Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Омиров, О дифференцированиях филиформных алгебр Лейбница, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 733–742

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:33:43

УДК 512.554.38

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ФИЛИФОРМНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Б. А. Омиров

Описаны алгебры дифференцирований естественным образом градуированных алгебр Лейбница. Показано существование характеристически нильпотентных алгебр Лейбница в каждой размерности более 4.

Библиография: 7 названий.

В 1955 г. Джекобсон установил, что над полем характеристики нуль алгебра Ли, имеющая невырожденное дифференцирование (рассматриваемое как линейное преобразование), нильпотентна [1], но обратный вопрос, т.е. следует ли из нильпотентности алгебры Ли существование невырожденного дифференцирования, был открыт. Пример нильпотентной алгебры Ли, у которой все дифференцирования нильпотентны (а значит, вырожденны), отвечающий на этот вопрос отрицательно, был построен в [2]. Долгое время считалось, что таких алгебр “немного” и только в [3] было доказано, что в любой неприводимой компоненте многообразия комплексных филиформных алгебр Ли размерности более 7 существует открытое множество в топологии Зариского, состоящее из характеристически нильпотентных алгебр Ли. Из этого факта вытекает, что на самом деле характеристически нильпотентных алгебр Ли “много” и, следовательно, они играют важную роль в описании многообразия нильпотентных алгебр Ли.

В связи с тем, что алгебры Лейбница являются “некоммутативными” обобщениями алгебр Ли, естественным образом возникает задача о существовании хорошей связи, так же, как и в алгебрах Ли [4], между естественной фильтрацией алгебры L и ее алгеброй дифференцирования. Исследования данной работы посвящены этому направлению, в частности, для естественным образом градуированных комплексных нелиевых алгебр Лейбница описаны их алгебры дифференцирований, которые порождают алгебры дифференцирований филиформных нелиевых алгебр Лейбница. Данное описание позволяет выделить в каждой размерности, начиная с 5, характеристически нильпотентные алгебры в классе нелиевых филиформных алгебр Лейбница. Отметим, что из классификации [4] нильпотентных алгебр Ли размерности менее 7 следует, что характеристически нильпотентных алгебр Ли для этих размерностей не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке проекта DFG 436 USB 113/4.

где $[\cdot, \cdot]$ – умножение в L .

Заметим, что если в L выполняется тождество $[x, x] = 0$, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом, алгебры Лейбница являются “некоммутативным” аналогом алгебр Ли.

Для произвольной алгебры L определим последовательность

$$L^1 \equiv L, \quad L^{n+1} = [L^n, L].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра L называется *нильпотентной*, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^s = 0$, причем минимальное такое число называется *индексом nilпотентности*.

Среди nilпотентных алгебр Лейбница выделим филиформные алгебры, а именно, алгебра Лейбница называется *филиформной*, если $\dim L^i = n + 1 - i$, где $\dim L = n + 1$ и $2 \leq i \leq n + 1$.

Заметим, что данное определение согласованно с определением филиформной алгебры Ли.

Далее будем рассматривать только не лиевые комплексные nilпотентные алгебры Лейбница; аналогичные результаты для алгебр Ли можно найти в [4].

Для филиформных не лиевых алгебр Лейбница верна следующая

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Любая $(n + 1)$ -мерная естественным образом градуированная комплексная не лиевая филиформная алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих двух алгебр:*

$$\begin{aligned} \mu_0^n: \quad & [e_0, e_0] = e_2, \quad [e_i, e_0] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \mu_1^n: \quad & [e_0, e_0] = e_2, \quad [e_i, e_0] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

где $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ – базис алгебры L .

СЛЕДСТВИЕ 1 [5]. *Любая $(n + 1)$ -мерная комплексная не лиевая филиформная алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих не лиевых филиформных алгебр Лейбница:*

$$\begin{aligned} \mu_0^n(\beta): \quad & [e_0, e_0] = e_2, \quad [e_i, e_0] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ & [e_0, e_1] = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n, \\ [e_i, e_1] = & \alpha_3 e_{i+2} + \alpha_4 e_{i+3} + \dots + \alpha_{n+1-i} e_n, \quad 1 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

где $\alpha_3, \alpha_4 \dots \alpha_n, \theta \in C$;

$$\begin{aligned} \mu_1^n(\beta): \quad & [e_0, e_0] = e_2, \quad [e_i, e_0] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ & [e_0, e_1] = \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \dots + \beta_n e_n, \quad [e_1, e_1] = \gamma e_n, \\ [e_i, e_1] = & \beta_3 e_{i+2} + \beta_4 e_{i+3} + \dots + \beta_{n+1-i} e_n, \quad 2 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

где $\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_n, \gamma \in C$ и $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ – базис алгебры L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное преобразование d алгебры Лейбница L называется *дифференцированием* алгебры L , если

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

для любых $x, y \in L$.

