Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Шульман, Эквивалентность C^* -алгебр $q\mathbb{C}$ и $C_0(\mathbb{R}^2)$ в асимптотической категории, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 788–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:09:43

УДК 517.98

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ C^* -АЛГЕБР qC И $C_0(\mathbb{R}^2)$ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

Т. В. Шульман

Из результатов Каспарова, Конна, Хигсона и Лоринга для любой C^* -алгебры B следует совпадение функторов $[[qC \otimes K, B \otimes K]] = [[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K, B \otimes K]]$, где под $[[A, B]]$ понимается множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из A в B . В нашей работе этот результат усилен, а именно, показано, что алгебры $qC \otimes K$ и $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ эквивалентны в категории, объектами которой являются C^* -алгебры, а морфизмами – классы гомотопных асимптотических гомоморфизмов. Исследованы некоторые геометрические свойства полученной эквивалентности, а именно, алгебры $qC \otimes K$ и $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ представлены в виде полей C^* -алгебр и доказано, что эквивалентность не является послойной, т.е. не отображает слой в слой. Доказано также, что рассматриваемые алгебры не являются гомотопически эквивалентными.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В работе [1] Кунц сопоставил каждой C^* -алгебре A новую C^* -алгебру qA таким образом, что для любой C^* -алгебры B полугруппа $KK(A, B)$, соответствующая паре A, B в KK -теории Каспарова, может быть описана как множество гомотопических классов $*$ -гомоморфизмов $[qA, B \otimes K]$ из qA в тензорное произведение C^* -алгебры B на C^* -алгебру K компактных операторов. Такой вариант KK -теории полезен тем, что в нем используются обычные гомоморфизмы алгебр вместо сложной конструкции, предложенной Каспаровым, хотя это и достигается ценой перехода от алгебры A к более сложной алгебре qA .

Алгебра qA определяется как замкнутый идеал в свободном C^* -произведении $A * A$, порожденный всеми разностями $i_1(a) - i_2(a)$, $a \in A$, где i_1, i_2 – канонические вложения A на первый и второй сомножитель в $A * A$. Напомним, что для любых A, B их свободное произведение $A * B$ – это алгебра, порожденная “словами” $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots$, где $a_i \in A^+$, $b_i \in B^+$, и соотношениями $1_{A+B} = b 1_{A^+} = b$, $1_{B+A} = a 1_{B^+} = a$; если же A и B – C^* -алгебры, то их свободное C^* -произведение определяется как обертывающая C^* -алгебра их свободного произведения (и тоже обозначается $A * B$).

Переход от A к qA нетривиален уже в случае $A = \mathbb{C}$, когда он дает описание K -функтора $K_0(B) \cong [qC, B \otimes K]$. Учитывая этот изоморфизм в некоторые результаты Каспарова [2], Конна и Хигсона [3] и Лоринга [4], можно получить цепочку изоморфизмов:

$$[[qC \otimes K, B \otimes K]] \stackrel{[4]}{\cong} [[qC, B \otimes K]] \stackrel{[1]}{\cong} K_0(B) \stackrel{[3]}{\cong} [[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K, B \otimes K]],$$

где под $[[A, B]]$ понимается множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из A в B . Таким образом, функторы $[[q\mathbb{C} \otimes K, B \otimes K]]$ и $[[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K, B \otimes K]]$ изоморфны.

Возникает естественный вопрос, порождается ли этот изоморфизм некоторым морфизмом аргументов, т.е. морфизмом из $q\mathbb{C} \otimes K$ в $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$. Мы покажем, что действительно существует морфизм $q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$, который порождает изоморфизм функторов $[[q\mathbb{C} \otimes K, B \otimes K]]$ и $[[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K, B \otimes K]]$ и который является эквивалентностью алгебр $q\mathbb{C} \otimes K$ и $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ в категории, объектами которой являются C^* -алгебры, а морфизмами – классы гомотопных асимптотических гомоморфизмов. Мы построим асимптотические гомоморфизмы из $q\mathbb{C} \otimes K$ в $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и из $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ в $q\mathbb{C} \otimes K$ такие, что их композиции гомотопны тождественным гомоморфизмам.

