Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Побережный, О специальных группах монодромии и проблеме Римана–Гильберта для уравнения Римана, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 753–767

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:53:06

УДК 517.9+524.745.87

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРУППАХ МОНОДРОМИИ И ПРОБЛЕМЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИМАНА

В. А. Побережный

В работе дано решение проблемы Римана–Гильберта для уравнения Римана и гипергеометрического уравнения. Описаны все возможные представления монодромии уравнения Римана. Показано, что если монодромия уравнения Римана лежит в $SL(2, \mathbb{C})$, то ее можно реализовать не только уравнением Римана, но и более специальным уравнением Римана–Штурма–Лиувилля. Для гипергеометрического уравнения нами построен критерий принадлежности группы его монодромии к $SL(2, \mathbb{Z})$.

Библиография: 10 названий.

Уравнением Римана называют фуксово дифференциальное уравнение второго порядка с тремя особыми точками $\mathcal{D} = \{a_1, a_2, a_3\}$ на сфере Римана. Как известно, всякое уравнение порождает некоторое представление монодромии. А именно, взяв в точке z_0 некоторый росток фундаментального набора решений $Y(z)$ и продолжив его вдоль петли γ получим другой росток $Y^*(z)$, который также является ростком некоторого базиса и связан с $Y(z)$ постоянной матрицей: $Y(z) = Y^*(z)G_\gamma$. Очевидно, G_γ зависит не от самого пути γ , а лишь от гомотопического класса $[\gamma]$. Определенный таким образом гомоморфизм $\chi: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ называется *представлением монодромии*, а его образ – *группой монодромии* уравнения, или просто *монодромией*. Задача восстановления уравнения по представлению монодромии была впервые поставлена Риманом. Вопрос о существовании фуксова линейного дифференциального уравнения с заданными монодромией и особыми точками был включен Гильбертом под номером 21 в число его математических проблем, и носит название проблемы Римана–Гильберта. В данной работе исследуется монодромия уравнения Римана и решается для него проблема Римана–Гильберта. Известно, что фуксово уравнение порядка p с n особыми точками задается

$$\frac{p^2}{2}(n-2) + \frac{pn}{2}$$

параметрами. Представление же монодромии зависит от $p^2(n-2) + 1$ констант. Следовательно, при $p > 2$ и $n > 3$ построение уравнения по заданной монодромии в общем случае невозможно, так как представление задается большим числом параметров, чем

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00539, программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-457.2003.1, и программы “Математические методы в нелинейной динамике”.

уравнение. Таким образом, случай уравнения Римана ($p = 2, n = 3$) является выделенным.

В первой части работы с помощью результатов Левеля описаны представления монодромии, которые может иметь уравнение Римана. Во второй части показано, что всякую монодромию из $SL(2, \mathbb{C})$, которая может быть реализована уравнением Римана, можно реализовать и более специальным уравнением Римана–Штурма–Лиувилля. В третьей части построен критерий принадлежности монодромии гипергеометрического уравнения группе $SL(2, \mathbb{Z})$. Результат первой части был ранее получен в [1] алгебраическими методами с помощью теории представлений и соотношения Фукса.

Автор признателен А.А. Болибруху за внимание к работе, ценные обсуждения, критические замечания и поддержку.

0. Предварительные сведения

В этом разделе мы изложим некоторые факты из теории фуксовых уравнений и систем, которые нам потребуются в дальнейшем. Так как сначала нас интересует локальная теория, для удобства будем считать нуль одной из особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение

$$y^{(k)} + b_1(z)y^{(k-1)} + \dots + b_k(z)y = 0$$

называется *фуксовым в особой точке нуль*, если $b_j(z)$ имеет в нуле полюс порядка не более j , т.е. $b_j(z)z^j$ голоморфна в окрестности точки 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система

$$\dot{y} = B(z)y, \quad y \in \mathbb{C}^n, \quad B(z) \in M_n(\mathbb{C}),$$

называется *фуксовой в особой точке нуль* (особая точка нуль системы фуксова), если $B(z)$ имеет там полюс первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система (уравнение) называется *фуксовой*, если оно фуксово во всех своих особых точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Особая точка нуль для системы (уравнения) называется *регулярной*, если у любой компоненты решения рост в ней при стремлении z к нулю по сектору с центром в нуле, раствора меньше 2π не более, чем степенной.

Известна связь понятий регулярности и фуксовости для уравнений [3], [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Уравнение регулярно тогда и только тогда, когда оно фуксово.*

Для систем имеем [4], [5]

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если система фуксова, то она регулярна.*

Определим теперь понятие левелевского нормирования в точке a_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Левелевское нормирование в точке нуль* для функции $f(z)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_0(f) = \sup \left(\lambda \in \mathbb{Z} : \frac{f(z)}{z^\lambda} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow 0 \text{ по сектору раствора меньше } 2\pi \right).$$

Нормирования вектора и матрицы определяются как минимум нормирований компонент.

В частности, если $f(z) = c_{-k}/z^k + \dots + c_0 + \dots + c_j z^j + \dots$, то $\varphi_0(f) = -k$.