Множество всех дифференцирований будем обозначать $\text{Der}(L)$.

Из тождества Лейбница нетрудно заметить, что оператор правого умножения (R_x) является дифференцированием алгебры. Назовем такое дифференцирование *внутренним дифференцированием, определяемым элементом x* . Нетрудно видеть, что множество всех внутренних дифференцирований алгебры L ($R(L)$) образуют идеал в алгебре всех дифференцирований.

Напомним определение группы когомологий для алгебр Лейбница, введенное в работе Лоде [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть L – алгебра Лейбница над полем F и M есть F -модуль. M называется *представлением алгебры Лейбница L* , если заданы два действия алгебры L на M : $[\cdot, \cdot]: L * M \rightarrow M$ и $[\cdot, \cdot]: M * L \rightarrow M$, удовлетворяющие следующим трем аксиомам:

$$\begin{aligned} [m, [x, y]] &= [[m, x], y] - [[m, y], x], & [x, [m, y]] &= [[x, m], y] - [[x, y], m], \\ [x, [y, m]] &= [[x, y], m] - [[x, m], x] \end{aligned}$$

для любых $m \in M, x, y \in L$.

Пусть L – алгебра Лейбница и M – ее представление. Введем обозначения: $C^n(L, M) := \text{Hom}(L^{\otimes n}, M)$, при $n \geq 0$ (при $n < 0$ $C^n(L, M)$ положим равным нулю), $C^*(L, M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(L^{\otimes n}, M)$. Элементы множества $C^*(L, M)$ будем называть *коцепями L со значениями в M* , а элементы $C^n(L, M)$ – *коцепями степени n* .

Пусть $d^n: C^n(L, M) \rightarrow C^{n+1}(L, M)$ – гомоморфизм, определенный следующим образом:

$$\begin{aligned} (d^n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) &:= [x_1, f(x_2, \dots, x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}), x_i] \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} f(x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

где $f \in C^n(L, M)$ и $x_i \in L$.

Оператор $d: C^*(L, M) \rightarrow C^*(L, M)$ такой, что d^n есть сужение d на пространство $C^n(L, M)$, будем называть *дифференциалом*. Элементы ядра d^n ($\text{Ker } d^n := Z^n(L, M)$) назовем *n -коциклами*, а элементы образа d^{n-1} ($\text{Im } d^{n-1} := B^n(L, M)$) – *n -кограницами*. В силу того, что $d^n d^{n-1} = 0$, имеем $B^n(L, M) \subseteq Z^n(L, M)$.

Фактор пространство $H^n(L, M) := Z^n(L, M)/B^n(L, M)$ назовем *группой когомологий* алгебры Лейбница L степени n со значениями в M .

Пусть L – $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Лейбница, т.е. $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i$ и $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определим *градуировку* в $C^j(L, L)$ следующим образом: $C_{(i)}^j := \{c \in C^j(L, L) \mid c(a_1, \dots, a_j) \in L_{i_1+i_2+\dots+i_j+i}, \text{ где } a_k \in L_{i_k}\}$. Тогда $C^j(L, L) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_{(i)}^j$.

Нетрудно заметить, что оператор дифференцирования согласован с данной градуировкой, т.е. $d(C_{(i)}^j) \subseteq C_{(i)}^{j+1}$. Определим также градуировку в пространстве коциклов: $Z_{(i)}^j(L, L) = \{c \in C_{(i)}^j \mid d^j c = 0\}$.

Пусть L – нильпотентная алгебра Лейбница индекса нильпотентности p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Определим естественную убывающую фильтрацию $\{S_k\}$, полагая

$$S_k = \begin{cases} L & \text{при } k \leq 1, \\ L^k & \text{при } k > 1. \end{cases}$$

Данная фильтрация индуцирует фильтрации пространств коциклов, кограниц и когомологий $(\{F_k Z^j(L, L)\}, \{F_k B^j(L, L)\}, \{F_k H^j(L, L)\})$. В частности, пространство $F_r Z^j(L, L)$ состоит из j -коциклов таких, что $g(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_j}) \subseteq S_{i_1+i_2+\dots+i_j+r}$ для любых $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_j \leq p-1$.