Заметим, что в категории C^* -алгебр и “обычных” гомоморфизмов рассматриваемые алгебры не эквивалентны.

Алгебры $q\mathbb{C} \otimes K$ и $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ имеют естественную структуру непрерывных полей C^* -алгебр (оба поля над одной и той же базой – отрезком $[0, 1]$) и мы покажем, что построенная эквивалентность не является послойной, т.е. не отображает слои в слой.

Существует ли эквивалентность, которая является послойной, нам не известно.

2. Конструкция морфизмов. В [4] было показано, что построенная Кунцем C^* -алгебра $q\mathbb{C}$ может быть отождествлена с алгеброй матричнозначных функций $\{f \in C_0((0, 1], M_2) \mid f(1) - \text{диагональная матрица}\}$. Отождествить их можно таким образом: если мы обозначим единицу первого экземпляра алгебры $\mathbb{C}$ через p_1 , а второго – через p_2 , то положив

$$f(p_1) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(p_2) = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{\sqrt{t-t^2}} & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & t \end{pmatrix},$$

мы получим отображение $f: \mathbb{C} * \mathbb{C} \rightarrow C([0, 1], M_2)$, которое при ограничении на $q\mathbb{C} \subset \mathbb{C} * \mathbb{C}$ даст требуемый изоморфизм. В этой алгебре можно выбрать 3 образующих

$$h_1 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{t-t^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

которые, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \|a\| &\leq 1, \quad 0 \leq h_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \\ a^2 &= 0, \quad h_1 h_2 = 0, \quad h_2 a = a h_1, \\ h_1 - h_1^2 &= a^* a, \quad h_2 - h_2^2 = a a^*. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} 1 - h_1 & a^* \\ a & h_2 \end{pmatrix}$$

– проектор, и формальная разность между ним и 1 является образующей группы $K_0(q\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

В категории сепарабельных C^* -алгебр функтор $K_0(B)$ совпадает с функтором $\text{Ext}(C_0(\mathbb{R}^2), B \otimes K)$, где Ext – группа классов унитарно эквивалентных расширений по модулю расщепимых [2].

Опишем как строится этот изоморфизм. Будем обозначать через $M(D)$ C^* -алгебру мультипликаторов алгебры D и через $Q(D)$ алгебру $M(D)/D$. Отображение из $K_0(B)$

в $\text{Ext}(C_0(\mathbb{R}), B \otimes K)$ строится так: пусть $p \in B^+ \otimes K$, где B^+ – унитализация алгебры B ; определим гомоморфизм $\phi_p: C(S^1) \rightarrow Q(B \otimes K)$ как

$$\phi_p(e^{ix}) = q \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ p & 0 \\ & p & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix},$$

где q – проекция из $M(D \otimes K)$ в $Q(D \otimes K)$. Взяв ограничение ϕ_p на $C_0(\mathbb{C})$, получим расширение, соответствующее проектору p . Эквивалентным проекторам будут соответствовать унитарно эквивалентные расширения и, таким образом, получено отображение из $K_0(B)$ в $\text{Ext}(C_0(\mathbb{R}), B \otimes K)$. В [2] доказано, что это изоморфизм групп. Нам требуется еще одна конструкция. Для любой сепарабельной C^* -алгебры B и стабильной сепарабельной C^* -алгебры D определен полугрупповой гомоморфизм Конна–Хигсона из полугруппы $\text{Ext}(B, D)$ в группу $[[C_0(\mathbb{R}) \otimes B, D]]$ гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из $C_0(\mathbb{R}) \otimes B$ в D . Он строится так: пусть $\tau: B \rightarrow Q(D)$ – расширение. Существует (см. [5]) непрерывное сечение $s: Q(D) \rightarrow M(D)$ такое, что $q \circ s = \text{id}_{Q(D)}$. Пусть $E \subset M(D)$ – C^* -алгебра, порожденная D и $(s \circ \tau)(B)$. Тогда для $D \subset E$ существует квазицентральная аппроксимативная единица (u_t) (см. [6]). Достаточно определить асимптотический гомоморфизм из $C_0(\mathbb{R}) \otimes B$ на элементах вида $f \otimes b \in C_0(\mathbb{R}) \otimes B$. Положим $\phi_t(f \otimes b) = f(u_t)(s \circ \tau)(b)$. В случае когда B – ядерная алгебра, это изоморфизм функторов [3]. Таким образом, $\text{Ext}(SC, q\mathbb{C} \otimes K) \cong [[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]]$ и, следовательно, $K_0(q\mathbb{C}) \cong [[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]]$.

