Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Злобин, Разложения кратных интегралов в линейные формы, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 5, 683–706

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:23:07

УДК 511+517.5

РАЗЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

С. А. Злобин

Доказываются общие теоремы о разложении кратных интегралов в линейные формы от обобщенных полилогарифмов с коэффициентами – рациональными функциями.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. При исследованиях иррациональности значений дзета-функции Римана возникают многомерные интегралы, представимые в виде линейных форм с рациональными коэффициентами от этих значений. Первые такие интегралы были предложены Ф. Бейкерсом [1] в 1979 г. после доказательства Р. Аперии иррациональности $\zeta(3)$. Его интегралы

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy$$

и

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}} dx dy dz$$

могут быть представлены в виде линейных форм от $1, \zeta(2)$ и $1, \zeta(3)$ соответственно.

Существуют различные попытки обобщения этих интегралов. Первая из них была в 1990 г. предпринята О. Н. Василенко [2], который рассмотрел интегралы

$$V_{m,n} = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^n (1-x_i)^n}{(1-x_1(1-x_2(\cdots x_{m-1}(1-x_m)\cdots))^{n+1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_m \quad (1)$$

и установил некоторые свойства $V_{m,0}$. Интегралы $V_{2,n}$ и $V_{3,n}$ (после замены $x_m \mapsto 1-x_m$) совпадают с интегралами Бейкера. Изучение интегралов этого вида продолжил Д. В. Васильев [3], доказав, что при $m=4$ и $m=5$ интеграл (1) представляется в виде линейных форм с рациональными коэффициентами от $1, \zeta(2), \zeta(4)$ и $1, \zeta(3), \zeta(5)$ соответственно. Естественным обобщением (1) является интеграл

$$V(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\cdots x_{m-1}(1-x_m)\cdots))^{a_0}} dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

В.В. Зудилин в [4] доказал, что при некоторых условиях на параметры интеграл $V(1)$ равен значению гипергеометрической функции в точке $z = 1$, что доказывало его представление в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$ для $1 < k \leq m$ той же четности, что и m .

Другая попытка обобщения интегралов Бейкера была предпринята В.Н. Сорокиным [5], [6], который по существу доказал тождества

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n (1-x_1)^n x_2^n (1-x_2)^n x_3^n (1-x_3)^n}{(1-zx_1x_2)^{n+1} (1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3 = P_{2,1}(z^{-1}) \text{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1}) \text{Le}_{1,1}(z) + P_1(z^{-1}) \text{Le}_1(z) + P_\emptyset(z^{-1}) \quad (2)$$

и

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{2j})^{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l} = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \text{Li}_{1,\{2\}_k}(z), \quad (3)$$

где $a_{2j-1} = a_{2j} = (l+1-j)(n+1) - s$, $0 \leq s \leq n$. Через $\{a\}_k$ мы обозначаем k раз повторенное через запятую число a . В этих формулировках присутствуют обобщенные полилогарифмы, определяемые равенствами

$$\text{Li}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \quad \text{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}},$$

где $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ – вектор с натуральными компонентами. Ряды, определяющие обобщенные полилогарифмы, сходятся при $|z| < 1$. Они могут быть выражены друг через друга. Для удобства положим $\text{Li}_\emptyset(z) = \text{Le}_\emptyset(z) = 1$. Здесь и далее коэффициенты при полилогарифмах в разложении интегралов – многочлены с рациональными коэффициентами. Существование такого разложения было показано с помощью аппроксимаций Паде. В дальнейшем будут использоваться *длина* $\ell(\vec{s})$ вектора $\vec{s}$ – количество его координат и *вес* $w(\vec{s})$ – сумма его компонент. Будем писать $\vec{u} \leq \vec{v}$, если длины векторов $\vec{u}, \vec{v}$ равны и $u_i \leq v_i$ при любом допустимом i . Назовем вектор $\vec{u}$ *подчиненным* вектору $\vec{v}$, если $\vec{u} \leq \vec{v}$ или $\vec{u} \leq \vec{v}'$ для некоторого вектора $\vec{v}'$, полученного из вектора $\vec{v}$ вычеркиванием нескольких компонент.