ЛЕММА 1. Для любых $r \leq (p-1)(1-j)$ выполнено $F_r Z^j(L, L) = Z^j(L, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что произвольный ненулевой коцикл $g(x_1, \dots, x_j)$ из $Z^j(L, L)$ принадлежит пространству $F_r Z^j(L, L)$. Обозначим $i_1, \dots, i_j$ наибольшие индексы такие, что $x_k \in S_{i_k}$, и положим $m = \min\{i_1, \dots, i_j\}$; тогда без ограничения общности можно положить $m = i_j$. Проведем индукцию по m . При $m = 1$ получим $i_1 + i_2 + \dots + i_j \leq 1 + (p-1)(j-1)$. Тогда $i_1 + i_2 + \dots + i_j + (p-1)(1-j) \leq 1$ и, следовательно, $g(x_1, x_2, \dots, x_j) \in L = S_1 \subseteq S_{i_1+i_2+\dots+i_j+(p-1)(1-j)} = L$.

Пусть теперь $m > 1$ и $m = i_j$. Тогда x_j можно представить в виде линейной комбинации произведений вида $[y_j, y_{j+1}]$, где $y_j \in S_k \setminus S_{k+1}$ и $y_{j+1} \in S_t \setminus S_{t+1}$ ($k+t=m$). Обозначив $y_i = x_i$ для $i \leq j-1$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= [y_1, g(y_2, \dots, y_{j+1})] + \sum_{i=2}^{j+1} (-1)^i [g(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j+1}), y_i] \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i < s \leq j+1 \\ (i,s) \neq (j,j+1)}} (-1)^{s+1} g(y_1, \dots, y_{i-1}, [y_i, y_s], y_{i+1}, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j+1}) \\ &+ (-1)^j g(y_1, \dots, y_{j-1}, [y_j, y_{j+1}]). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в сумме есть не что иное, как $g(x_1, \dots, x_j)$, и может быть представлено как линейная комбинация элементов вида

$$\begin{aligned} &[y_1, g(y_2, \dots, y_{j+1})], \quad [g(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j+1}), y_i], \\ &g(y_1, \dots, y_{i-1}, [y_i, y_s], y_{i+1}, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j+1}), \end{aligned}$$

где $(i, s) \neq (j, j+1)$.

Аргументы коцикла g в каждом из этих элементов содержат y_j или y_{j+1} . И так как $y_j \in S_k \setminus S_{k+1}$, $y_{j+1} \in S_t \setminus S_{t+1}$, $k + t = m$, по индукционному предположению и вложению $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$\begin{aligned} [y_1, g(y_2, \dots, y_{j+1})] &\in S_{i_1+i_2+\dots+i_j+(p-1)(1-j)}, \\ [g(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j+1}), y_i] &\in S_{i_1+i_2+\dots+i_j+(p-1)(1-j)}, \\ g(y_1, \dots, y_{i-1}, [y_i, y_s], y_{i+1}, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_{j+1}) &\in S_{i_1+i_2+\dots+i_j+(p-1)(1-j)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеем $Z^1(L, L) = \bigoplus_{i \geq 0} Z_i^1(L, L)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $d \in \text{Der}(L)$. Тогда $d(S_i) \subseteq S_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Пусть L_n, W_n – алгебры умножения, которые определены умножениями μ_0^n и μ_1^n , соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Базис пространства $\text{Der}(L_n)$ образуют линейные преобразования: t_1, t_2, t_3, d_k , $1 \leq k \leq n-1$, пространства L_n , определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} t_1(e_1) &= e_1, & t_2(e_0) &= e_1, & t_2(e_i) &= e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ t_3(e_0) &= e_0, & t_3(e_i) &= ie_i, & 2 \leq i \leq n, \\ d_k(e_0) &= e_{k+1}, & d_k(e_i) &= e_{k+i}, & 1 \leq i \leq n-k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что данные отображения являются дифференцированиями и линейно независимы.

Градуируем алгебру L_n , полагая $L_1 := \text{lin}(e_0, e_1)$, $L_i := \text{lin}(e_i)$ при $2 \leq i \leq n$. Так как $Z^1(L_n, L_n) = \text{Der}(L_n)$ и градуировка алгебры L_n конечная, имеется конечная градуировка в пространстве $\text{Der}(L_n)$. Пусть $d \in \text{Der}(L_n)$; тогда по лемме 1 имеем $d = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$, где $d_i \in \text{Der}(L_n)$ и $d_i(L_j) \subseteq L_{i+j}$.