Построим асимптотический гомоморфизм $C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ (в дальнейшем он будет обозначен f_t^p) следующим образом. Фиксируем какой-нибудь изоморфизм $i: M_2(M(K)) \rightarrow M(K)$. Рассмотрим C^* -алгебру E , порожденную $q\mathbb{C} \otimes K$ и

$$\begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ p & 0 \\ & p & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \in M_2(q\mathbb{C}^+) \otimes B(H) \subset M_2(M(q\mathbb{C} \otimes K)),$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 - h_1 & a^* \\ a & h_2 \end{pmatrix} \in M_2(q\mathbb{C}^+),$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 1 & 0 \\ & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \in q\mathbb{C}^+ \otimes B(H) \subset M(q\mathbb{C} \otimes K).$$

Пусть $j(q\mathbb{C} \otimes K) \subset M_2(M(q\mathbb{C} \otimes K))$ – вложение, индуцированное вложением $j: K \subset K \oplus K$ на первое слагаемое. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix} \in M_2(M(q\mathbb{C} \otimes K));$$

поэтому E – подалгебра в $M_2(M(q\mathbb{C} \otimes K))$. Построим квазицентральную аппроксимативную единицу для $j(q\mathbb{C} \otimes K) \subset E$. Рассмотрим элементы $u_n \in q\mathbb{C} \otimes K$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

- 1) $(u_n)_{ij} = 0$ при $i \neq j$;
- 2) $(u_n)_{ii}(t) = \begin{cases} nt1, & t \in [0, 1/n], \\ 1, & t \in (1/n, 1], \end{cases}$
при $i \leq 2n + 1$, где 1 означает единичную матрицу в M_2 ;
- 3) $(u_n)_{2i, 2i}(t) = \begin{cases} nt1, & t \in [0, 1/n], \\ \left(\frac{n-i}{2n-i-1}t + 1 - \frac{n-i}{n(2n-i-1)} \right) 1, & t \in (1/n, 1 - (i-n)/n], \\ \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) 1, & t \in (1 - (i-1)/n, 1], \end{cases}$
при $i = n + 1, \dots, 2n - 2$;
- 4) $(u_n)_{2i+1, 2i+1} = (u_n)_{2i, 2i}$ при $i = n + 2, \dots, 2n - 2$;
- 5) $(u_n)_{4n-2, 4n-2}(t) = \begin{cases} nt1, & t \in [0, 1/n], \\ (-nt + 2)1, & t \in (1/n, 2/n], \\ 0, & t \in (2/n, 1]; \end{cases}$
- 6) $(u_n)_{ii} = 0$ при $i > 4n - 2$.

Соединив линейно u_n и u_{n+1} , получим семейство $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$. Положим

$$v_t = j(u_t) = \begin{pmatrix} u_t & \\ & 0 \end{pmatrix} \in M_2(q\mathbb{C} \otimes K).$$

Непосредственная проверка показывает, что имеет место

ЛЕММА 1. $(v_t)_{t \in [0, \infty)}$ – аппроксимативная единица в $j(q\mathbb{C} \otimes K)$, квазицентральная для E .

