Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Терсенов, О задаче Коши для одной системы уравнений ультрапараболического типа, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 768–774

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:48:10

УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С. А. Терсенов

Статья посвящена доказательству существования решения задачи Коши для системы уравнений ультрапараболического типа.

Библиография: 13 названий.

Пусть в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ заданы функции $b_k(t) \in C^{1+\alpha}(\mathcal{D})$, $k = 1, \dots, m$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, $0 < \alpha < 1$, и пусть

$$c_1 < b_k(t) < c_2 \quad \text{в } t \in \mathcal{D}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $c_i > 0$ постоянные. Рассмотрим в области $\mathcal{D}$ гладкую односвязную поверхность Γ размерности $m - 1$ с параметрическим представлением: $t(\tau) = (t_1(\tau), \dots, t_m(\tau))$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{m-1}) \in \Gamma_0$, $t(\tau) \in C^{1+\alpha}(\Gamma_0)$. Предположим, что ранг матрицы

$$Z = \left(\frac{\partial t_k(\tau)}{\partial \tau_i} \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, m - 1,$$

равен $m - 1$.

В области $Q = \mathbb{R}^n \times \mathcal{D}$ рассмотрим систему уравнений ультрапараболического типа

$$\sum_{|k| \leq 2} A_k(x, t) D_x^k u - \sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial u}{\partial t_i} = f(x, t), \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, A_k — матрицы порядка (N, N) с элементами A_k^{ij} , $f = (f_1, \dots, f_N)$ — непрерывная функция в Q . В случае $m = 1$ считаем, что система (1) параболическая по Петровскому.

В статье рассматривается вопрос о существовании решения системы (1) в Q , совпадающего с заданной функцией ϕ на $\mathbb{R}^n \times \Gamma$. Точную постановку задачи и дальнейшие условия на коэффициенты укажем ниже.

Заметим (см. [1]), что при $m \geq 2$, если коэффициенты не дифференцируемы по t , то дифференцируемых по t решений может не существовать.

Ультрапараболическим уравнениям посвящено много работ. Приведем некоторые из них [1]–[13].

В статье будем рассматривать два случая:

- 1) Γ – не характеристическая поверхность уравнения

$$\sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial w}{\partial t_i} = 0, \quad (2)$$

- 2) Γ – характеристическая поверхность уравнения (2).

1. Поверхность Γ не характеристическая. В этом случае определитель

$$J = \left\| \begin{array}{ccc} b_1 & \dots & b_m \\ \partial t_1 / \partial \tau_1 & \dots & \partial t_m / \partial \tau_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial t_1 / \partial \tau_{m-1} & \dots & \partial t_m / \partial \tau_{m-1} \end{array} \right\|$$

не равен нулю на Γ .

Рассмотрим все характеристические линии (2) проходящие через $\Gamma : t = t(s, \tau) \in C^{1+\alpha}$, которые являются решениями задачи

$$\frac{dt_i}{ds} = b_i(t), \quad t_i|_{s=0} = t_i(\tau), \quad i = 1, \dots, m.$$

Эти линии образуют в $\mathcal{D}$ некоторую область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, $\Gamma \subset \mathcal{D}$. Пусть $\Lambda(t)$ – решение задачи

$$\sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial \Lambda}{\partial t_i} = 1 \quad \text{в } \mathcal{D}_0, \quad \Lambda|_{\Gamma} = 0.$$

Функция $\Lambda(t)$ монотонна вдоль характеристических линий. Обозначим через $G_T \subset \mathcal{D}_0$ множество, где $0 < \Lambda(t) < T$: $G_T = \Gamma \times (0 < \Lambda(t) < T)$; здесь $T > 0$ постоянная.