Рассмотрим $d_0 \in \text{Der}(L_n)$. Очевидно, что

$$d_0(e_k) = \begin{cases} \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 & \text{при } k = 0, \\ \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 & \text{при } k = 1, \\ \gamma_k e_k & \text{при } 2 \leq k \leq n, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_k$ – скаляры из поля.

Рассмотрим свойство дифференцирования

$$d_0([e_i, e_j]) = [d_0(e_i), e_j] + [e_i, d_0(e_j)].$$

При $j = 1$ получим

$$[e_i, d_0(e_1)] = [e_i, \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1] = \beta_0 e_{i+1} = 0 \implies b_0 = 0.$$

При $j = 0, i = 1$ получим

$$d_0(e_2) = [d_0(e_1), e_0] + [e_1, d_0(e_0)] \implies \gamma_2 e_2 = \beta_1 e_2 + [e_1, \alpha_0 e_0] \implies \gamma_2 e_2 = (\beta_1 + \alpha_0) e_2,$$

т.е. $\gamma_2 = \beta_1 + \alpha_0$.

При $i = j = 0$ получим

$$d_0(e_2) = [\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1, e_0] + [e_0, \alpha_0 e_0] \implies \gamma_2 e_2 = (2\alpha_0 + \alpha_1) e_2 \implies \gamma_2 = 2\alpha_0 + \alpha_1,$$

т.е. $\beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1$.

При $j = 0, 2 \leq i \leq n - 1$ получим

$$d_0(e_{i+1}) = \gamma_i e_{i+1} + \alpha_0 e_{i+1} \implies \gamma_{i+1} = \gamma_i + \alpha_0,$$

но так как $\gamma_2 = 2\alpha_0 + \alpha_1$, то $\gamma_i = i\alpha_0 + \alpha_1$.

Значит,

$$\begin{aligned} d_0\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i\right) &= \lambda_0(\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1) + \lambda_1 \beta_1 e_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i (\alpha_0 i + \alpha_1) \\ &= \alpha_0 \left(\lambda_0 e_0 + i \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i\right) + \alpha_1 \left(\lambda_0 e_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i\right) + \lambda_1 \beta_1 e_1, \end{aligned}$$

т.е. $d_0 = \alpha_0 t_3 + \alpha_1 t_2 + \beta_1 t_1$.

Рассмотрим $d_k \in \text{Der}(L_n)$ при $1 \leq k \leq n - 1$. Очевидно, что

$$d_k(e_i) = \begin{cases} \tau_0 e_{k+1} & \text{при } i = 0, \\ \tau_i e_{k+i} & \text{при } 1 \leq i \leq n - k, \end{cases}$$

где τ_i — скаляры из поля.

Рассмотрим свойство дифференцирования:

$$d_k([e_i, e_j]) = [d_k(e_i), e_j] + [e_i, d_k(e_j)].$$

При $j = 0, i = 1$ получим

$$d_k(e_2) = \tau_1 e_{k+2} \implies \tau_2 = \tau_1.$$

При $j = i = 0$ получим

$$d_k(e_2) = \tau_0 e_{k+2} \implies \tau_2 = \tau_0.$$

При $j = 0, 2 \leq i \leq n - k - 1$ получим

$$d_k(e_{i+1}) = \tau_i e_{k+i+1} \implies \tau_{i+1} = \tau_i \implies \tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_{n-k}.$$

Значит, $d_k(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i) = \tau_0(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i)$, т.е. $d_k(e_0) = e_{k+1}$, $d_k(e_i) = e_{k+i}$ при $1 \leq i \leq n - k$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Имеем $\dim \operatorname{Der}(L_n) = n + 2$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Имеем $\dim H^1(L_n, L_n) = n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Имеем $\dim B^2(L_n, L_n) = n^2 + n - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Базис пространства $\operatorname{Der}(W_n)$ образуют линейные преобразования $t_1, t_2, t_3, d_k, 1 \leq k \leq n - 1$, пространства W_n , определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} t_1(e_0) = e_0, \quad t_1(e_i) = ie_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad t_2(e_0) = e_1, \quad t_3(e_1) = e_1, \\ d_k(e_0) = e_{k+1}, \quad d_k(e_i) = e_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq n - k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что данные отображения являются дифференцированиями и линейно независимы.

Градуируем алгебру W_n , полагая $W_1 := \operatorname{lin}(e_0, e_1)$, $W_i := \operatorname{lin}(e_i)$ при $2 \leq i \leq n$.

