Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Оселедец, Применение разделенных разностей и B -сплайнов для построения быстрых дискретных преобразований вейвлетовского типа на неравномерных сетках, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 743–752

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:59:52

УДК 591.6

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ И В-СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БЫСТРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЕЙВЛЕТОВСКОГО ТИПА НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

И. Оселедец

В работе строятся быстрые дискретные преобразования вейвлетовского типа с произвольным количеством нулевых моментов для неравномерных сеток. Получены явные формулы для определения параметров, задающих вейвлет-преобразование.

Библиография: 6 названий.

1. Введение

Классические вейвлеты (в другой терминологии всплески) и их применение в иерархическом анализе данных обычно связаны с равномерными сетками и использованием преобразования Фурье [1], [2]. Практический численный анализ приводит, как правило, к неравномерным сеткам. Построение функций и преобразований со свойствами классических вейвлетов в этом случае также возможно, но требует совершенно иной техники. В данной работе для построения нестандартных вейвлетов (“нестандартность” связана с использованием неравномерных сеток) используются В-сплайны, построенные на неравномерной сетке на интервале. Нестандартные вейвлеты используются затем для построения быстрых дискретных преобразований вейвлетовского типа, служащих для “сжатия” данных. Последнее обеспечивается тем, что нестандартные вейвлеты строятся с заданным количеством нулевых моментов. Основным результатом работы является запись линейной системы для параметров, определяющих искомое преобразование (лифтинговых коэффициентов) через разделенные разности и явное ее решение. Получены явные, удобные формулы для вычисления лифтинговых коэффициентов (см. раздел 4). При использовании полученных преобразований для сжатия матриц оказалось, что при заданной погрешности аппроксимации они обеспечивают более высокое сжатие данных, чем соответствующее вейвлет-преобразование Добеши.

2. Основные понятия и определения

2.1. Напомним определение В-сплайна (см. [3]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00590.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы некоторые точки, среди которых, по крайней мере, две различных: $y_0 \leq \dots \leq y_{k+1}$, $y_0 < y_{k+1}$. Тогда В-сплайном k -го порядка, построенным по этим точкам, называется функция

$$B(x) = [y_0; \dots; y_{k+1}](y - x)_+^k,$$

где через $[y_0; \dots; y_{k+1}]$ обозначен оператор разделенной разности, взятой по точкам $y_0, \dots, y_{k+1}$. Функция $(y - x)_+^k$ определяется как

$$(y - x)_+^k = \begin{cases} 0, & y < x, \\ (y - x)^k, & y \geq x. \end{cases}$$

Носителем В-сплайна является множество $\text{supp}(B) = [y_0, y_{k+1}]$. Теперь рассмотрим произвольную сетку

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k+1} = b,$$

удовлетворяющую условиям

$$x_i < x_{i+k+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

На этой сетке возможны совпадающие точки. Построим по этим точкам В-сплайны k -го порядка:

$$B_i(x) = [x_i; \dots; x_{i+k+1}](y - x)_+^k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В силу (1) носители этих сплайнов являются отрезками. Определим пространство V как линейную оболочку этих функций: $V = \text{Span}(B_1, \dots, B_n)$. Размерность этого пространства равна n . Теперь введем “более грубые” В-сплайны. Для этого рассмотрим дополнительную сетку $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, N + k + 1$, которая содержится в сетке $\{x_i\}$ (т.е. для любого номера i существует номер s такой, что $\tilde{x}_i = x_s$). От этой сетки мы потребуем, чтобы ее граничные точки совпадали с граничными точками исходной сетки:

$$x_1 = \tilde{x}_1, \quad x_{n+k+1} = \tilde{x}_{N+k+1}.$$

ПРИМЕРЫ. Если общее количество точек $n + k + 1$ нечетно, в качестве $\tilde{x}_i$ можно взять все нечетные точки:

$$\tilde{x}_i = x_{2i-1}, \quad 1 \leq i \leq \frac{n + k + 2}{2}. \quad (3)$$

В этом случае $N = (n - k)/2$. Построим по сетке $\{\tilde{x}_i\}$ неравномерные В-сплайны:

$$\tilde{B}_i = [\tilde{x}_i; \dots; \tilde{x}_{i+k+1}](y - x)_+^k, \quad i = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим пространство $\tilde{V} = \text{Span}(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N)$. Размерность этого пространства равна N . Пространства $V, \tilde{V}$ называются *масштабирующими пространствами*.