Для введенного нормирования выполняются следующие свойства:

- 1) $\varphi_0(c \cdot f) = \varphi_0(f)$ для любого $c \in \mathbb{C}$;
- 2) $\varphi_0(f \cdot \ln^\alpha z) = \varphi_0(f)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$;
- 3) $\varphi_0(f_1 + f_2) \geq \min(\varphi_0(f_1), \varphi_0(f_2))$ и при $\varphi_0(f_1) \neq \varphi_0(f_2)$ имеет место строгое равенство;
- 4) $\varphi_0(g^* f) = \varphi_0(f)$, где g^* – оператор монодромии, соответствующий обходу вокруг нуля против часовой стрелки.

Введенное нормирование определяет подпространства $\mathcal{X}^j$ пространства решений $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}^j = \{f \in \mathcal{X} : \varphi_0(f) \geq j\},$$

для которых при $i \geq k$ $\mathcal{X}^i \subseteq \mathcal{X}^k$. Из конечномерности $\mathcal{X}$ сразу же получаем, что нормирование на $\mathcal{X}$ принимает лишь конечное число значений $-\infty < \varphi_0^1 < \dots < \varphi_0^k < \infty$, и определяет левелевскую фильтрацию:

$$0 \subset \mathcal{X}^{\varphi_k} \subset \dots \subset \mathcal{X}^{\varphi_1} = \mathcal{X}.$$

Из свойств нормирования следует, что все $\mathcal{X}^{\varphi_j}$ инвариантны относительно действия оператора соответствующей монодромии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Базис $(e_1, \dots, e_p)$ пространства решений системы или уравнения называется *слабо ассоциированным в точке a_i* , если на нем $\varphi_{a_i}(\cdot)$ принимает все свои возможные значения с учетом кратностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Слабо ассоциированный базис $(e_1, \dots, e_p)$ называется *ассоциированным*, если матрица монодромии G_{a_i} в нем верхнетреугольна и, кроме того, $\varphi_{a_i}(e_k) \geq \varphi_{a_i}(e_{k+1})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Базис, полученный объединением ассоциированных базисов корневых подпространств оператора монодромии, называется *левелевским*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [6]. *Левелевский базис является слабо ассоциированным.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть G – матрица монодромии. Тогда ее *нормализованный логарифм* есть матрица E следующего вида:

$$E = \frac{1}{2\pi i} \ln G, \quad \operatorname{Re} \rho_i \in [0; 1),$$

где ρ_i – собственные значения E , а $\operatorname{Re} \rho_i$ их целые части.

Легко заметить, что при обходе вокруг нуля $z^{-E_0} \rightarrow G_0^{-1} z^{-E_0}$ и, таким образом, фундаментальная матрица в окрестности нуля допускает разложение $Y = M(z) z^{E_0}$. Здесь $M(z)$ – мероморфная матричная функция, а E_0 – соответствующий нормализованный логарифм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 [7]. В слабо ассоциированном базисе фундаментальная матрица системы с регулярной особой точкой 0 допускает разложение

$$Y(z) = U_0(z) z^{A_0} z^{E_0},$$

где E_0 – нормализованный логарифм матрицы G_0 , A_0 – целочисленная диагональная матрица нормирований столбцов $A_0 = \text{diag}(\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^p)$, $U_0(z)$ голоморфна в окрестности нуля. Система фуксова в нуле тогда и только тогда, когда $\det U_0(0) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Числа $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$, стоящие на диагонали матрицы $A_{a_i} + E_{a_i}$, полученной разложением матрицы ассоциированного в a_i базиса, называются показателями пространства $\mathcal{X}$ в точке a_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 [6]. Сумма показателей системы с регулярными особыми точками – неположительное целое число; система фуксова тогда и только тогда, когда $\sum_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{j=p} \beta_i^j = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6 [8]. Для показателей фуксова уравнения порядка p с n особыми точками имеет место соотношение Фукса

$$\sum_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{j=p} \beta_i^j = \frac{(n-2)p(p-1)}{2}.$$

Задача восстановления системы по заданной монодромии носит название проблемы Римана–Гильберта. Данная работа основывается на следующем результате, полученном Крыловым [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. В размерности 2 проблема Римана–Гильберта разрешима в классе фуксовых систем с тремя особыми точками. То есть всегда существует фуксова система с тремя заранее заданными особыми точками, реализующая требуемую монодрию.

Аналогичный результат для произвольного числа точек был позднее получен Деккерсом [10].

1. GL -монодромия

1.1. Неприводимые представления. Пусть задано неприводимое $GL(2, \mathbb{C})$ -представление χ и Y – фундаментальная матрица решений системы, реализующая χ (по утверждению 7 такая система существует), построенная по левелевскому базису в точке a_i ,

$$Y(z) = U_i(z) z^{A_i} z^{E_i}, \quad \det U_i(a_i) \neq 0.$$

Рассмотрим теперь

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_i^{-1}(a_i) Y.$$

Очевидно, $\tilde{Y}$ – фундаментальная матрица системы с теми же особыми точками и монодромией. Обозначим ее опять за Y .