Ниже мы рассмотрим интегралы вида (2), (3) в общем виде

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (4)$$

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_l = m.$$

Оказывается, интеграл $V(z)$ при некоторых ограничениях на параметры может быть сведен к $S(z)$. Это было независимо показано автором [7] и С. Фишлером [8] (для $z = 1$). Более общее тождество было доказано в [9].

2. Общая теорема о разложении кратных интегралов.

ЛЕММА 1. *Обобщенные полилогарифмы $\text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z)$ с различными индексами линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что обобщенные полилогарифмы $\text{Li}_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z)$ (со строгими неравенствами) при различных индексах линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ (см. [10], [11]). Наборы функций $\{\text{Le}_{\vec{s}}(z)\}$ и $\{\text{Li}_{\vec{s}}(z)\}$ с весами вектора $\vec{s}$, не превосходящими некоторого фиксированного числа и упорядоченных по возрастанию длины $\vec{s}$, связаны преобразованием с верхнетреугольной матрицей с ненулевыми диагональными элементами (см. [11, п. 3]):

$$\text{Le}_{\vec{s}}(z) = \text{Li}_{\vec{s}}(z) + \sum_{\vec{t}} \text{Li}_{\vec{t}}(z),$$

где векторы $\vec{t}$ в сумме имеют тот же вес, что и $\vec{s}$, но меньшую длину. Отсюда и следует линейная независимость $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$ над $\mathbb{C}(z)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если функция $f(z)$ имеет представление в виде конечной суммы $\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z)$, где $P_{\vec{s}}(x)$ – многочлены, то это представление единственно.*

Рассмотрим теперь интеграл (4). При условиях $\text{Re}(b_i) > \text{Re}(a_i) > 0$, $1 \leq i \leq m$, $\text{Re}(c_j) > 0$, $1 \leq j \leq l$, и $|z| < 1$ он, очевидно, сходится.

ЛЕММА 2. *Пусть $b_i - a_i$ и c_j – натуральные числа. Тогда выполняется равенство*

$$zS(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} R(n_1, n_2, \dots, n_l) z^{n_1},$$

где

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^l \Gamma(c_j)} \times \frac{\prod_{j=1}^l [(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1)(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 2) \cdots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)]}$$

и подразумевается, что $r_0 = 0$, $\zeta_{l+1} \equiv 1$, и в случае $c_j = 1$ множитель в числителе опускается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим каждый множитель $(1 - zx_1x_2 \cdots x_{r_j})^{-c_j}$ под интегралом по формуле

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)k!} x^k.$$

Получим

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \times \prod_{j=1}^l \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c_j+k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} (zx_1x_2 \cdots x_{r_j})^{k_j} dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1, \dots, k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\dots+k_l} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(c_j+k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} \\
&\quad \times \int_{[0,1]^m} \prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} x_i^{a_i+k_j+\dots+k_l-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} dx_1 dx_2 \dots dx_m \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\dots+k_l} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(c_j+k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(a_i+k_j+\dots+k_l)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k_j+\dots+k_l)}.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $n_i = k_i + k_{i+1} + \dots + k_l + 1$; тогда $k_i = n_i - n_{i+1}$, $n_{l+1} = 1$. После перегруппировки множителей получим

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} z^{n_1-1} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^l \Gamma(c_j)} \\
&\quad \times \frac{\prod_{j=1}^l [(n_j - n_{j+1} + 1)(n_j - n_{j+1} + 2) \dots (n_j - n_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(a_i + n_j - 1)(a_i + n_j) \dots (b_i + n_j - 2)]},
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Частным случаем леммы 2 является

ЛЕММА 3. *Справедливо следующее интегральное представление для обобщенных полилогарифмов:*

$$\text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z) = z \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_m}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1 x_2 \dots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l$.

Считаем далее параметры a_i, b_i, c_j целыми, причем $b_i > a_i \geq 1, c_j \geq 1$.