Рассмотрим два примера масштабирующих пространств.

ПРИМЕР 1. Для любой функции f из V $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(B_i) = [a, b]$. Если все точки x_i различны, то f непрерывна, и поэтому

$$f|_{x=a} = f|_{x=b} = 0.$$

ПРИМЕР 2. Если мы хотим, чтобы функции из V не обращались в 0 на границе (например, в b), нужно выбрать $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n+1$, различными, а $x_i = x_{n+1}$ при $i = n+2, \dots, n+k+1$.

2.2. Вейвлет-пространство. Масштабирующие и лифтинговые коэффициенты. Рассмотрим функцию $\tilde{B}_i$. Ее носителем является множество $\text{supp}(\tilde{B}_i) = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+k+1}]$. Для простоты будем считать все эти точки различными. В силу определения дополнительной сетки существуют номера s_0, s_1 такие, что $\tilde{x}_i = x_{s_0}$, $\tilde{x}_{i+k+1} = x_{s_1}$. В случае, когда точки x_i различны, известно, что В-сплайны $B_{s_0}, \dots, B_{s_1-k-1}$ образуют базис в пространстве $(k-1)$ раз дифференцируемых функций, которые на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = s_0, \dots, s_1-1$, являются полиномами k -й степени; $\tilde{B}_i$ принадлежит этому пространству, поэтому

$$\tilde{B}_i = \sum_{s=s_0}^{s_1-k-1} r_{is} B_s.$$

Коэффициенты r_{is} называются *масштабирующими коэффициентами* (*refinement coefficients*). Это свойство неравномерных В-сплайнов является необходимым для того, чтобы использовать их при построении вейвлетов. *Вейвлет-пространством* W называется пространство, которое является дополнением (необязательно ортогональным) к пространству $\tilde{V}$ в V :

$$\tilde{V} \dot{+} W = V$$

(прямая сумма). Его размерность равна $\dim W = \dim V - \dim \tilde{V} = n - N$. Базис в W мы будем обозначать через $\{\tilde{\psi}_i, i = 1, \dots, n - N\}$. Рассмотрим какое-нибудь пространство W с известным базисом

$$\tilde{\psi}_i = \sum_s \beta_{is} B_s, \quad i = 1, \dots, n - N.$$

Например, в (3) при $k = 1$ в качестве $\tilde{\psi}_i$ можно выбрать функции $\tilde{\psi}_i = B_{2i-1}$, $i = 1, \dots, (n+1)/2$. Теперь построим новое вейвлет-пространство с базисом

$$\tilde{\psi}_i = \sum_s \beta_{is} B_s - \sum_{j=j_{\min}(i)}^{j_{\max}(i)} \alpha_{ij} \tilde{B}_j. \quad (4)$$

Преобразование (4) является частным случаем общего преобразования, называемого лифтинговой схемой. Коэффициенты α_{ij} называются *лифтинговыми коэффициентами*. В данной работе эти коэффициенты выбираются так, чтобы $\{\tilde{\psi}_i\}$ имели заданное количество нулевых моментов (p -й момент функции f определяется как (f, x^p) , где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(a, b)$). Подробно лифтинговая схема и различные способы выбора лифтинговых коэффициентов рассматриваются в [4].

