - \frac{\sigma(n - 1) + 1}{p} + \frac{n}{q} \geq 0. \quad (6.13)$$

Тогда при $1 \leq \theta \leq p$ справедливы оценки (6.11), (6.12).¹

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условия (6.2) при $0 < t < t_x = t^*$, $2r(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma$. Для этого достаточно показать, что

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} [I_1(x, R) + I_2(x, R)] < \infty,$$

где

$$I_1(x, R) = \left(\int_0^{\tau_x} \chi \left(\frac{R}{3\rho_1(x)} \right) \rho_1(x)^{(s-1+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} R^{n/q}, \\ I_2(x, R) = \left(\int_{\tau_x}^{t^*} \chi \left(\frac{R}{3t} \right) t^{(m-1)p'} t^{\sigma(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} R^{n/q}, \\ \tau_x = \min\{t^*, \rho_1(x)\}.$$

¹Эта теорема приведена в [19] с опечаткой в формуле (12). Там следует заменить s на σs , после чего она совпадает с (6.13).

Но

$$I_1(x, R) \leq C_1 \chi\left(\frac{R}{3\rho_1(x)}\right) \rho_1(x)^{s-n/p+n/q} \leq C_1 < \infty,$$

$$I_2(x, R) = 0 \quad \text{при } \rho_1(x) \geq t^*,$$

а при $\tau_x = \rho_1(x)/C_0 < t^*$ имеем следующее.

В случае, когда $m - \sigma(m - s + (n - 1)/p) - 1/p < 0$, имеем

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3t^*}\right) (\rho_1(x) + R)^{m-\sigma(m-s+(n-1)/p)-1/p} R^{n/q} \leq C_1.$$

В случае, когда $m - \sigma(m - s + (n - 1)/p) - 1/p > 0$, имеем

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3t^*}\right) (t^*)^{m-\sigma(m-s+(n-1)/p)-1/p} \leq C_2.$$

В случае, когда $m - \sigma(m - s + (n - 1)/p) - 1/p = 0$, имеем

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3t^*}\right) \left(\ln \frac{3t^*}{R}\right) R^{n/q} \leq C_3.$$

Из оценок, полученных для $I_1(x, R)$, $I_2(x, R)$, вытекает, что условие (6.1) выполнено.

Пусть сначала $0 < s < m = 1$. Тогда утверждение теоремы выполняется в силу теоремы 6.1.

Пусть теперь $p > 1$. Выберем p_0, p_1, q_0, q_1 таким образом, чтобы $1 \leq p_j < q_j < \infty$, $j = 0, 1$, $p_0 < p_1, q_0 < q_1$,

$$\frac{1}{2p_0} + \frac{1}{2p_1} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{2q_0} + \frac{1}{2q_1} = \frac{1}{q}.$$

Тогда левая часть (6.13) сохраняется при замене (p, q) на (p_0, q_0) и на (p_1, q_1) . В силу теоремы 6.3 получаем оценки (6.11), (6.12).

В качестве примера применения доказанных теорем рассмотрим область, имеющую вид пика $(x' = (x_1, \dots, x_{n-1}))$:

$$G = \{x = (x', x_n) : 0 < x_n < l + \psi(l); |x'| < \psi(x_n) \text{ при } 0 < x_n < l; \\ |x'|^2 + |x_n - l|^2 < \psi(l)^2 \text{ при } l \leq x_n < l + \psi(l)\}, \quad (6.14)$$

где функция ψ на $[0, l]$ не убывает и удовлетворяет условию Липшица, $\psi(0) = 0$, $\psi > 0$ на $(0, l]$. Будем считать, что при некотором $c > 0$

$$\psi(t) \leq c\psi\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{при } 0 < t \leq l. \quad (6.15)$$

Примем также чисто техническое ограничение

$$\psi(t) \leq \frac{1}{2}t \quad \text{при } 0 < t \leq l. \quad (6.16)$$

Пусть δ_0 достаточно мало. При $x \in G$, $x_n < l$ положим

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \gamma_x(t) = \left(x' \left(1 - \frac{t}{|x'|} \right), x_n \right) && \text{при } 0 < t \leq |x'|, \\ \gamma(t) &= (0', x_n + t - |x'|) && \text{при } |x'| \leq t \leq l - x_n + |x'| = t_x.\end{aligned}$$