ЗАДАЧА КОШИ. В области $Q_T = \mathbb{R}^n \times G_T$ ищется ограниченное решение $u = (u_1, \dots, u_N)$ системы (1), удовлетворяющее условию

$$u|_{\mathbb{R}^n \times \Gamma} = \phi(x, t(\tau)), \quad (1.1)$$

где $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in C(\mathbb{R}^n \times \Gamma)$.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$t_k(s, \tau) - t_k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (t(s, \tau) - t = 0), \quad t \in G_T. \quad (1.2)$$

Якобиан системы (1.2), равный J , не равен нулю на Γ . Потому при малых $T > 0$ система (1.2) однозначно разрешима относительно $s = s(t) \in C^{1+\alpha}(G_T)$, $\tau = \tau(t) \in C^{1+\alpha}(G_T)$, которые являются решениями задач

$$\sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial s}{\partial t_i} = 1 \quad \text{в } G_T, \quad s|_{\Gamma} = 0, \quad \sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial \tau}{\partial t_i} = 0 \quad \text{в } G_T, \quad \tau|_{\Gamma} = \tau|_{\Gamma_0}. \quad (1.3)$$

Отсюда заключаем, что $s(t) \equiv \Lambda(t)$.

2. Обозначим через $G_T^{(0)} = \Gamma_0 \times (0 < s < T)$ образ G_T , а через $Q_T^{(0)} = \mathbb{R}^n \times (0 < s < T) \times \Gamma_0$ – образ Q_T , $B_\tau = \mathbb{R}^n \times (0 < s < T)$.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи Коши. Рассмотрим функцию $u(x, t(s, \tau)) = u(x, s; \tau)$, которая при фиксированном τ в силу (1.3) будет решением задачи

$$\sum_{|k| \leq 2} A_k(x, s; \tau) D_x^k u(x, s; \tau) - \frac{\partial u(x, s; \tau)}{\partial s} = f(x, s; \tau) \quad \text{в } B_\tau, \quad (1.4)$$

$$u|_{s=0} = \phi(x, t(\tau)), \quad (1.5)$$

где $A_k(x, s; \tau) = A_k(x, t(s, \tau))$, $f(x, s; \tau) = f(x, t(s, \tau))$.

Из единственности решения задачи (1.4), (1.5) следует единственность решения задачи Коши.

α) Пусть $A_k^{ij}(x, s; \tau)$, $f_k(x, s; \tau)$ принадлежат пространству $H_x^{\alpha; \alpha/2}(\overline{B}_\tau)$ (см. [4]), а ϕ_k принадлежит $H_x^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и пусть нормы их равномерно относительно τ ограничены числом M . Очевидно, для этого достаточно, чтобы $A_k^{ij}(x, t)$, $f_k(x, t)$ принадлежали $H_{x,t}^{\alpha; \alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $\phi_k \in H_x^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (см. [4]).

В силу общей теории при фиксированном τ имеем.

ЛЕММА 1.1. *Существует решение $u(x, s; \tau) = (u_1, \dots, u_N)$ задачи (1.4), (1.5), где $u_k \in H_{x,s}^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\overline{B}_\tau)$ и*

$$\sum_{k=1}^N \|u_k\|_{B_\tau}^{(2+\alpha)} \leq C \sum_{k=1}^N (\|f_k\|_{B_\tau}^{(\alpha)} + \|\phi_k\|_{\mathbb{R}^n}^{(2+\alpha)}) \quad (1.6)$$

и в силу условий на нормы f_k , ϕ_k

$$\sum_{k=1}^N \max_{\tau} \|u_k\|_{B_\tau}^{(2+\alpha)} \leq C_1 \sum_{k=1}^N (\max_{\tau} \|f_k\|_{B_\tau}^{(\alpha)} + \max_{\tau} \|\phi_k\|_{\mathbb{R}^n}^{(2+\alpha)}) \leq M_0. \quad (1.7)$$

3. Рассмотрим $u(x, s; \tau)$ – решение задачи (1.4), (1.5). При отображении (1.2) $A_k(x, s(t); \tau(t)) = A_k(x, t)$, $f(x, s(t); \tau(t)) = f(x, t)$. Если $u(x, s; \tau)$ непрерывно дифференцируема по τ , то в силу (1.3) функция $u(x, t) = u(x, s(t); \tau(t))$ будет решением задачи Коши в Q_T . Укажем дополнительные условия, при которых $u(x, s; \tau)$ непрерывно дифференцируема по $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{m-1})$.