Определим индекс рациональной функции $R(x) = P(x)/Q(x)$ как $I(R) = \deg P - \deg Q$. Пусть $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1) \dots R_l(\zeta_l)$. Тогда сопоставим ей вектор из индексов $(I(R_1), \dots, I(R_l))$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1) \dots R_l(\zeta_l)$ выполняется неравенство $I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_j) + j \leq 0$ при любом $j = 1, \dots, l$, и все полюсы R_j лежат в множестве $\{0, -1, -2, \dots\}$. Обозначим соответствующий максимальный из порядков этих полюсов через m_j , а минимальное и максимальное значения абсолютных величин полюсов всех функций R_j — через p и P . Тогда при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, сумма*

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} R(n_1, n_2, \dots, n_l) z^{n_1-1} \tag{5}$$

представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z), \quad (6)$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leq (m_1 * m_2 * \dots * m_l)$, где $*$ означает либо запятую, либо плюс при каком-либо их распределении знаков (в частности, будут выполняться неравенства $\ell(\vec{s}) \leq l$ и $w(\vec{s}) \leq m_1 + m_2 + \dots + m_l$), а $P_{\vec{s}}(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq 1, \quad \text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq p+1 \text{ при } \vec{s} \neq \emptyset, \quad \deg P_{\vec{s}}(x) \leq P+1.$$

Дополнительно, если выполняются неравенства

$$I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_j) + j \leq -1, \quad j = 1, \dots, l, \quad (7)$$

то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

Докажем вначале следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть теорема 1 верна для функций R , зависящих от менее, чем l переменных (в случае $l = 1$ никаких предположений не требуется). Тогда теорема верна для $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1)R_2(\zeta_2) \dots R_l(\zeta_l)$, где $R_j(x) = 1/(x + p_j)^{s_j}$, $j = 1, \dots, l$. Условие (7) в этом случае равносильно $s_1 \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать теорему 1 для суммы

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} z^{n_1-1} \prod_{j=1}^l \frac{1}{(n_j + p_j)^{s_j}}, \quad (8)$$

причем $\min_{1 \leq j \leq l} p_j = p$, $\max_{1 \leq j \leq l} p_j = P$. Пусть $r_0 = 0$, $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l$. Тогда (8) можно записать в виде интеграла

$$I(p_1, p_2, \dots, p_l) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \dots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=1}^l (1 - z x_1 x_2 \dots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Проведем индукцию по величине $p_1 + p_2 + \dots + p_j$. При этом покажем только, что сумма (8) представима в виде (6), так как в каждом из разбираемых случаев нетрудно проследить за степенями многочленов, а также за ограничением на векторы получающихся обобщенных полилогарифмов.

База индукции ($p_1 = p_2 = \dots = p_l = 0$) следует из леммы 3: $I(0, 0, \dots, 0) = z^{-1} \times \text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(z)$.

Рассмотрим случай $p_j > 0$ для любого $j = 1, \dots, l$. Из равенства

$$x_1 x_2 \dots x_{r_l} = \frac{1 - (1 - z x_1 x_2 \dots x_{r_l})}{z}$$

следует, что

$$I(p_1, p_2, \dots, p_l) = z^{-1} I(p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_l - 1) - z^{-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \cdots x_{r_j})^{p_j-1}}{\prod_{j=1}^{l-1} (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

В последнем интеграле проинтегрируем по переменным $x_{r_{l-1}+1}, x_{r_{l-1}+2}, \dots, x_{r_l}$; получим рациональное число. Полученный интеграл представляется в виде (6) по условию леммы (перед этим нужно разложить его в сумму по лемме 2), а $I(p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_l - 1)$ представляется в виде (6) по предположению индукции. Таким образом можно считать $p = \min_{1 \leq j \leq l} p_j = 0$.