При $x \in G$, $x_n \geq l$ положим

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \gamma_x(t) \\ &= x + \frac{(0', l) - x}{(|x'|^2 + (x_n - l)^2)^{1/2}} t && \text{при } 0 < t < (|x'|^2 + (x_n - l)^2)^{1/2} = t_x - \delta_0, \\ \gamma(t) &= \gamma_x(t) = (0', l) && \text{при } t_x - \delta_0 < t \leq t_x.\end{aligned}$$

Введем

$$\begin{aligned}N^*(p, q, G) &= \sup_{0 < h \leq l} \sup_{0 < d \leq \xi(h)} \left(\int_{d+h}^1 t^{(m-1)p'} \psi(t)^{(s-m(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} \\ &\quad \times \left(\int_d^{d+h} \psi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q},\end{aligned}$$

где

$$\xi(h) = \sup \left\{ u : 0 < u \leq l, \int_u^{u+h} \psi(t)^{n-1} dt \leq h^n \right\}.$$

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид пика (6.14), выполнены условия (6.1), $0 < s < m = 1$ и

$$N^*(p, q, G) < \infty.$$

Тогда справедливы оценки (6.11), (6.12).

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид пика (6.14), выполнены условия (6.1) с (p_j, q_j) вместо (p, q) и условия

$$N^*(p_j, q_j, G) < \infty, \quad j = 0, 1,$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad q_0 \neq q_1.$$

Тогда справедливы оценки (6.11), (6.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6.6, 6.7. Возьмем $\delta \in (0, 1/2]$, $r(x) = \delta\rho(x)$. Пусть сначала $x \in G$, $x_n < l$. Полагая $\rho = \rho(x)$, имеем (см. (5.1))

$$\begin{aligned} N(p, q, x) &\leq C_1 \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_0^{t_x} \chi \left(\frac{h}{t + \delta_0 \rho(\gamma(t))} \right) (t + \rho)^{(m-1)p'} \right. \\ &\quad \left. \times \rho(\gamma(t))^{(s-m(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} |G \cap B(x, h)|^{1/q} \\ &=: C_1 N_0(p, q, x) \leq C_1 \sum_{j=1}^3 N_j(p, q, x), \end{aligned}$$

где N_j , $j = 1, 2, 3$, отличаются от N_0 лишь заменой отрезка интегрирования $[0, t_x]$ на его части соответственно $[0, \tau_x]$, $[\tau_x, |x'|]$, $[|x'|, t_x]$ при $\tau_x = \min\{\rho, |x'|\}$ (если $\rho \geq |x'|$, то второй отрезок вырождается в точку).

Заметим, что $\rho(\gamma(t))$ не убывает и что

$$\rho \leq \rho(\gamma(t)) \leq \rho + |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \rho + t.$$

Имеем

$$\begin{aligned} N_1 &\leq C_2 \sup_{0 < h \leq l} \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)\rho} \right) \left(\int_0^{\tau_x} \rho^{(m-1)p'} \rho^{(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} h^{n/q} \\ &\leq C_3 \sup_{0 < h \leq l} \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)\rho} \right) \rho^{s-n/p} h^{n/q} \leq C_4 \rho^{s-n/p+n/q} \leq C. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Если отрезок $[\tau_x, |x'|]$ не вырождается в точку, то, учитывая, что $\rho(\gamma(t))$ растет на нем не медленнее некоторой линейной функции с положительной производной, имеем

$$\begin{aligned} N_2 &\leq C_5 \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{\rho}^{|x'|} \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)t} \right) t^{(s-n/p)p'-1} dt \right)^{1/p'} h^{n/q} \\ &\leq C_6 \sup_{0 < h \leq l} \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)|x'|} \right) h^{n/q} \left\{ \begin{array}{ll} h^{s-n/p} & \text{при } s - \frac{n}{p} < 0 \\ \ln \frac{|x'|}{h} & \text{при } s - \frac{n}{p} = 0 \\ |x'|^{s-n/p} & \text{при } s - \frac{n}{p} > 0 \end{array} \right\} \leq C. \end{aligned}$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} N_3 &\leq C_7 \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{|x'|}^{l-x_n+|x'|} \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)t} \right) t^{(m-1)p'} \right. \\ &\quad \left. \times \psi(x_n + t - |x'|)^{(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} |G \cap B(x, h)|^{1/q} \\ &\leq C_8 \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{x_n}^l \chi \left(\frac{h}{(1 + 2\delta_0)(u + |x'| - x_n)} \right) (u + |x'| - x_n)^{(m-1)p'} \right. \\ &\quad \left. \times \psi(u)^{(s-m+(1-n)/p)p'} du \right)^{1/p'} \left(\min \left\{ h^n, \int_{x_n}^{x_n+h} \psi(t)^{n-1} dt \right\} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Учитывая (6.16), заменим под знаком интеграла $|x'|$ на x_n . Тогда