Пусть $d \in \operatorname{Der}(W_n)$; тогда, рассуждая, как в предложении 1, имеем $d = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$, где $d_i \in \operatorname{Der}(W_n)$ и $d_i(W_j) \subseteq W_{i+j}$.

Рассмотрим $d_0 \in \operatorname{Der}(W_n)$. Очевидно, что

$$d_0(e_k) = \begin{cases} \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 & \text{при } k = 0, \\ \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 & \text{при } k = 1, \\ \gamma_k e_k & \text{при } 2 \leq k \leq n, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_k$ — скаляры из поля.

Рассмотрим свойство дифференцирования

$$d_0([e_i, e_j]) = [d_0(e_i), e_j] + [e_i, d_0(e_j)].$$

При $j = 1$ получим

$$[e_i, d_0(e_1)] = [e_i, \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1] = \beta_0 e_{i+1} = 0 \implies \beta_0 = 0.$$

При $i = j = 0$ получим

$$d_0(e_2) = [\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1, e_0] + [e_0, \alpha_0 e_0] \implies \gamma_2 e_2 = 2\alpha_0 e_2,$$

т.е. $\gamma_2 = 2\alpha_0$.

При $j = 0, 2 \leq i \leq n - 1$ получим

$$d_0(e_{i+1}) = \gamma_i e_{i+1} + \alpha_0 e_{i+1} \implies \gamma_{i+1} = \gamma_i + \alpha_0,$$

но так как $\gamma_2 = 2\alpha_0$, то $\gamma_i = i\alpha_0$.

Значит,

$$\begin{aligned} d_0\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i\right) &= \lambda_0(\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1) + \lambda_1 \beta_1 e_1 + \alpha_0 i \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i \\ &= \alpha_0\left(\lambda_0 e_0 + i \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i\right) + \alpha_1 \lambda_0 e_1 + \lambda_1 \beta_1 e_1, \end{aligned}$$

т.е. $d_0 = \alpha_0 t_1 + \alpha_1 t_2 + \beta_1 t_3$.

Рассмотрим $d_k \in \text{Der}(W_n)$ при $1 \leq k \leq n-1$. Очевидно, что

$$d_k(e_i) = \begin{cases} \tau_0 e_{k+1} & \text{при } i = 0, \\ \tau_i e_{k+1} & \text{при } 1 \leq i \leq n-k, \end{cases}$$

где τ_i – скаляры из поля.

Рассмотрим свойство дифференцирования

$$d_k([e_i, e_j]) = [d_k(e_i), e_j] + [e_i, d_k(e_j)].$$

При $j = 0, i = 1$ получим

$$\tau_1 e_{k+2} = 0 \implies \tau_1 = 0.$$

При $j = i = 0$ получим

$$d_k(e_2) = \tau_0 e_{k+2} \implies \tau_2 = \tau_0.$$

При $j = 0, 2 \leq i \leq n-k-1$ получим

$$d_k(e_{i+1}) = \tau_i e_{k+i+1} \implies \tau_{i+1} = \tau_i \implies \tau_0 = \tau_2 = \dots = \tau_{n-k}.$$

Значит, $d_k(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i) = \tau_0(\sum_{i=0, i \neq 1}^n \lambda_i e_i)$, т.е. $d_k(e_0) = e_{k+1}$, $d_k(e_i) = e_{k+i}$ при $2 \leq i \leq n-k$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7. Имеем $\dim \text{Der}(W_n) = n+2$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Имеем $\dim H^1(W_n, W_n) = n+1$.

СЛЕДСТВИЕ 9. Имеем $\dim B^2(W_n, W_n) = n^2 + n - 1$.

Пусть L_β – алгебра, которая определяется умножением $\mu_0^n(\beta)$.

Следующие леммы показывают некоторую связь дифференцирований произвольной не лиевой филиформной алгебры Лейбница с дифференцированиями алгебр L_n и W_n .

ЛЕММА 2. Пусть $d \in \text{Der}(L_\beta)$. Тогда $d = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$, где $d_k \in \text{End}(L_n)$ и $d_k(L_i) \subseteq L_{i+k}$ при $1 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественную фильтрацию $\{S_i\}$ алгебры L_β . Из следствия 1 нетрудно видеть, что эта фильтрация совпадает с естественной фильтрацией алгебры L_n . Таким образом, $S_k = \bigoplus_{i \geq k} L_i$ и по следствию 3 имеем, что $d(S_i) \subseteq S_i$, т.е.

$$d \in F_0 Z^1(L_n, L_n) \implies d_k \in \text{End}(L_n)$$

и $d_k(L_i) \subseteq L_{i+k}$. Лемма доказана.