β) Пусть функции

$$\frac{\partial A_k^{ij}(x, t(s, \tau))}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial f_k(x, t(s, \tau))}{\partial t_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

принадлежат $H_{x,t}^{\alpha; \alpha/2}(\overline{B}_T)$ с равномерно относительно τ ограниченными нормами. Очевидно, для этого достаточно, чтобы

$$\frac{\partial A_k^{ij}(x, t)}{\partial t_i} \in H_{x,t}^{\alpha; \alpha/2}(\overline{Q}_T), \quad \frac{\partial f_k(x, t)}{\partial t_i} \in H_{x,t}^{\alpha; \alpha/2}(\overline{Q}_T), \quad i = 1, \dots, m.$$

Функции $\phi_k(x, t(\tau))$ непрерывно дифференцируемы по t ,

$$\frac{\partial \phi_k(x, t(\tau))}{\partial \tau_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_k}{\partial t_i} \frac{\partial t_i}{\partial \tau_j} \in H_x^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n})$$

и нормы равномерно ограничены относительно τ . Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{\partial \phi_k(x, t(\tau))}{\partial t_i} \in H_x^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n}).$$

Функция $\phi_0(x, t) = \phi(x, t(\tau(t)))$ есть продолжение ϕ в $\mathbb{R}^n \times G_T$ и в силу (1.3)

$$\sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial \phi_0(x, t)}{\partial t_i} = 0.$$

4. Докажем непрерывность $u(x, s; \tau)$ относительно τ . Пусть $u(x, s; \tau)$, $u(x, s; \tau + \Delta\tau_i)$ — решения задачи (1.4), (1.5) при τ и $\tau + \Delta\tau_i = (\tau_1, \dots, \tau_i + \Delta\tau_i, \dots, \tau_{m-1})$. Тогда функция $v(x, s) = u(x, s; \tau) - u(x, s; \tau + \Delta\tau_i)$ в B_τ будет решением уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq 2} A_k(x, s; \tau) D_x^k v - \frac{\partial v}{\partial s} &= f(x, s; \tau) - f(x, s; \tau + \Delta\tau_i) \\ &+ \sum_{|k| \leq 2} [A_k(x, s; \tau + \Delta\tau_i) - A_k(x, s; \tau)] D_x^k u(x, s; \tau + \Delta\tau_i) \end{aligned} \quad (1.8)$$

при начальных условиях

$$v|_{s=0} = \phi(x, t(\tau)) - \phi(x, t(\tau + \Delta\tau_i)). \quad (1.9)$$

В силу условий (1.6), (1.7) и того, что правая часть и начальная функция стремятся к нулю при $\Delta\tau_i \rightarrow 0$, функция $v(x, s) \rightarrow 0$, т.е. $u(x, s; \tau)$ непрерывна относительно τ . Докажем дифференцируемость $u(x, s; \tau)$ по τ . Пусть $w(x, s; \tau)$ в B_τ решение уравнения

$$\sum_{|k| \leq 2} A_k(x, s; \tau) D_x^k w - \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \tau_i} f(x, s; \tau) - \sum_{|k| \leq 2} \frac{\partial}{\partial \tau_i} A_k(x, s; \tau) D_x^k u(x, s; \tau), \quad (1.10)$$

при начальных условиях

$$w|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \phi(x, t(\tau)). \quad (1.11)$$

В силу условий $\alpha\beta$) и (1.7) $w \in H_{x,s}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{B}_\tau)$. Рассмотрим разность

$$W = \frac{u(x, s; \tau + \Delta\tau_i) - u(x, s; \tau)}{\Delta\tau_i} - w(x, s; \tau), \quad \Delta\tau_i \neq 0,$$

которая в B_τ является решением уравнения

$$\sum_{|k| \leq 2} A_k(x, s; \tau) D_x^k W - \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{f(x, s; \tau + \Delta\tau_i) - f(x, s; \tau)}{\Delta\tau_i} - \frac{\partial}{\partial \tau_i} f(x, s; \tau) + \sum_{|k| \leq 2} \frac{\partial}{\partial \tau_i} A_k(x, s; \tau) D_x^k [u(x, s; \tau) - u(x, s; \tau + \Delta\tau_i)]$$

и удовлетворяет начальному условию

$$W|_{s=0} = \frac{1}{\Delta\tau_i} [\phi(x, \tau + \Delta\tau_i) - \phi(x, \tau)] - \frac{\partial}{\partial \tau_i} \phi(x, \tau).$$