Определим асимптотический гомоморфизм $f_t^p: C(\mathbb{T}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$. Положим

$$f_t^p(e^{2\pi i m x} e^{2\pi i n y}) = e^{2\pi i m u_t} \begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix}^n$$

и продолжим его с плотной в $C(\mathbb{T}^2)$ подалгебры тригонометрических полиномов. Для этого рассмотрим C^* -алгебру

$$L = C_b([0, \infty), q\mathbb{C} \otimes K) / C_0([0, \infty), q\mathbb{C} \otimes K)$$

и обозначим через ρ канонический эпиморфизм алгебры $C_b([0, \infty), q\mathbb{C} \otimes K)$ на L . Сопоставляя образующим $e^{2\pi i x}$, $e^{2\pi i y}$ элементы

$$\rho(e^{2\pi i u_t}) \quad \text{и} \quad \rho \left(\begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix} \right),$$

мы можем продолжить отображение до $*$ -гомоморфизма алгебры тригонометрических полиномов, а затем, по непрерывности, до $*$ -гомоморфизма алгебры $C(\mathbb{T}^2)$ в L . Для любой функции $g \in C(\mathbb{T}^2)$ выберем прообраз $G(t)$ элемента $f(g)$ в алгебре $C_b([0, \infty), q\mathbb{C} \otimes K)$ и положим $f_t^p(g) = G(t)$. Легко видеть, что семейство отображений $\{f_t^p\}$ – требуемый асимптотический гомоморфизм.

Очевидно, образ f_t^p в группе $[[C(\mathbb{T}^2), q\mathbb{C} \otimes K]]$ не зависит от выбора изоморфизма i , так как разные изоморфизмы определяют гомотопные асимптотические гомоморфизмы.

Сужение f_t^p на $C_0(\mathbb{R}^2)$ будем также обозначать f_t^p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Асимптотический гомоморфизм f_t^p является образующей группы $[[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]] \cong \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем непрерывное сечение $s: Q(q\mathbb{C} \otimes K) \rightarrow M(q\mathbb{C} \otimes K)$ такое, что

$$s \circ q \begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix}.$$

Тогда алгебра $E \subset M_2(M(q\mathbb{C} \otimes K))$, порожденная $j(q\mathbb{C} \otimes K)$, и $s \circ \phi_p(SC)$ – это алгебра, порожденная

$$j(q\mathbb{C} \otimes K) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} i(P) & \\ & T^* \end{pmatrix}.$$

По лемме 1 $(v_t)_{t \in [0, \infty)}$ – квазицентральная аппроксимативная единица для $j(q\mathbb{C} \otimes K) \subset E$. Следовательно, $f_t^p = CH(\phi)$, где ϕ – образ элемента $[p] - [1] \in K_0(q\mathbb{C})$ при изоморфизме $K_0(q\mathbb{C}) \cong \text{Ext}(SC, q\mathbb{C} \otimes K)$, и поскольку $[p] - [1]$ – образующая группы $K_0(q\mathbb{C})$, а $CH: \text{Ext}(SC, q\mathbb{C} \otimes K) \rightarrow [[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]]$ – изоморфизм, то f_t^p – образующая группы $[[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]]$.

Покажем, что с помощью асимптотического гомоморфизма $f_t^p: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ можно установить гомотопическую эквивалентность C^* -алгебр $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ в категории C^* -алгебр и асимптотических гомоморфизмов. Построим гомоморфизм $\alpha: q\mathbb{C} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes M_2$ следующим образом. Сначала заметим, что $C_0(\mathbb{R}^2)$ изоморфна алгебре $C_0(S^2)$ функций на сфере, обращающихся в 0 в выделенной точке. $C_0(S^2)$ может быть задана образующими h и N , удовлетворяющими условиям $h = h^*$, $[N, N^*] = 0$, $[h, N] = 0$, $h^2 + N^*N = h$ (действительно, сферу можно задать уравнением $(x - 1/2)^2 + y^2 + z^2 = 1/4$; положим $h = x$, $N = y + iz$). Пусть

$$\alpha(a) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(h_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \alpha(h_2) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a, h_1, h_2 взяты из (1). Легко видеть, что $\alpha: q\mathbb{C} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes M_2$ – гомоморфизм. Положим $\tilde{\alpha} = \alpha \otimes \text{id}_K$, $\tilde{f}_t^p = f_t^p \otimes \text{id}_K$.

3. Эквивалентность алгебр $q\mathbb{C}$ и $C_0(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 3. *Асимптотические гомоморфизмы $\tilde{\alpha} \circ \tilde{f}_t^p: C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $\tilde{f}_t^p \circ \tilde{\alpha}: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопны тождественным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения теоремы будут следовать из леммы 5 и следствия 7, приводимых ниже.