$$N_3 \leq C_9 \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{\max\{x_n, h/2\}}^l t^{(m-1)p'} \psi(t)^{(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} \\ \times \left(\min \left\{ h^n, \int_{x_n}^{x_n+h} \psi(t)^{n-1} dt \right\} \right)^{1/q}.$$

Поскольку $\max\{x_n, h/2\} \geq (x_n + h)/3$, используя (6.15), имеем

$$N_3 \leq C_{10} \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{(x_n+h)/3}^l t^{(m-1)p'} \psi(t)^{(s-m+(1-n)/p)p'} dt \right)^{1/p'} \\ \times \left(\min \left\{ \left(\frac{h}{3} \right)^n, \int_{x_n/3}^{(x_n+h)/3} \psi(t)^{n-1} dt \right\} \right)^{1/q} \\ \leq C_{11} N^*(p, q, G).$$

Собирая оценки, получаем

$$\sup_{x \in G, x_n < l} N(p, q, x) < \infty. \quad (6.18)$$

Пусть теперь $x \in G$, $x_n \geq l$. Отрезок $[0, t_x]$ разобьем на части $[0, \tau_x]$, $[\tau_x, t_x]$, где $\tau_x = \min\{\rho, t_x\}$. Тогда

$$N(p, q, x) \leq cN_0(p, q, x) \leq c(N_1(p, q, x) + N_5(p, q, x)),$$

где N_0 имеет тот же вид, что и при $x_n < l$, а N_j , $j = 1, 5$, отличаются от N_0 лишь заменой отрезка интегрирования $[0, t_x]$ соответственно на $[0, \tau_x]$ и $[\tau_x, t_x]$.

Выражение N_1 имеет тот же вид, что и при $x_n < l$, и оценивается так же, как в (6.17).

Выражение N_5 оценивается так же, как N_2 в случае $x_n < l$, а именно,

$$N_5 \leq C_{12} \sup_{0 < h \leq l} \left(\int_{\tau_x}^{t_x} \chi \left(\frac{h}{(1+2\delta_0)t} \right) t^{(s-n/p)p'-1} dt \right)^{1/p'} h^{n/q} \leq C.$$

Следовательно,

$$\sup_{x \in G, x_n \geq l} N(p, q, x) < \infty. \quad (6.19)$$

Из (6.18), (6.19) в силу теорем 6.1, 6.2 получаем утверждения соответственно теорем 6.6, 6.7.

Приведем пример, показывающий, что условие (6.13) является не только достаточным, но и необходимым для справедливости утверждения теоремы 6.5 (при выполнении прочих ее условий). Такого рода пример, относящийся к вложению пространства Соболева $W_p^l(G) \subset L_q(G)$, построен Лабутиным [20] на основе области типа Никодима. Эта же область используется и в нашем случае.

ПРИМЕР. Для $n \geq 2, \sigma > 1$ рассмотрим область $G \subset \mathbb{R}^n$, имеющую вид

$$G = P \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q_j \cup R_j),$$

где $P = (0, 1)^{n-1} \times (-1, 0)$ и

$$Q_j = Q'_j \times (r_j, 2r_j) = \left(\frac{r_j}{2}, \frac{3r_j}{2} \right)^{n-1} \times (r_j, 2r_j)$$

– куб, а

$$R_j = \left(r_j - \frac{r_j^\sigma}{2}, r_j + \frac{r_j^\sigma}{2} \right)^{n-1} \times [0, r_j]$$

– полуоткрытый параллелепипед. При этом потребуем, чтобы $0 < r_j \leq 1/2, Q'_i \cap Q'_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Последнее условие выполняется в случае, например, когда $r_{j+1} \leq r_j/4$ при всех $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \eta(t) = 0$ при $t \leq 1/3, \eta(t) = 1$ при $t \geq 2/3$. Положим

$$f_j = \begin{cases} 1 & \text{на } Q_j, \\ \eta\left(\frac{x_n}{r_j}\right) & \text{на } R_j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда [20]

$$\|f_j \mid L_q(G)\| = \left(r_j^n + r_j^{\sigma(n-1)+1} \|\eta \mid L_q((0, 1))\|^q \right)^{1/q} \geq c r_j^{n/q}, \quad (6.20)$$

где c не зависит от j .