Пусть теперь $p_h > 0$ при некотором $h > 1$. Запишем равенство

$$\begin{aligned} (x_{r_{h-1}+1} x_{r_{h-1}+2} \cdots x_{r_h})^{p_h} &= (x_{r_{h-1}+1} x_{r_{h-1}+2} \cdots x_{r_h})^{p_h-1} \\ &\quad + (x_{r_{h-1}+1} x_{r_{h-1}+2} \cdots x_{r_h})^{p_h} (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_{h-1}}) \\ &\quad - (x_{r_{h-1}+1} x_{r_{h-1}+2} \cdots x_{r_h})^{p_h-1} (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_h}), \end{aligned}$$

из которого следует

$$\begin{aligned} I(p_1, p_2, \dots, p_h, \dots, p_l) &= I(p_1, p_2, \dots, p_h - 1, \dots, p_l) \\ &\quad + \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \cdots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h-1}}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \cdots dx_m \\ &\quad - \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \cdots x_{r_j})^{p'_j}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \cdots dx_m, \end{aligned}$$

где $p'_j = p_j$ при $j \neq h$ и $p'_h = p_h - 1$. Два интеграла в правой части с меньшим числом множителей в знаменателе по условию леммы представляются в виде (6), а к $I(p_1, p_2, \dots, p_h - 1, \dots, p_l)$ применимо предположение индукции.

Остается доказать утверждение леммы для интеграла

$$I(p_1, 0, \dots, 0) = \int_{[0,1]^m} \frac{(x_1 x_2 \cdots x_{r_1})^{p_1}}{\prod_{j=1}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

Из равенства

$$(x_1 x_2 \cdots x_{r_1})^{p_1} = z^{-1} (x_1 x_2 \cdots x_{r_1})^{p_1-1} - z^{-1} (x_1 x_2 \cdots x_{r_1})^{p_1-1} (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_1})$$

следует

$$\begin{aligned} I(p_1, 0, \dots, 0) &= z^{-1} I(p_1 - 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad - z^{-1} \int_{[0,1]^m} \frac{(x_1 x_2 \cdots x_{r_1})^{p_1-1}}{\prod_{j=2}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \cdots dx_m. \end{aligned}$$

Последний интеграл по условию леммы, а $I(p_1 - 1, 0, \dots, 0)$ по предположению индукции представляются в виде (6). Лемма доказана.

Назовем δ -суммой выражение

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} R_l(n_l),$$

где δ_j – целые неотрицательные числа, полюсы R_j лежат на отрезке $[-P_j, -p_j]$ и являются целыми числами и для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется $I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_l) + j \leq 0$.

ЛЕММА 5. *Любая δ -сумма представляется в виде линейной комбинации δ -сумм, у которых $I(R_j) < 0$ для любого j . При этом справедливы следующие утверждения.*

1) Если $\vec{T}$ – вектор из максимальных порядков полюсов функций R_j , а $\vec{t}$ – такой вектор для δ -суммы линейной комбинации, то $\vec{t}$ может быть получен из $\vec{T}$ вычеркиванием нескольких компонент.

2) Минимум из чисел p_j в каждой δ -сумме линейной комбинации не меньше такого минимума в исходной δ -сумме, а максимум из чисел P_j в каждой δ -сумме линейной комбинации не больше такого максимума в исходной δ -сумме.

3) Максимум из чисел $I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_l) + j$ в каждой δ -сумме линейной комбинации не больше такого максимума в исходной δ -сумме. Следовательно, если у изначальной суммы он был < -1 , то в каждой δ -сумме из линейной комбинации он будет < -1 .

4) Если для любого j выполнялись неравенства $p_{j+1} + \delta_j \geq P_j$ в исходной δ -сумме, то они будут выполняться и в любой δ -сумме из линейной комбинации.

5) То же утверждение, что и в 4), но для неравенства $p_j > P_{j+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по вектору (l, k) , где k – количество функций R_j с $I(R_j) \geq 0$, $0 \leq k < l$. Векторы (l, k) мы упорядочим в соответствии с лексикографическим порядком, т.е. запись $(l_1, k_1) < (l_2, k_2)$ означает, что либо $l_1 < l_2$, либо $l_1 = l_2$ и $k_1 < k_2$.