ЛЕММА 1.1. В случае неприводимости представления χ элементы первой строки матрицы $Y(z)$ – функции $y_1(z)$, $y_2(z)$ – линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $y_1(z)$, $y_2(z)$ зависимы, т.е.

$$y_2(z) = ky_1(z). \quad (1)$$

Это накладывает следующие условия на матрицы G_{a_i} : так как из (1) следует $g_i^*(y_2) = kg_i^*(y_1)$ для всех i , где g_i^* – оператор монодромии, соответствующий обходу a_i , то для G_{a_i} , имеющих вид

$$G_{a_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix},$$

должно выполняться

$$k\alpha_i + k^2\gamma_i = \beta_i + k\delta_i.$$

Известно, что фундаментальную матрицу решений можно умножать справа на невырожденную, получая опять фундаментальную матрицу. Это соответствует замене базиса в пространстве решений. Взяв теперь

$$S = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ -k^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

получим в базисе $\tilde{Y} = YS$

$$\tilde{G}_{a_i} = S^{-1}G_{a_i}S = \begin{pmatrix} \alpha_i - k^{-1}\beta_i & k^{-1} \\ 0 & \delta_i - k^{-1}\beta_i \end{pmatrix}$$

для всех i одновременно, что противоречит неприводимости представления χ .

Итак, Y – матрица, построенная по левелевскому базису, такая, что

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad U_i(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь (y_1, y_2) за базис пространства решений некоторого фуксова уравнения и покажем, что оно будет уравнением Римана. Из вида $U_i(a_i)$ следует $\varphi_{a_i}(y_1) \geq \varphi_{a_i}^1$. Показатели уравнения в точках $\mathcal{D}$ очевидным образом связаны с показателями исходной системы:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i^1 &\geq \beta_i^1 + 1, & \tilde{\beta}_i^2 &= \beta_i^2, \\ \operatorname{Re} \tilde{\beta}_j^k &\geq \operatorname{Re} \beta_j^k, & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_j^k &= \operatorname{Im} \beta_j^k, & j &\neq i. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.2. Пусть $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ – независимые, голоморфные на $(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D})$ элементы первой строки некоторой фундаментальной матрицы системы с неприводимой монодромией, $\mathcal{D}$ содержит не более трех точек и выполняется $\sum_{\mathcal{D}} (\tilde{\beta}_i^1 + \tilde{\beta}_i^2) \geq 1$. Тогда

$$\begin{vmatrix} y & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ y' & \tilde{y}'_1 & \tilde{y}'_2 \\ y'' & \tilde{y}''_1 & \tilde{y}''_2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_1 & \tilde{y}'_2 \end{vmatrix}} = 0$$

– фуксово уравнение с особыми точками $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение будет регулярно и, следовательно, фуксово. Предположим, что благодаря нулям детерминанта у уравнения появится k ложных особых точек $\mathcal{D}_k$. Тогда из соотношения Фукса (утверждение 6)

$$\sum_{\mathcal{D}} (\tilde{\beta}_i^1 + \tilde{\beta}_i^2) + \sum_{\mathcal{D}_k} (\tilde{\beta}_i^1 + \tilde{\beta}_i^2) \leq k + 1.$$

Заметим, что в точках $\mathcal{D}_k$ решения голоморфны и, следовательно, показатели в них целые неотрицательные числа. Кроме того, определитель, стоящий в знаменателе, равен нулю в некоторой точке тогда и только тогда, когда существует линейная комбинация $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$, имеющая в данной точке нуль, по крайней мере, второго порядка (т.е. когда столбцы линейно зависимы). Следовательно, в любой точке b_i , принадлежащей $\mathcal{D}_k$, хотя бы одно из нормирований, а следовательно, и показателей больше или равно 2. Тогда

$$1 + k \geq \sum_{\mathcal{D}} (\tilde{\beta}_i^1 + \tilde{\beta}_i^2) + \sum_{\mathcal{D}_k} (\tilde{\beta}_i^1 + \tilde{\beta}_i^2) \geq 1 + 2k,$$

что возможно только при $k = 0$. То есть уравнение не имеет дополнительных особых точек.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Уравнение, построенное по выбранным выше y_1, y_2 , будет искомым уравнением Римана.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выбора y_1, y_2 следует, что уравнение будет фуксовым; по доказанной лемме оно будет иметь ровно три особых точки; следовательно, – это уравнение Римана.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Показатели построенного таким образом уравнения связаны с показателями исходной системы следующим образом:*

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_j^k &= \beta_j^k \quad \text{при } j \neq i, \\ \tilde{\beta}_i^1 &= \beta_i^1 + 1, \quad \tilde{\beta}_i^2 = \beta_i^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали центральную теорему этого раздела.