ЛЕММА 4. *Отображение $\alpha_*: K_0(q\mathbb{C}) \rightarrow K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ является изоморфизмом групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, образующая $K_0(q\mathbb{C})$ – это $[p] - [1]$, где

$$p = \begin{pmatrix} 1 - h_1 & a^* \\ a & h_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_*([p] - [1]) &= \left[\begin{pmatrix} \alpha(1 - h_1) & \alpha(a^*) \\ \alpha(a) & \alpha(h_2) \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h & N^* & 0 \\ 0 & N & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 - h & N^* \\ N & h \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 - h & N^* \\ N & h \end{pmatrix} \right] - [1].\end{aligned}$$

Но это как раз образующая в $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ (см. [7]).

Везде в дальнейшем для любых алгебр B, D и асимптотического гомоморфизма $\phi: B \rightarrow D \otimes K$ через ϕ_* будем обозначать гомоморфизм, который ϕ индуцирует в K -группах, и через $\gamma(B, D)$ соответствующий гомоморфизм $[[B, D \otimes K]] \rightarrow \text{Hom}(K_0(B), K_0(D))$. Если $B = D$, то будем писать $\gamma(B)$.

ЛЕММА 5. *Отображения*

$$\begin{aligned}\gamma(q\mathbb{C}): [[q\mathbb{C} \otimes K, q\mathbb{C} \otimes K]] &\rightarrow \text{Hom}(K_0(q\mathbb{C}), K_0(q\mathbb{C})), \\ \gamma(C_0(\mathbb{R}^2)): [[C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K, C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K]] &\rightarrow \text{Hom}(K_0(C_0(\mathbb{R}^2)), K_0(C_0(\mathbb{R}^2))), \\ \gamma(q\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2)): [[q\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K]] &\rightarrow \text{Hom}(K_0(q\mathbb{C}), K_0(C_0(\mathbb{R}^2))), \\ \gamma(C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C}): [[C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C} \otimes K]] &\rightarrow \text{Hom}(K_0(C_0(\mathbb{R}^2)), K_0(q\mathbb{C}))\end{aligned}$$

являются изоморфизмами групп.

Утверждение леммы следует из теоремы об универсальных коэффициентах (см., например, [8]).

СЛЕДСТВИЕ 6. *Отображение $f_t^p_*: K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \rightarrow K_0(q\mathbb{C})$ является изоморфизмом групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f_t^p_* = \gamma(C_0(\mathbb{R}^2), q\mathbb{C})(f_t^p)$. Из предложения 2 и леммы 5 следует, что $f_t^p_*$ – образующая группы $\mathbb{Z} \cong \text{Hom}(K_0(C_0(\mathbb{R}^2)), K_0(q\mathbb{C}))$ и, следовательно, изоморфизм между $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ и $K_0(q\mathbb{C})$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Имеем*

- 1) $(\tilde{\alpha} \circ \tilde{f}_t^p)_* = \text{id}_{\text{Hom}(K_0(C_0(\mathbb{R}^2)), K_0(C_0(\mathbb{R}^2)))}$;
- 2) $(\tilde{f}_t^p \circ \tilde{\alpha})_* = \text{id}_{\text{Hom}(K_0(q\mathbb{C}), K_0(q\mathbb{C}))}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из леммы 4 и следствия 6.

Таким образом, эквивалентность между $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ в категории C^* -алгебр и асимптотических гомоморфизмов установлена.

В категории C^* -алгебр и “настоящих” гомоморфизмов $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ не эквивалентны (эквивалентностью в этом случае будет изоморфизм алгебр). На самом деле верно более сильное утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Алгебры $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ не являются гомотопически эквивалентными.*

Для доказательства нам понадобится пример неподнимаемого гомоморфизма из $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$. При построении мы используем неподнимаемый гомоморфизм из $C_0(\mathbb{R}^2)$, построенный Лорингом в [7]. Напомним, что *поднимаемым гомоморфизмом* из алгебры B в фактор-алгебру A/I называется гомоморфизм вида $q \circ \Phi$, где Φ – гомоморфизм из B в A , q – каноническая сюръекция $A \rightarrow A/I$.