3. Основная система

Потребуем теперь, чтобы функции $\tilde{\psi}_i$ имели m нулевых моментов. Это означает, что

$$(\tilde{\psi}_i, x^p) = 0, \quad p = 0, \dots, m,$$

где $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2(a,b)}$ – скалярное произведение в $L_2(a, b)$. Подставляя выражение для $\tilde{\psi}_i$, получим следующую систему на лифтинговые коэффициенты:

$$\sum_s \beta_{is}(B_s, x^p) = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \alpha_{ij}(\tilde{B}_j, x^p). \quad (5)$$

Для вычисления моментов В-сплайнов нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. Пусть $B(x)$ – В-сплайн k -го порядка, построенный по произвольным (совпадающим или нет) точкам $a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_k \leq y_{k+1} = b$. Тогда p -й момент сплайна вычисляется по формуле

$$\int_a^b B(x) x^p dx = \frac{k! p!}{(k+p+1)!} [y_0; \dots; y_{k+1}] x^{k+p+1}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся интегральным выражением для разделенных разностей (см. [5]): для любой $(k+1)$ раз дифференцируемой на $[a, b]$ функции f

$$[y_0; \dots; y_{k+1}] f = \frac{1}{k!} \int_a^b B(x) f^{(k+1)}(x) dx. \quad (7)$$

Полагая в (7) $f(x) = x^{k+p+1}$, получим, что

$$\int_a^b B(x) x^p dx = \frac{k! p!}{(k+p+1)!} [y_0; \dots; y_{k+1}] x^{k+p+1}.$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1 и (5), запишем систему, которой удовлетворяют лифтинговые коэффициенты:

$$L_i x^{k+p+1} = \sum_j \alpha_{ij} [\tilde{x}_j; \tilde{x}_{(j+1)}; \dots; \tilde{x}_{(j+k+1)}] x^{k+p+1}, \quad 0 \leq p \leq m. \quad (8)$$

Через L_i обозначен следующий оператор:

$$L_i = \sum_s \beta_{is} [x_s; \dots; x_{s+k+1}].$$

В этой системе i фиксировано. Индекс j меняется от $j_{\min}$ до $j_{\max}$, причем для того, чтобы число неизвестных совпадало с числом уравнений необходимо условие $j_{\max} = j_{\min} + m$.

4. Решение основной системы

4.1. Займемся теперь решением системы (8). Так как (8) должно выполняться при $0 \leq p \leq m$, оно равносильно тому, что

$$L_i P(x) = \sum_j \alpha_{ij} [\tilde{x}_j; \tilde{x}_{(j+1)}; \dots; \tilde{x}_{(j+k+1)}] P(x) \quad (9)$$

для любого многочлена $P(x) = \sum_{s=0}^m a_s x^{s+k+1}$. Но так как разделенная разность $(k+1)$ -го порядка, взятая от многочлена степени не выше k , равна 0, то основная система эквивалентна уравнению (9). При этом $P(x)$ – уже произвольный многочлен степени $(m+k+1)$.

Найдем теперь такие многочлены $P_j(x)$, $j_{\min} \leq j \leq j_{\max}$, что

$$[\tilde{x}_r; \tilde{x}_{(r+1)}; \dots; \tilde{x}_{(r+k+1)}] P_j(x) = \delta_{rj}, \quad j_{\min} \leq r \leq j_{\max}. \quad (10)$$

Тогда подставляя эти многочлены в (9), получим, что

$$\alpha_{ij} = L_i P_j(x).$$

Для решения системы (8) достаточно указать какие-нибудь многочлены $P_j(x)$. Пусть сначала все $\tilde{x}_i$, $i = j_{\min}, \dots, j_{\max} + k + 1$, различны. Тогда многочлен P_j однозначно определяется своими значениями в этих точках. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. 1. *Многочлен $P_j(x)$ такой, что*

$$P_j(\tilde{x}_r) = \begin{cases} \tilde{x}_j - \tilde{x}_{j+1}, & j_{\min} \leq r \leq j, \\ 0, & j < r \leq j_{\max} + 1, \end{cases} \quad (11)$$

удовлетворяет (10) при $k = 0$.

2. *Многочлен $P_j(x)$ такой, что*

$$P_j(\tilde{x}_r) = \begin{cases} q(\tilde{x}_r), & j_{\min} \leq r \leq j, \\ 0, & j < r \leq j_{\max} + k + 1, \end{cases} \quad (12)$$

$$q(x) = (\tilde{x}_j - \tilde{x}_{(j+k+1)}) \prod_{l=j+1}^{j+k} (x - \tilde{x}_l),$$

удовлетворяет (10) при $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. То, что (11) удовлетворяет (10), проверяется непосредственной подстановкой.