ТЕОРЕМА 1.1. *Любое неприводимое двумерное представление монодромии с двумя независимыми порождающими реализуется фуксовым уравнением второго порядка с тремя особыми точками.*

1.2. Приводимые представления. Так как мы рассматриваем приводимые представления, задающиеся всего двумя матрицами, нам надо рассмотреть всего три случая. А именно, в зависимости от того ни одна из матриц, одна или две имеют диагональный жорданов вид, будем называть соответствующие представления *недиагонализуемыми, диагонализуемыми* или *диагональными*.

1.2.1. *Диагональная монодромия.* Имеется ввиду случай, приводящийся к $G_i = \text{diag}(\alpha_i, \beta_i)$ для всех i одновременно. Прежде всего докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1.3. *Если уравнение Римана имеет диагональную монодромию, то хотя бы одна из G_i – скалярная матрица.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим существует уравнение с диагональной монодромией без скалярных матриц. Прделаем с ним следующие преобразования. Положим $a_3 = \infty$, что всегда можно достичь конформным преобразованием сферы Римана. Если все матрицы не скалярны, то существуют два независимых решения, образующих глобальный левелевский базис:

$$u_1(z) = (z - a_1)^{\beta_1^1} (z - a_2)^{\beta_1^1} P_1(z), \quad u_2(z) = (z - a_1)^{\beta_1^2} (z - a_2)^{\beta_2^2} P_2(z),$$

где $\beta_i^1 \neq \beta_i^2$, P_1, P_2 – многочлены степеней n_1, n_2 без нулей в a_1, a_2 . Так как оператор монодромии в ∞ не скаляр, то $\beta_j^j = -\beta_1^j - \beta_2^j - n_j$ ((u_1, u_2) – глобальный левелевский базис). Напомним, что если все собственные значения монодромии различны, как в нашем случае, то левелевский базис определен однозначно. Но по соотношению Фукса

$$\sum_{\mathcal{O}} (\beta_i^1 + \beta_i^2) = -n_1 - n_2 = 1,$$

что невозможно.

Итак можно считать, что $G_3 = \gamma \cdot I$. Выберем y_1, y_2 – решения фуксовых уравнений первого порядка с монодромиями $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma$:

$$y_1 = (z - a_1)^{\lambda_1} (z - a_2)^{\mu_1} (z - a_3)^{\nu}, \quad y_2 = (z - a_1)^{\lambda_2} (z - a_2)^{\mu_2} (z - a_3)^{\nu}$$

так, чтобы они удовлетворяли соотношению $\lambda_i + \mu_i + \nu = 0$ (теперь мы уже полагаем ∞ точкой голоморфности), что всегда возможно, так как их сумма целая ($e^{2\pi i(\lambda_i + \mu_i + \gamma)} = \alpha_i \beta_i \gamma = 1$), а монодромией каждое из чисел также определяется лишь с точностью до целого. По этой же причине y_1, y_2 можно считать линейно независимыми. Возьмем теперь y_1, y_2 за базис пространства решений некоторого уравнения. Очевидно, для этого уравнения показатели в точках a_1, a_2, a_3 соответственно равны $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2), (\nu + 1, \nu)$. Действительно, так как в a_3 и y_1 , и y_2 пропорциональны $(z - a_3)^{\nu}$, существует их линейная комбинация, растущая как $(z - a_3)^{\nu+1}$. Теперь из леммы 1.2 сразу же получаем, что данное уравнение будет уравнением Римана. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1.2. *Диагональное представление реализуется уравнением Римана тогда и только тогда, когда хотя бы одна из матриц монодромии скалярна.*

1.2.2. Диагонализуемая в точке монодромия. Пусть задано приводимое неразложимое представление

$$\chi: \quad G_1 = \begin{pmatrix} g_{11}^1 & 0 \\ 0 & g_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{12}^2 \\ 0 & g_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} g_{11}^3 & g_{12}^3 \\ 0 & g_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1.4. *Пусть Y – фундаментальная матрица системы с заданной монодромией. Тогда пары (y_{11}, y_{12}) и (y_{21}, y_{22}) не могут быть линейно зависимыми одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $k \cdot y_{11} = y_{12}$, $y_{21} = l \cdot y_{22}$. Здесь $kl \neq 1$, так как столбцы линейно независимы. Тогда в базисе

$$\tilde{Y} = Y \begin{pmatrix} 1/(1-kl) & -k/(1-kl) \\ -l/(1-kl) & 1/(1-kl) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{y}_4 \end{pmatrix}$$

фундаментальная матрица и, следовательно, монодромия диагональна, что противоречит неразложимости представления χ .