Оценим сверху $\Delta^m(h, G)f_j$ через производные от f_j . Имеем

$$|\Delta^m(h, G)f_j(x)| \leq C|h|^m \max_{|y-x| \leq |h|} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f_j(y)|.$$

Заметим, что при достаточно большом j $|\Delta^m(h, G)f_j(x)|$ может отличаться от нуля лишь при $x \in R_j$ и при $m|h| \leq r_j^\sigma$. Поскольку при $y \in R_j, |\alpha| = m$

$$|D^\alpha f_j(y)| \leq C_1 r_j^{-m} \eta^{(m)}\left(\frac{y_n}{r_j}\right) \leq C_1 r_j^{-m},$$

имеем

$$|\Delta^m(h, G)f_j(x)| \leq C_2 \begin{cases} |h|^m r_j^{-m} & \text{при } m|h| \leq r_j^\sigma, \\ 0 & \text{при } m|h| > r_j^\sigma. \end{cases}$$

Следовательно, при $m|h| \leq r_j^\sigma$

$$\begin{aligned} \|\Delta^m(h, G)f_j \mid L_p\|^p &\leq C_9 |h|^{mp} r_j^{-mp} r_j^{\sigma(n-1)+1}, \\ \|f \mid b_{pp}^{s(m)}(G)\|^p &\leq C r_j^{-mp+(m-s)\sigma p+\sigma(n-1)+1}. \end{aligned}$$

Сравнение последней оценки с (6.20) при $j \rightarrow \infty$ показывает, что необходимым условием для вложения $B_{pp,r}^{s(m)}(G) \subset L_q(G)$, характеризуемого неравенством (6.12), является соотношение (6.13).

Аналогично показывается, что (6.13) необходимо и для вложения (6.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из рассмотренного примера следует, в частности, что пространства $B_{pp,r}^{s(m')}(G)$, $B_{pp,r}^{s(m'')}(G)$, $s < m' < m''$, отличающиеся лишь использованием разностей различных порядков в их норме, вообще говоря, отличаются друг от друга по запасу элементов (их нормы не эквивалентны).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 131–134.
- [2] Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 3–26.
- [3] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [5] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [6] Strichartz P. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces // J. Math. Mech. 1967. V. 16. № 9. P. 1031–1060.
- [7] Лизоркин П. И. Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 212–243.
- [8] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
- [9] Аджиев С. С. Характеризация функциональных пространств $B_{p,q}^s(G)$, $L_{p,q}^s(G)$, $W_p^s(G)$ и вложения в $BMO(G)$ // Тр. МИАН. 1997. Т. 214. С. 7–24.
- [10] Triebel H. Local approximation spaces // Z. Anal. Anwend. 1989. V. 88. № 3. P. 261–288.
- [11] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 70–132.
- [12] DeVore R. A., Sharpley R. S. Maximal function measuring smoothness // Mem. Amer. Math. Soc. 1984. V. 293.
- [13] Calderon A. P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Stud. Math. 1972. V. 44. P. 563–682.
- [14] Бесов О. В. Эквивалентные нормы в пространствах функций дробной гладкости на произвольной области // Матем. заметки. Т. 74. № 3. С. 340–349.
- [15] Kilpeläinen T., Malý J. Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwend. 2000. V. 19. № 2. P. 369–380.
- [16] Бесов О. В. О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 72–93.
- [17] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [18] Бесов О. В. Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Тр. МИАН. 1997. Т. 214. С. 25–58.
- [19] Бесов О. В. Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 586–591.
- [20] Лабутин Д. А. Неулучшаемость неравенств Соболева для класса нерегулярных областей // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 218–222.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

11.04.2002

Исправленный вариант

10.02.2003