2. Проверим, что (12) действительно дает решение системы (10). Возможны три случая.

а) Пусть $j < r \leq j_{\max}$. Тогда $P_j(\tilde{x}_s) = 0$ для всех $s = r, \dots, r + k + 1$. Поэтому

$$[\tilde{x}_r; \dots; \tilde{x}_{(r+k+1)}] P_j(x) = 0.$$

б) Пусть $j_{\min} \leq r \leq j-1$. Заметим, что в силу построения $P_j(x)$ $P_j(\tilde{x}_s) = q(\tilde{x}_s)$ при всех $j_{\min} \leq s \leq j+k$ (так как при $j < s \leq j+k$ $P_j(\tilde{x}_s) = 0 = q(\tilde{x}_s)$). Поэтому

$$[\tilde{x}_r; \dots; \tilde{x}_{(r+k+1)}]P_j(x) = [\tilde{x}_r; \dots; \tilde{x}_{(r+k+1)}]q(x) = 0,$$

так как разделенная разность порядка $k+1$ от многочлена степени не выше k равна 0.

в) Пусть $r = j$. Тогда

$$[\tilde{x}_r; \dots; \tilde{x}_{(r+k+1)}]P_j(x) = \frac{q(\tilde{x}_j)}{\prod_{l=j+1}^{j+k+1} (\tilde{x}_j - \tilde{x}_l)} = 1.$$

Теорема доказана.

Запишем теперь многочлен $P_j(x)$ в виде, подходящем и для случая совпадающих узлов. $P_j(x)$ представим в виде

$$P_j(x) = \prod_{s=j+1}^{j_{\max}+k+1} (x - \tilde{x}_s) \tilde{P}_j(x),$$

где многочлен $\tilde{P}_j(x)$ задается интерполяционными условиями

$$\tilde{P}_j(\tilde{x}_r) = \frac{q(\tilde{x}_r)}{\prod_{s=j+1}^{j_{\max}+k+1} (\tilde{x}_r - \tilde{x}_s)} = f(\tilde{x}_r), \quad r = j_{\min}, \dots, j,$$

где

$$f(x) = \frac{q(x)}{\prod_{s=j+1}^{j_{\max}+k+1} (x - \tilde{x}_s)}.$$

При $k = 0$

$$f(x) = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j+1}}{\prod_{s=j+1}^{j_{\max}+k+1} (x - \tilde{x}_s)},$$

а при $k \geq 1$

$$f(x) = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j+k+1}}{\prod_{s=j+k+1}^{j_{\max}+k+1} (x - \tilde{x}_s)}.$$

Поэтому, если мы запишем $\tilde{P}_j$ как интерполяционный многочлен Ньютона:

$$\tilde{P}_j = \sum_{r=j_{\min}}^j \prod_{s=j_{\min}}^r \frac{x - \tilde{x}_s}{x - \tilde{x}_{j_{\min}}} [\tilde{x}_{j_{\min}}; \dots; \tilde{x}_r] f(x), \quad (13)$$

то получим формулу, верную и для совпадающих узлов. Действительно, так как $\tilde{x}_{j+k+1} > \tilde{x}_j$, все разделенные разности от функции f , входящие в выражение (13), определены и в случае совпадающих узлов. Поэтому выражение (13) для совпадающих узлов получается предельным переходом.

4.2. Нахождение масштабирующих коэффициентов. Покажем, как находить масштабирующие коэффициенты. Напомним, что масштабирующие коэффициенты определяются как коэффициенты разложения сплайнов $\tilde{B}_i$ по исходным сплайнам:

$$\tilde{B}_i = \sum_{s=s_0}^{s_1-k-1} r_{is} B_s$$

(см. п. 2.1). Умножим это равенство на x^p , $0 \leq p \leq s_1 - s_0 - k - 1$, и проинтегрируем от a до b . В силу (6) мы получим следующую систему на коэффициенты r_{is} :

$$[\tilde{x}_i; \dots; \tilde{x}_{i+k+1}] x^{k+p+1} = \sum_{s=s_0}^{s_1-k-1} r_{is} [x_s; \dots; x_{s+k+1}] x^{k+p+1}, \quad 0 \leq p \leq s_1 - s_0 - k - 1.$$

Эта система в точности того же вида, как и система (8). Здесь $m = s_1 - s_0 - k - 1$. Поэтому, используя полученные в предыдущем разделе результаты, можно выписать формулы для масштабирующих коэффициентов.