Выберем гладкую функцию f на $[0, 1]$ такую, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $0 \leq f \leq 1$. Положим $\Delta = 1/n$,

$$h_n = \begin{pmatrix} f(\Delta) & & & & \\ & f(2\Delta) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f(n\Delta) & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad S_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$N_n = (h_n - h_n^2)^{1/2} S_n.$$

В [7] рассматривалась алгебра $A = \{(T_n)_1^\infty \mid T_n \in K, \sup_n \|T_n\| < \infty\}$ и идеал I , состоящий из последовательностей (T_n) таких, что $\lim \|T_n\| = 0$. Так как

$$h_n^* = h_n, \quad [N_n, N_n^*] \rightarrow 0, \quad [h_n, N_n] \rightarrow 0, \quad h_n^2 + N_n^* N_n - h_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

положив $h \rightarrow h_n$ и $N \rightarrow N_n$, где h, N – образующие алгебры $C_0(\mathbb{R}^2)$, мы получим гомоморфизм $C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow A/I$, который согласно теореме 5.2 из [7] не гомотопен поднимаемому гомоморфизму.

Алгебра $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ порождена элементами $h \otimes e_{ij}$ и $N \otimes e_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$, где $e_{ij} \in K$ – матричная единица, т.е. такие элементы, что

$$e_{ij}^* = e_{ji}, \quad e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}.$$

Определим гомоморфизм $F: C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K \rightarrow A/I$, положив $h \rightarrow h_n \otimes e_{ij}$ и $N \rightarrow N_n \otimes e_{ij}$ (мы здесь используем то, что $K \otimes K \cong K$).

Фиксируем i . Элементы $h \otimes e_{ii}$ и $N \otimes e_{ii}$ связаны такими же соотношениями, как h и N . Применяя к ним в точности те же рассуждения, как в доказательстве теоремы 5.2 из [7], получаем следующую лемму.

ЛЕММА 9. *Любой гомоморфизм из $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ в A/I , который гомотопен гомоморфизму $F: C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K \rightarrow A/I$, построенному выше, не является поднимаемым.*

ЛЕММА 10. *Любой гомоморфизм из $q\mathbb{C} \otimes K$ в A/I гомотопен поднимаемому гомоморфизму.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϕ – гомоморфизм из $q\mathbb{C} \otimes K$ в A/I . Он определяет асимптотический гомоморфизм $\phi_n: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow K$ по формуле $\phi_n(a) = (s(\phi(a)))_n$, где через s обозначено непрерывное сечение $A/I \rightarrow A$, а x_n означает n -координату элемента $x \in A$.

В [4] доказано, что любой асимптотический гомоморфизм из $q\mathbb{C}$ гомотопен пути гомоморфизмов, а так как любой асимптотический гомоморфизм $A_1 \otimes K \rightarrow A_2 \otimes K$, где A_1 и A_2 – произвольные C^* -алгебры, гомотопен асимптотическому гомоморфизму вида

$f \otimes \text{id}_K$, где $f: A_1 \rightarrow A_2 \otimes K$ – асимптотический гомоморфизм (см., например, [3]), то и любой асимптотический гомоморфизм из $q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопен пути гомоморфизмов. Значит, существует $\psi_n: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow K$, который гомотопен ϕ_n , и такой, что ψ_n – гомоморфизм при каждом n . Он, в свою очередь, определяет гомоморфизм $\psi: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow A/I$, который поднимаем (действительно, $\psi = q \circ \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}(\xi)_n = \psi_n(\xi)$, $\xi \in q\mathbb{C} \otimes K$). Очевидно, ϕ гомотопен ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Предположим, что $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопически эквивалентны. Тогда существуют гомоморфизмы $g_1: C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ и $g_2: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ такие, что $g_2 \circ g_1: C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ гомотопен тождественному и $g_1 \circ g_2: q\mathbb{C} \otimes K \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопен тождественному.