Итак, пусть Y – левелевская в точке с диагональной монодромией фундаментальная матрица. Пусть это точка a_1 . Перейдем к

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1}(a_1)Y$$

и обозначим ее снова за Y . Для этой матрицы

$$U_1(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

теперь либо (y_{11}, y_{12}) , либо (y_{21}, y_{22}) линейно независимы, и являются либо левелевским базисом уравнения с натянутым на них пространством решений, либо его транспозицией (так как G_0 диагональна) и, следовательно, удовлетворяя условиям леммы 1.2, порождают искомое уравнение Римана. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 1.3. *Всякое приводимое неразложимое представление, диагонализуемое хотя бы в одной точке, может быть реализовано уравнением Римана.*

1.2.3. *Недиагонализуемая монодромия.* Речь пойдет о представлениях вида

$$\chi: G_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & c \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & d \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Базис (y_1, y_2) , в котором монодромия имеет такой вид, будет глобальным левелевским базисом, так как единственное подпространство, инвариантное относительно оператора, приводящегося к жордановой клетке, натянуто на первый вектор жорданова базиса. Следовательно, показатели уравнения можно определять по этому базису. Можно заметить, что β_i^1 есть ничто иное, как логарифмический вычет y_1 в точке a_i . Сумма всех вычетов y_1 по $\mathbb{CP}^1$ равна нулю и складывается из суммы вычетов по $\mathcal{D}$ и неотрицательной суммы вычетов по нулям y_1 . Таким образом, $\sum_{\mathcal{D}} \beta_i^1 \leq 0$. Из левелевости базиса следует также $\operatorname{Re} \beta_i^1 \geq \operatorname{Re} \beta_i^2$. Отсюда получаем $\sum_{\mathcal{D}} (\beta_i^1 + \beta_i^2) \leq 2 \sum_{\mathcal{D}} \beta_i^1 \leq 0$, что противоречит соотношению Фукса. Таким образом из сказанного следует

ТЕОРЕМА 1.4. *Всякое приводимое представление монодромии уравнения Римана диагонализуемо хотя бы в одной точке.*

2. SL -монодромия

Известно [3], что уравнение Римана полностью определяется своим дивизором $\mathcal{D}$ и показателями β_i^j . А именно, если $\infty \notin \mathcal{D} = \{a_1, a_2, a_3\}$, то уравнение имеет вид

$$y'' + \left(\sum_{\mathcal{D}} \frac{1 - \beta_i^1 - \beta_i^2}{z - a_i} \right) y' + \left(\sum_{\mathcal{D}} \frac{\beta_i^1 \beta_i^2}{z - a_i} \cdot \frac{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}{\prod_{\mathcal{D}} (z - a_i)} \right) y = 0. \quad (2)$$

Если же $\infty \in \mathcal{D}$, то полагая $a_3 = \infty$, получаем

$$y'' + \left(\sum_{i=1,2} \frac{1 - \beta_i^1 - \beta_i^2}{z - a_i} \right) y' + \left(\frac{\beta_1^1 \beta_1^2 (a_1 - a_2)}{z - a_1} + \frac{\beta_2^1 \beta_2^2 (a_2 - a_1)}{z - a_2} + \beta_3^1 \beta_3^2 \right) \frac{y}{(z - a_1)(z - a_2)} = 0. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем называть *уравнением Римана–Штурма–Лиувилля* уравнение Римана с нулевым коэффициентом при y' :

$$y'' + q(z)y = 0.$$

Из (2), (3) и соотношения Фукса на β_i^j сразу же следует, что ∞ является одной из особых точек уравнения Римана–Штурма–Лиувилля. Исследуем теперь монодромию этого уравнения. Из выражения коэффициентов через показатели следует для $i = 1, 2$

$$1 = \beta_i^1 + \beta_i^2 = (\rho_i^1 + \rho_i^2) + (\varphi_i^1 + \varphi_i^2) \implies (\rho_i^1 + \rho_i^2) \in \mathbb{Z} \implies 1 = e^{2\pi i(\rho_i^1 + \rho_i^2)} = \det G_i.$$

Таким образом, монодромия уравнения Римана–Штурма–Лиувилля лежит в $SL(2, \mathbb{C})$. Возникает вопрос, какие из SL -представлений могут быть реализованы подобным уравнением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Представление $\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ может быть реализовано монодромией уравнения Римана–Штурма–Лиувилля, если и только если существует реализующее χ уравнение Римана такое, что сумма показателей в двух его особых точках из трех равна единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в точках a_1, a_2 сумма показателей равна единице. Конформно переведем a_3 в ∞ . По формуле (3) полученное уравнение будет уравнением Римана–Штурма–Лиувилля. Обратное утверждение очевидно.

Остается выяснить, когда требуемую монодромию можно задать именно таким уравнением. Теперь, как и в части 1, рассмотрим различные классы уравнений.