Как и выше $W \rightarrow 0$, когда $\Delta\tau_i \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} u(x, s; \tau) = w(x, s; \tau).$$

Итак имеем утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть коэффициенты системы (1) и начальные функции удовлетворяют вышеуказанным условиям и Γ – нехарактеристическая поверхность (2). Тогда в Q_T существует единственное классическое решение $u \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T)$. Функции $u_i(x, s; \tau)$ в B_τ при произвольном $\tau \in \Gamma_0$ принадлежат $H_{x,t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{B}_\tau)$ и имеют место оценки (1.6), (1.7).

2. Поверхность Γ характеристическая.

ЗАДАЧА КОШИ. В некоторой окрестности $\mathbb{R}^n \times G_T$ ищется решение $u = (u_1, \dots, u_N)$ системы

$$\sum_{k=1}^m b_k(t) \frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^N \sum_{|k| \leq 2} A_k^{ij}(x, t) D_x^k u_j - f_i(x, t) \quad (2.1)$$

при начальных условиях

$$u_i|_{\mathbb{R}^n \times \Gamma} = \phi_i(x, t(\tau)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

В этом случае определитель J равен нулю на Γ . Пусть решение задачи (2.1), (2.2) существует и коэффициенты удовлетворяют условиям п. 1. При заданном i найдем значение $\partial u_i / \partial t_k$ на $\mathbb{R}^n \times \Gamma$. Из (2.1), (2.2) имеем

$$\sum_{k=1}^m b_k(t(\tau)) \frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^N \sum_{|k| \leq 2} A_k^{ij}(x, t(\tau)) D_x^k \phi_j(x, t(\tau)) - f_i(x, t(\tau)), \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial t_k(\tau)}{\partial \tau_j} \frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial \tau_j} \phi_i(x, \tau), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.4)$$

Определитель системы (2.3), (2.4) относительно $\partial u_i / \partial t_k$, $k = 1, \dots, m$, равен определителю J , который равен нулю на Γ . Для существования решения системы нужно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы, который равен $m-1$,

рангу Z . В силу этого нетрудно доказать (как и в случае уравнений с частными производными первого порядка), что существуют функции $\delta_k(\tau)$, $k = 1, \dots, m-1$, не зависящие от i , такие, что

$$\sum_{k=1}^m \delta_k(\tau) \frac{\partial t_l(\tau)}{\partial \tau_k} = b_l(t(\tau)), \quad l = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

и

$$\sum_{k=1}^m \delta_k(\tau) \frac{\partial \phi_i(x, t(\tau))}{\partial \tau_k} = \sum_{j=1}^N \sum_{|k| \leq 2} A_k^{ij}(x, t(\tau)) D_x^k \phi_j(x, t(\tau)) - f_i(x, t(\tau))$$

или

$$\sum_{k=1}^m \delta_k(\tau) \frac{\partial \phi(x, t(\tau))}{\partial \tau_k} = \sum_{|k| \leq 2} A_k(x, t(\tau)) D_x^k \phi(x, t(\tau)) - f(x, t(\tau)). \quad (2.6)$$

Рассмотрим на Γ_0 систему уравнений

$$\frac{d\tau_k}{ds} = \delta_k(\tau), \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (2.7)$$

Через каждую точку $\tau^0 \in \Gamma_0$ проходит одна и только одна линия – решение системы (2.7) $\tau = \tau(s)$, которые покрывают Γ_0 . Образы их на Γ : $t(s) = t(\tau(s)) = (t_1(s), \dots, t_m(s))$ в силу (2.5), (2.7) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dt_i(s)}{ds} = b_i(t(s)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.8)$$

которые и будут характеристическими линиями, покрывающими Γ . Рассмотрим на Γ произвольную фиксированную характеристическую линию $\chi_s = (t_1(s), \dots, t_m(s))$ и пусть $B_s = \mathbb{R}^n \times \chi_s$. В силу (2.6)–(2.8) имеем

$$\frac{\partial \phi(x, s)}{\partial s} = \sum_{|k| \leq 2} A_k(x, s) D_x^k \phi(x, s) - f(x, s), \quad (2.9)$$

где $\phi(x, s) = \phi(x, t(\tau(s)))$, $A_k(x, s) = A_k(x, t(\tau(s)))$, $f(x, s) = f(x, t(\tau(s)))$.