По лемме 10 гомоморфизм $F \circ g_2$, где F – гомоморфизм из леммы 9, гомотопен поднимаемому гомоморфизму, а значит, тем же свойством обладает $F \circ g_2 \circ g_1$ и F , который гомотопен $F \circ g_2 \circ g_1$. Это противоречит лемме 9.

4. Эквивалентность и структура полей C^* -алгебр. Заметим, что C^* -алгебры $C_0(\mathbb{R}^2)$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ – это непрерывные поля C^* -алгебр над отрезком $[0, 1]$. Для второй из них утверждение очевидно, а для первой доказывается переходом к полярной системе координат на единичном круге в плоскости после его отождествления с $(0, 1)^2$, при этом параметром является полярный радиус $r \in [0, 1]$. Теперь можно поставить вопрос о том, будет ли асимптотический гомоморфизм $f_t^p: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ послойным.

Напомним, что асимптотический гомоморфизм f_t из непрерывного поля $\{[0, 1], \{A(x)\}\}$ в непрерывное поле $\{[0, 1], \{B(x)\}\}$ называется *послойным*, если для каждого $x \in [0, 1]$ существует асимптотический гомоморфизм $\Phi_t^{(x)}: A(x) \rightarrow B(x)$ такой, что $f_t(\phi)(x) - \Phi_t^{(x)}(\phi(x)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty \quad \forall \phi \in \{[0, 1], \{A(x)\}\}, \forall x \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 11. *Всякий послойный асимптотический гомоморфизм $f_t: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопен постоянному гомоморфизму.*

Для доказательства нам потребуется еще один вспомогательный результат.

ЛЕММА 12. *Для любой C^* -алгебры A любой асимптотический гомоморфизм $\{\phi_t\}: C(\mathbb{T}) \rightarrow A$ гомотопен постоянному гомоморфизму.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем положительное число $\epsilon \leq 1/2$. Поскольку $\|\phi_t(1)^2 - \phi_t(1)\| \rightarrow 0$, $\|\phi_t(1)^* - \phi_t(1)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, при достаточно больших t спектр $\phi_t(1)$ попадает в ϵ -окрестность множества $\{0; 1\}$. Возьмем непрерывную функцию η , равную 0 в ϵ -окрестности 0 и 1 в ϵ -окрестности 1. Тогда $\eta(\phi_t(1))$ – проектор при достаточно больших t . Обозначим его p_t . Заметим, что $\|\phi_t(1) - p_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Обозначим $\phi_t(e^{ix})$ через a_t . Так как $a_t^* a_t - p_t \rightarrow 0$, $a_t a_t^* - p_t \rightarrow 0$, то $a_t p_t - a_t \rightarrow 0$, $p_t a_t - a_t \rightarrow 0$ и, значит, $p_t a_t p_t - a_t \rightarrow 0$.

Положим $\tilde{\phi}_t(1) = p_t$, $\tilde{\phi}_t(e^{ix}) = p_t a_t p_t$. Рассуждая так же, как при построении асимптотического гомоморфизма f_t^p из предложения 2, получим новый асимптотический гомоморфизм $\{\tilde{\phi}_t\}: C(\mathbb{T}) \rightarrow A$. Очевидно, $\{\tilde{\phi}_t\}$ эквивалентен $\{\phi_t\}$, т.е. $\tilde{\phi}_t(\xi) - \phi_t(\xi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любой функции $\xi \in C(\mathbb{T})$.

Обозначим $\tilde{\phi}_t(e^{ix})$ через $\tilde{a}_t$. Так как $\|\tilde{a}_t^* \tilde{a}_t - 1_{p_t A p_t}\| \rightarrow 0$ и $\|\tilde{a}_t \tilde{a}_t^* - 1_{p_t A p_t}\| \rightarrow 0$, то при достаточно больших t элементы $\tilde{a}_t$ обратимы в алгебрах $p_t A p_t$. Значит, в полярном разложении $\tilde{a}_t = v_t T_t$ элемент $T_t = \sqrt{\tilde{a}_t^* \tilde{a}_t}$ обратим и поэтому $v_t = \tilde{a}_t T_t^{-1}$ обратим, а значит, v_t унитарен. Заметим, что $v_t - \tilde{a}_t \rightarrow 0$.