2.1. Диагональная монодромия. Реализуем сначала вырожденный случай – $G_i = I$ для всех i . Для этого возьмем

$$y_1 = (z - a_1)^2(z - a_2)^{-1}(z - a_3)^{-1}, \quad y_2 = (z - a_1)^{-1}(z - a_2)^2(z - a_3)^{-1}.$$

Как показано в разделе 1.2.1, это базис пространства решений некоторого уравнения Римана. По следствию 1.2 $\beta_i^1 + \beta_i^2 = \varphi_i^1 + \varphi_i^2 = 1$ для $i = 1, 2$. Из утверждения 2.1

следует реализуемость данного представления. Далее, если не все G_i единичные, то $\rho_1^j + \rho_2^j + \rho_3^j = 1$, $j = 1, 2$, где ρ_i^j – соответствующие нормализованные логарифмы. В этом случае, полагая по лемме 1.3 $G_3 = \pm I$, за y_1, y_2 берем

$$\begin{aligned} y_1 &= (z - a_1)^{k+\rho_1^1} \cdot (z - a_2)^{-k+\rho_2^1} \cdot (z - a_3)^{-1+\rho_3}, \\ y_2 &= (z - a_1)^{-k+\rho_1^2} \cdot (z - a_2)^{k+\rho_2^2} \cdot (z - a_3)^{-1+\rho_3}. \end{aligned}$$

Так как хотя бы в двух точках $G_i \neq I$, то в них $\beta_i^1 + \beta_i^2 = \rho_i^1 + \rho_i^2 = 1$ и, следовательно, построенное по y_1, y_2 уравнение Римана удовлетворяет условиям утверждения 1.2. То есть любая диагональная монодромия, имеющая одну из G_i скалярной, может быть реализована уравнением Римана–Штурма–Лиувилля.

2.2. Прочие представления. В данном разделе нам потребуются некоторые факты из теории фуксовых систем. Итак, матрица фуксовой системы, имеющая ∞ точкой голоморфности, очевидно, имеет вид

$$B(z) = \sum_{\mathcal{D}} \frac{B_i}{z - a_i}, \quad \sum B_i = 0.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть Y – фундаментальная матрица фуксовой системы $\dot{Y} = B(z)Y$, построенная по левелевскому в a_i базису

$$Y = U_i(z)(z - a_i)^{A_i}(z - a_i)^{E_i},$$

и пусть $L_i = \lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)^{A_i} E_i (z - a_i)^{-A_i} + A_i$. Тогда

$$B_i = U_i(a_i) L_i U_i^{-1}(a_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в окрестности a_i

$$B(z) = \frac{dY}{dz} Y^{-1} = \left(\frac{dU_i(z)}{dz} U_i^{-1}(z) + \frac{U_i(z)(A_i + (z - a_i)^{A_i} E_i (z - a_i)^{-A_i}) U_i^{-1}(z)}{z - a_i} \right),$$

из чего сразу же вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если A_i скалярна, то $L_i = A_i + E_i$.

Центральным утверждением раздела, позволяющим получать системы наиболее удобного для дальнейших построений вида, является

ЛЕММА 2.2 [2]. Для любого $\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D} \rightarrow GL(2, \mathbb{C}))$ существует реализующая его фуксова система, нормирования которой хотя бы в двух точках имеют вид $\varphi_i^1 = \varphi_i^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что существуют две точки, в которых нормирования совпадают. Например, точки a_1, a_2 , т.е. $\varphi_1^1 = \varphi_1^2 = k$, $\varphi_2^1 = \varphi_2^2 = l$. В этом случае перейдем от пространства решений $\mathcal{X}$ к пространству

$$\mathcal{X}' = \left(\frac{(z - a_3)^{k+l}}{(z - a_1)^k (z - a_2)^l} \right)^I \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \frac{(z - a_3)^{k+l}}{(z - a_1)^k (z - a_2)^l} & 0 \\ 0 & \frac{(z - a_3)^{k+l}}{(z - a_1)^k (z - a_2)^l} \end{pmatrix} \mathcal{X},$$

которое, очевидно, будет пространством решений системы с той же монодромией и искомыми нормированиями. Если же хотя бы в двух точках (предположим, опять в a_1, a_2) выполняется $\varphi_i^1 - \varphi_i^2 > 0$, проделаем следующую процедуру. Перейдем сначала к

$$\mathcal{X}' = U_1^{-1}(a_1)\mathcal{X},$$

а затем к

$$\mathcal{X}'' = \Gamma_1(z)\mathcal{X} = \begin{pmatrix} (z - a_2)/(z - a_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{X}'.$$

Из вида $U_1''(z)$, очевидно, $\varphi_1^{1''} = \varphi_1^1 - 1$, $\varphi_1^{2''} = \varphi_1^2$. Рассмотрим теперь

$$U_2''(z) = \begin{pmatrix} (z - a_2)(a_0 + \dots) & (z - a_2)(b_0 + \dots) \\ c_0 + \dots & d_0 + \dots \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь $a_0 \neq 0$; тогда, беря

$$\Gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c_0 a_0^{-1}/(z - a_2) & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$U_2'''(z) = \Gamma_2(z)U_2''(z) = \begin{pmatrix} (z - a_2)(a_0 + \dots) & (z - a_2)(b_0 + \dots) \\ (z - a_2)(c_1 - c_0 a_1 a_0^{-1} + \dots) & (a_0^{-1} \det U_2'(a_2) + \dots) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\varphi_1^{1'''} = \varphi_1^1 - 1$, $\varphi_2^{1'''} = \varphi_2^1 + 1$. Из инвариантности суммы показателей после всех проделанных преобразований получаем, что итоговая система также будет фуксовой. А из мероморфности $\Gamma_i(z)$ и их голоморфной обратимости на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ следует, что монодромия также не изменится.