5. Построение вейвлет-преобразования

5.1. Первый этап вейвлет-преобразования. Используем полученные результаты для построения вейвлет-преобразования. Первый шаг вейвлет-преобразования строится следующим образом. Функции $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_{n-N}\}$ образуют базис в пространстве V . Построим дуальный базис к этому базису в пространстве V , снабдив его скалярным произведением $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2(a,b)}$. Обозначим этот базис через $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi_1, \dots, \psi_{n-N}\}$. Построим также дуальный базис к базису $\{B_1, \dots, B_n\}$. Обозначим его через $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Тогда по определению дуального базиса имеем

$$(\varphi_i, \tilde{\psi}_j) = 0, \quad (\varphi_i, \tilde{B}_j) = \delta_{ij}, \quad (\psi_i, \tilde{\psi}_j) = \delta_{ij}, \quad (\psi_i, \tilde{B}_j) = 0.$$

Рассмотрим функцию f , лежащую в V . Преобразование координат при переходе от базиса $\{\phi_i\}$ к базису, составленному из векторов $\{\varphi_i, \psi_i\}$, и будет нашим вейвлет-преобразованием. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i + \sum_{i=1}^{n-N} d_i \psi_i. \quad (14)$$

Коэффициенты разложения (координаты) равны

$$a_i = (f, B_i), \quad c_i = (f, \tilde{B}_i), \quad d_i = (f, \tilde{\psi}_i).$$

5.2. Следующие этапы вейвлет-преобразования. При первом шаге вейвлет-преобразования вектор координат $\{a_i\}$ переходит в вектор c_i, d_i . Далее, пространство $\tilde{V}$, построенное по сетке $\{\tilde{x}_i, i = 1, \dots, N\}$, аналогичным образом снова разбивается на более “грубое” масштабирующее пространство $\tilde{\tilde{V}}$ и вейвлет-пространство W_{-1} . На каждом шаге преобразования размерность пространства V уменьшается примерно в 2 раза. Поэтому, число шагов вейвлет-преобразования не больше $\log_2(n)$.

5.3. Простейший частный случай. Рассмотрим частный случай, иллюстрирующий преимущества вейвлет-преобразования. Пусть $k = 0$. Будем использовать для упрощения В-сплайны с высотой 1 (т.е. их максимальное значение равно 1), которые отличаются от введенных в §2 В-сплайнов нулевого порядка множителем. Пусть также $n = 2l$, $\tilde{x}_i = x_{2i-1}$, $N = l$. Тогда

$$\tilde{B}_i = B_{2i-1} + B_{2i}, \quad \tilde{\psi}_i = B_{2i-1} - \sum_j \alpha_{ij} \tilde{B}_j, \quad i = 1, \dots, l.$$

Поэтому первый шаг вейвлет-преобразования запишется в следующем виде:

$$c_i = a_{2i-1} + a_{2i}, \quad d_i = a_{2i-1} - \sum_j \alpha_{ij} c_j.$$

Это преобразование можно записать так: вектор a_i переходит в вектор a'_i с координатами

$$a'_{2i} = a_{2i-1} + a_{2i}, \quad a'_{2i-1} = a_{2i-1} - \sum_j \alpha_{ij} a'_{2j}.$$

Легко выписать обратное преобразование:

$$a_{2i-1} = a'_{2i-1} + \sum_j \alpha_{ij} a'_{2j}, \quad a_{2i} = a'_{2i} - a_{2i-1}.$$

Это иллюстрирует преимущества вейвлет-преобразования:

- прямое и обратное преобразования выполняются за $O(n)$ время;
- преобразование можно совершать без использования дополнительной памяти прямо на “месте” вектора a_i .