Положим $\psi_t(1) = p_t$, $\psi_t(e^{ix}) = v_t$. Продолжая ψ_t до гомоморфизмов алгебры $C(\mathbb{T})$, мы определяем семейство гомоморфизмов $\{\psi_t\}$, эквивалентное асимптотическому гомоморфизму $\{\phi_t\}$. Но $\{\psi_t\}$ гомотопен постоянному гомоморфизму $\{\psi_0\}$: гомотопией является $\phi_{(1-s)t}$. Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Пусть асимптотический гомоморфизм $f_t: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ послоен. Тогда для любого $x \in (0, 1)$ существует асимптотический гомоморфизм $\phi_t^{(x)}: C(\mathbb{T}) \rightarrow K$ такой, что $f_t(\xi)(x) = \phi_t^{(x)}(\xi(x))$ для любой функции $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2)$.

Согласно лемме 12 для любого $x \in (0, 1)$ найдутся постоянный гомоморфизм $\phi^{(x)}: C(\mathbb{T}) \rightarrow K$ и асимптотический гомоморфизм $F_t^{(x)}: C(\mathbb{T}) \rightarrow K \otimes C[0, 1]$ такие, что для любой функции $\eta \in C(\mathbb{T})$ $F_t^{(x)}(\eta)(0) = \phi_t^{(x)}(\eta)$, $F_t^{(x)}(\eta)(1) = \phi(x)(\eta)$.

Определим асимптотический гомоморфизм $F_t: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K \otimes C[0, 1]$ следующим образом. Так как $q\mathbb{C} \otimes K \otimes C[0, 1]$ – функции от двух переменных x и s (x – параметр поля $q\mathbb{C} \otimes K$, s – параметр поля $C[0, 1]$), то для $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2)$ положим $F_t(\xi)(x, s) = F_t^{(x)}(\xi(x))(s)$. Легко видеть, что $F_t(\xi)(0) = f_t(\xi)$, $F_t(\xi)(1) = \Phi(\xi)$, где $\Phi(\xi)(x) = \phi^{(x)}(\xi(x))$. То есть $\{f_t\}$ гомотопен постоянному гомоморфизму $\{\Phi\}$.

СЛЕДСТВИЕ 13. Асимптотический гомоморфизм $f_t^p: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$ не является послойным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда по теореме 11 существует постоянный гомоморфизм $\Phi: C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow q\mathbb{C} \otimes K$, который гомотопен $\{f_t^p\}$. Но тогда гомоморфизмы $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\Phi}$, где $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \text{id}_K$, а $\tilde{\alpha}$ определен в самом конце п. 2, гомотопны тождественным гомоморфизмам. То есть C^* -алгебры $C_0(\mathbb{R}^2) \otimes K$ и $q\mathbb{C} \otimes K$ гомотопически эквивалентны, что противоречит предложению 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cuntz J. A new look at KK -theory // *K-Theory*. 1987. V. 1. №1. P. 31–51.
- [2] Каспаров Г. Г. Операторный K -функтор и расширения C^* -алгебр // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1980. Т. 44. С. 571–636.
- [3] Connes A., Higson N. Deformations, morphismes asymptotiques et K -theorie bivariente // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* 1990. V. 311. P. 101–106.
- [4] Loring T. Perturbation questions in the Cuntz picture of K -theory // *K-Theory*. 1997. V. 11. P. 161–193.
- [5] Loring T. Almost multiplicative maps between C^* -algebras // *Operator Algebras and Quantum Field Theory (Rome, 1996)*. Cambridge, MA: Internat. Press, 1997. P. 111–122.
- [6] Arveson W. Notes on extensions of C^* -algebras // *Duke Math. J.* 1977. V. 44. P. 329–355.
- [7] Loring T. K -theory and asymptotically commuting matrices // *Canad. J. Math.* 1988. V. 15. №1. P. 197–216.
- [8] Blackadar B. *K-Theory for Operator Algebras*. Math. Sci. Res. Inst. Publ. V. 5. New York: Springer-Verlag, 1986.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: tatiana_shulman@mail.ru

Поступило
27.02.2003
Исправленный вариант
29.04.2004