Если же $a_0 = 0$, то по утверждению 4 $b_0 \neq 0$. Взяв

$$\Gamma_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_0 b_0^{-1}/(z - a_2) & 1 \end{pmatrix},$$

таким же образом получаем $\varphi_1^{1'''} = \varphi_1^1 - 1$, $\varphi_2^{1'''} = \varphi_2^2 + 1$. Остальные нормирования ни в том, ни в другом случае, очевидно, не меняются. Таким образом, после проделанной процедуры хотя бы в одной точке разность между φ_i^1 и φ_i^2 уменьшилась на единицу. Повторяя подобные действия до тех пор, пока одна из разностей не станет равной нулю, и при необходимости проведя ту же процедуру для двух других точек, получаем уже рассмотренный случай, когда $\varphi_i^1 = \varphi_i^2$ хотя бы в двух точках. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используемые в доказательстве калибровочные преобразования $\Gamma_2(z)$ и $\Gamma_3(z)$ являются частными случаями более общих, построенных в работе [6] A - и B -преобразований.

СЛЕДСТВИЕ. Если χ – некоторое недиагональное SL -представление, то существует реализующая его фуксова система, для которой в двух точках $\mathcal{D}$ выполняется $\Sigma_i = \beta_i^1 + \beta_i^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем систему, реализующую χ , построенную в лемме 2.2. В зависимости от $\varepsilon_i = \rho_i^1 + \rho_i^2$ возможны следующие случаи (с точностью до перестановки).

- 1) $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1, \Sigma_3 = -2$ – система, удовлетворяющая условиям следствия.
- 2) $\Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 0, \Sigma_3 = -1$. Перейдя к $\mathcal{X}' = \Gamma(z)\mathcal{X}$, где $\Gamma(z) = ((z - a_3)/(z - a_2))^I$, получим $\Sigma'_1 = \Sigma'_3 = 1$.
- 3) $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$ (т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$). Проведем следующее преобразование:

$$\mathcal{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1}(a_i) \mathcal{X}.$$

Предположим, что хотя бы в одной из матриц $U'_2(a_2)$, $U'_3(a_3)$ верхний левый элемент $u_{11}^i(a_i)$ не равен нулю; тогда проводя описанную в лемме 2.2 процедуру, можно повысить, например, φ_2^1 , понижая φ_2^1 , после чего $\Sigma'_1 = -1, \Sigma'_2 = 1, \Sigma'_3 = 0$, и, таким образом, этот случай сведется к предыдущему. Предположив же, что $u_{11}^i(a_i) = 0$ для любого i , получаем

$$U_i(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$B_i = U_i(a_i)L_iU_i^{-1}(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d/(bc) & 1/c \\ 1/b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda c/b & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $B(z) = \sum B_i/(z - a_i)$ имеет вид

$$B(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая система приводима, так как существует решение

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix},$$

а нуль, продолженный вдоль любого пути, дает нуль и, следовательно, $g_{21}^i = 0$. Из доказанного в первой части следует, что в этом случае одну из G_i можно считать диагональной. Тогда можно понизить нормирование второго столбца в точке a_j , повышая любое из нормирований в a_i . Так как монодромия диагональна, полученный базис снова будет либо левелевским, либо его перестановкой, и в нем $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = -1, \Sigma_3 = 1$ – опять уже рассмотренный случай.

Докажем теперь реализуемость интересующей нас монодромии уравнением Римана с нужными суммами показателей.

Пусть χ неприводима. Существует реализующая ее система такая, что $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1$. Перейдя к уравнению путем повышения нормирования в a_3 , получим по следствию 1.2 искомое уравнение Римана. Если же χ приводима, то одна из G_i должна быть диагонализуема и повышать нормирования надо именно в ней. Если диагональна G_3 , то повторяется предыдущий случай; если же диагональна, например, G_2 , поднимем φ_3^1 , понижая одно из φ_2^j (точнее, понизим φ_2^3 , повысив любое из φ_2^j , после чего указанным в первой части леммы способом уменьшим на 2 сумму показателей в a_2 и повысим на 2 в a_3). Так как G_2 диагональна, то либо образ исходного левелевского в a_2 базиса, либо его перестановка будет левелевским базисом и, следовательно, можно повышать нормирование любого из столбцов. В любом случае по следствию 1.2 сумма показателей уравнения как в a_1 , так и в a_2 будет равна единице. Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Всякое SL -представление, реализованное уравнением Римана, может быть реализовано и уравнением Римана–Штурма–Лиувилля.*

Также можно отметить, что в важном для приложений частном случае – гипергеометрическом уравнении, условия на SL -монодромию имеют особенно простой вид. А именно, монодромия уравнения

$$u'' + \frac{\gamma - (1 + \alpha + \beta)z}{z(z-1)}u' - \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}u = 0$$

лежит в $SL(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\{\gamma, \alpha + \beta\} \in \mathbb{Z}$.