Итак, если Γ – характеристическая поверхность, то для разрешимости задачи Коши с данными ϕ на $\mathbb{R}^n \times \Gamma$ необходимо, чтобы для произвольной характеристической линии $\chi_s \subset \Gamma$ след функции ϕ на $\mathbb{R}^n \times \chi_s$ удовлетворял уравнению (2.9). Покажем, что это условие достаточно и решений задачи Коши бесконечно много.

В области $\mathscr{D}$ рассмотрим произвольную нехарактеристическую поверхность Γ' уравнения (2) размерности $m-1$ с параметрическим представлением $z(\tau) = (z_1(\tau), \dots, z_m(\tau))$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{m-1}) \in \Gamma'_0$, $z \in C^{1+\alpha}$, которая пересекает Γ по $(m-2)$ -мерному многообразию E . Характеристические линии, проходящие через E , покрывают Γ . Рассмотрим все характеристические линии уравнения (2), проходящие через Γ' . Они содержат Γ . Построим область G'_T , аналогичную области G_T в п. 1. Пусть Γ_T – часть Γ , лежащая в G'_T . Пусть $\phi(x, s)$ – заданная на $\mathbb{R}^n \times \Gamma_T$ функция, которая при любой характеристической линии $\chi_s \in \Gamma_T$ является решением системы (2.9) и при $s = 0$, т.е. на $\mathbb{R}^n \times E$, принимает значения $\phi(x, z(\tau))$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n \times \Gamma'$ произвольную гладкую функцию $\Psi(x, z(\tau))$, которая совпадает с $\phi(x, z(\tau))$ на $\mathbb{R}^n \times E$. В силу теоремы 1.1 существует решение $v = (v_1, \dots, v_N)$ системы (1) в $\mathbb{R}^n \times G'_T$, принимающее значение $\Psi(x, z(\tau))$ на $\mathbb{R}^n \times \Gamma'$. В силу того, что $\Psi = \phi$ на $\mathbb{R}^n \times E$, и единственности решения задачи Коши имеем, что $v = \phi(x, s)$ на $\mathbb{R}^n \times \Gamma_T$. Итак, имеем утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Если Γ – характеристическая поверхность (2), то для существования решения задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы при произвольной характеристической линии $\chi_s \subset \Gamma$ след функции ϕ на $\mathbb{R}^n \times \chi_s$ удовлетворял системе (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично может быть исследована задача Коши и задача Дирихле (первая краевая задача) и для системы уравнений:

$$\sum_{|k| \leq 2p} A_k(x, t) D_x^k u - \sum_{k=1}^m b_k(t) \frac{\partial u}{\partial t_k} = f(x, t), \quad p \geq 2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Терсенов С. А. Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 6. С. 1364–1376.
- [2] Генчев Н. С. Об ультрапараболических уравнениях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 2. С. 205–268.
- [3] Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н. Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 6. С. 1341–1360.
- [4] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [5] Амиров Ш. Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченных областях // Корректно поставленные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984.
- [6] Гомбоев Л. Г. О корректно поставленной задаче для уравнения ультрапараболического типа // Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики. Новосибирск: НГУ, 1986. С. 44–51.
- [7] Пятков С. Г. Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. С. 182–197.
- [8] Шатыро Я. И. Первая краевая задача для одного ультрапараболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1971. № 7. С. 1089–1141.
- [9] Терсенов А. С. Априорные оценки для одного класса вырождающихся параболических и ультрапараболических уравнений // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 2. С. 168–170.
- [10] Manfredini M. The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations // Adv. Differential Equations. 1997. V. 2. № 5. P. 831–866.
- [11] Polidoro S. On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type // Matematiche (Catania). 1994. V. 49. № 1. P. 53–105.
- [12] Ильин А. М. Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. № 6. С. 1214–1217.
- [13] Kirov G. Hr. The Dirichlet problem for a certain ultraparabolic equation // Godišnik Visš. Tehn. Učebn. Zaved. Mat. 1970. V. 6. № 2. P. 101–118.