Покажем теперь, почему при нашем вейвлет-преобразовании должно происходить сжатие вектора. Пусть теперь сетка равномерная, $x_i = i/(n + k + 1)$. Тогда все $B_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, являются сдвигами некоторой функции f :

$$B_i = f(x - x_i).$$

Поэтому условия ортогональности (5) примут вид

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\sum_s \beta_{is} f(x - x_s) - \sum_j \alpha_{ij} \left(\sum_a r_{ja} f(x - x_a) \right) \right] x^p dx \\ &= \int_{\text{supp}(f)} f(x) \left[\sum_s \beta_{is} (x + x_s)^p - \sum_j \alpha_{ij} \left(\sum_a r_{ja} (x + x_a)^p \right) \right] dx = 0, \\ & 0 \leq p \leq m. \end{aligned}$$

Полагая последовательно $p = 0, 1, \dots, m$, получим, что α_{ij} удовлетворяют следующей системе:

$$\sum_s \beta_{is} x_s^p = \sum_j \alpha_{ij} \left(\sum_a r_{ja} x_a^p \right), \quad 0 \leq p \leq m. \quad (15)$$

Как нетрудно видеть, это условие гарантирует нам, что если исходный вектор задан как $a_i = x_i^p$, $0 \leq p \leq m$, то d_i будут равны 0. Поэтому, если $a_i = g(x_i)$, где $g(x)$ – достаточно гладкая функция, то d_i будут значительно меньше c_i . Заметим также, что (15) можно рассматривать как условия, определяющие лифтинговые коэффициенты для случая равномерной сетки. Поэтому мы умеем решать любую систему вида (15), если x_i – равномерная сетка.

6. Численные эксперименты

Была написана программа на фортране и проведены некоторые “тестовые” эксперименты. Мы также сравнили построенное преобразование с преобразованием Добеши (ПД) (см. [6]). Для того, чтобы применить преобразование Добеши к вектору конечной длины, мы использовали периодизированное ПД. В экспериментах k бралось равным 1. Результаты при сжатии матриц для наших преобразований получились лучше, чем для использованного ПД. В качестве тестовой матрицы была взята матрица Коши:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|x_i - x_j|}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

где $\{x_i\}$ – заданная сетка. Матрица C преобразовывалась по формуле

$$C' = SC S^T,$$

где S – матрица вейвлет-преобразования. После этого в матрице C' отбрасывались элементы, меньшие по модулю некоторого порога τ , в результате чего получалась матрица C'_τ . Нас интересовала доля ненулей в матрице C'_τ (заполнение матрицы). Также вычислялась ошибка такой аппроксимации ε :

$$\varepsilon = \frac{\|C - S^{-1}C'_\tau S^{-T}\|_F}{\|C\|_F}.$$

Рис. 1. Сжатие тестовой матрицы, построенной по равномерной сетке, при различных вейвлет-преобразованиях

Рис. 2. Сжатие тестовой матрицы, построенной по сетке $x_i = \cos \frac{\pi i}{2(n+2)}$, при различных вейвлет-преобразованиях

Сравнивались следующие преобразования: преобразования Добеши $D2$, $D4$ (с 2 и 4 коэффициентами) и наши преобразования при $m = 1$ и $m = 3$. Графики зависимости $\varepsilon(f)$ (f -заполнение матрицы C'_T) для различных преобразований и различных сеток представлены на рис. 1 и 2 (по оси x – заполнение преобразованной матрицы, по оси y – $\lg \varepsilon$, $n = 511$).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е.Е. Тиртышникову за постановку задачи и помощь в написании статьи и Н.Л. Замарашкину за внимательное прочтение текста и сделанные ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
- [2] Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
- [3] Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
- [4] Sweldens W. The lifting scheme: A custom design construction of biorthogonal wavelets // Industrial Mathematics Initiative 1994. V. 7: University of South Carolina, 1994.
- [5] Акопян А.А., Саакян А.А. Многомерные сплайны и полиномиальная интерполяция // УМН. 1993. Т. 48. № 5.
- [6] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. of Pure and Appl. Math. 1988. V. 41(7). P. 990–996.

Поступило

01.12.2003

Исправленный вариант

13.04.2004