3. $SL(2, \mathbb{Z})$ -монодромия гипергеометрического уравнения

Очевидно, всякая $SL(2, \mathbb{Z})$ -монодромия, которая может быть реализована уравнением Римана и собственные значения которой хотя бы в двух матрицах единичны, может быть реализована гипергеометрическим уравнением. Встает вопрос, как по виду уравнения определить лежит ли его монодромиа в $SL(2, \mathbb{Z})$. Ясно, что необходимым условием является принадлежность монодромии группе $SL(2, \mathbb{C})$. То есть в терминах коэффициентов уравнения $\{\alpha + \beta, \gamma\} \in \mathbb{Z}$. Выясним будут ли эти условия достаточными. Во-первых, очевидно, что для приводимых представлений этих условий достаточно. Действительно, всякая приводимая монодромиа гипергеометрического уравнения приводится к виду

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_\infty = G_1^{-1}G_0^{-1}.$$

Следовательно, после сопряжения на $S_0 = \text{diag}(c^{-1}, 1)$ получаем

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_\infty = G_1^{-1}G_0^{-1}.$$

В случае неприводимого представления требуется более тщательное рассмотрение. Известно, что всякое неприводимое представление монодромии уравнения Римана χ в некотором базисе имеет вид

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_\infty = G_1^{-1}G_0^{-1}, \quad c, d \in \mathbb{C}.$$

Сопрягая на матрицу $S_1 = \text{diag}(d, 1)$, получаем

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & cd \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad cd \in \mathbb{C}.$$

Теперь сопряжение на произвольную $S_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ дает

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 + \mu\tau & -\mu^2 \\ \tau^2 & 1 - \mu\tau \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\nu b & \lambda^2 b \\ -\nu^2 b & 1 + \lambda\nu b \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C},$$

где

$$S_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \tau \end{pmatrix}.$$

Таким образом, критерием возможности приведения к $SL(2, \mathbb{Z})$ является существование набора $\{\lambda, \mu, \nu, \tau\}$, удовлетворяющего

$$\begin{cases} \mu^2, \tau^2, & \mu\tau \in \mathbb{Z}, \\ \lambda^2 b, \nu^2 b, & \lambda\nu b \in \mathbb{Z}, \\ \lambda\tau - \mu\nu = 1. \end{cases}$$

Очевидно, если он существует, то

$$\lambda^2 \tau^2 b, \mu^2 \nu^2 b, \lambda\mu\nu\tau b \in \mathbb{Z} \implies (\lambda^2 \tau^2 + \mu^2 \nu^2 - 2\lambda\mu\nu\tau)b = (\lambda\tau - \mu\nu)^2 b = b \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $b = \text{tr} G_\infty - 2 = e^{2\pi i\alpha} + e^{2\pi i\beta} - 2$. Таким образом, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Монодромия гипергеометрического уравнения лежит в $SL(2, \mathbb{Z})$, если и только если выполняется $\{\gamma, \alpha + \beta, e^{2\pi i\alpha} + e^{2\pi i\beta}\} \in \mathbb{Z}$.*

Полученные условия можно рассмотреть более подробно. Имеем

$$e^{2\pi i\alpha} + e^{2\pi i\beta} = e^{2\pi i\alpha}(1 + e^{2\pi i(\alpha + \beta - 2\alpha)}) = e^{2\pi i\alpha} + e^{-2\pi i\alpha} = e^{2\pi i\beta} + e^{-2\pi i\beta} = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для $x = e^{2\pi i\alpha}$ получаем $x + x^{-1} = k$. Вместе с условием $(\alpha + \beta) \in \mathbb{Z}$ это влечет $e^{2\pi i\alpha} = (k + \sqrt{k^2 - 4})/2$, $e^{2\pi i\beta} = (k - \sqrt{k^2 - 4})/2$.

Окончательно, монодромия гипергеометрического уравнения лежит в $SL(2, \mathbb{Z})$ при следующих значениях показателей:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \quad \beta = -\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{k \mp \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \quad \gamma = l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение, таким образом, имеет вид

$$u'' + \frac{l - z}{z(z - 1)} u' - \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\ln \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^2 u = 0,$$

где k, l целочисленны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M. From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions. Aspects of Math. V. E16. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1991.
- [2] Kimura T., Shima K. A note on the monodromy of the hypergeometric differential equation // Japan J. Math. 1991. V. 17. P. 137–163.
- [3] Болибрух А. А. О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 9–19.
- [4] Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А. Об уравнении Лиувилля, аксессуарных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0 // Матем. сб. 1987. Т. 132 (174). № 2. С. 147–166.
- [5] Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
- [6] Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем. Тр. МИАН. Т. 206. М.: Наука, 1994.
- [7] Levelt A. H. M. Hypergeometric functions // Indag. Math. 1961. V. 23. P. 361–403.
- [8] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гос-техтеоретиздат, 1950.
- [9] Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1956. Т. 31.
- [10] Dekkers W. The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(C)$ // Lecture Notes in Math. V. 712. Berlin: Springer, 1979. P. 33–43.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: poberezh@itep.ru

Поступило
27.02.2004