База индукции $l = 1$ очевидна, так как в этом случае, по определению δ -суммы имеем $I(R_1) \leq -1$. Докажем утверждение для вектора (l, k) в предположении, что для меньших векторов оно доказано. Покажем при этом основное утверждение леммы. Нетрудно проследить за утверждениями 1)–5) в шаге индукции. Если $k = 0$, то доказывать нечего, ведь тогда $I(R_j) < 0$ для любого j . Пусть $k > 0$, т.е. для некоторого j выполнено $I(R_j) \geq 0$. Так как по условию $I(R_1) \leq -1$, имеем $j > 1$. Представим R_j в виде суммы многочлена и правильной дроби. В слагаемом с правильной дробью число k уменьшилось на 1, и к нему можно применить предположение индукции. Рассмотрим теперь второе слагаемое, в котором $R_j(x) = P(x)$, P – многочлен.

а) Пусть $j = l$. Просуммируем последнюю сумму:

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} P(n_l) = Q(n_{l-1}),$$

где Q – многочлен степени $\deg P + 1$. Таким образом, R_{l-1} умножится на Q . Итак, по сравнению с исходной δ -суммой количество знаков суммирования уменьшилось на единицу. Нетрудно видеть, что полученное выражение является δ -суммой (вектор из индексов входящих в нее рациональных функций равен $(I(R_1), \dots, I(R_{l-2}), I(R_{l-1}) + I(R_l) + 1)$), и значит, мы можем применить предположение индукции.

б) Пусть теперь $R_j(x) = P(x)$, $1 < j < l$, где P – многочлен. Перепишем исходную δ -сумму в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_{j-1}=1}^{n_{j-2}+\delta_{j-2}} R_{j-1}(n_{j-1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j} f(n_{j+1}),$$

где

$$f(n_{j+1}) = R(n_{j+1}) \sum_{n_{j+2}=1}^{n_{j+1}+\delta_{j+1}} R_{j+2}(n_{j+2}) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} R_l(n_l).$$

Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j} f(n_{j+1}) \\ &= \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1}) - \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=n_j+\delta_j+1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1}) \\ &= Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=\delta_j+2}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j+1}-\delta_j-1} P(n_j) \\ &= Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} Q_2(n_{j+1}) f(n_{j+1}) \\ &+ \sum_{n_{j+1}=1}^{\delta_j+1} Q_2(n_{j+1}) f(n_{j+1}), \end{aligned}$$

причем $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \deg P + 1$, а третье слагаемое является константой. Таким образом, исходную δ -сумму мы представим в виде линейной комбинации трех δ -сумм меньшей кратности с соответствующими им векторами

$$\begin{aligned} & (I(R_1), \dots, I(R_{j-1}) + I(R_j) + 1, I(R_{j+1}), \dots, I(R_l)), \\ & (I(R_1), \dots, I(R_{j-1}), I(R_{j+1}) + I(R_j) + 1, \dots, I(R_l)), \\ & (I(R_1), \dots, I(R_{j-1})). \end{aligned}$$

К каждой из них можно применить предположение индукции, что и доказывает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Проведем индукцию по l . Предположение индукции: теорема верна для функций R , зависящих от менее, чем l переменных (в случае $l = 1$ никаких предположений не требуется). Докажем ее для функций R , зависящих от l переменных.

Применяя лемму 5 при $\delta_j = 0$, мы можем считать, что для любого j выполняется $I(R_j) < 0$. Разложим каждую функцию R_j в сумму простейших дробей и представим R в виде

$$R(\zeta_1, \dots, \zeta_l) = \sum_{(m_1, \dots, m_l)} \sum_{(u_1, \dots, u_l)} \frac{B_{\vec{m}, \vec{u}}}{(\zeta_1 + u_1)^{m_1} \dots (\zeta_l + u_l)^{m_l}},$$

в суммах $u_j \in U_j$, $m_j \leq M_j$, где U_j – множество абсолютных значений (неположительных) величин полюсов R_j , M_j – максимальный из порядков этих полюсов, $B_{\vec{m}, \vec{u}} = \prod_{j=1}^l B_{m_j, u_j}$. Достаточно доказать теорему для фиксированных $m_2, \dots, m_l$ и $u_2 = p_2, \dots, u_l = p_l$, т.е. для

$$R(\zeta_1, \dots, \zeta_l) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{u_1 \in U_1} \frac{B_{m_1, u_1}}{(\zeta_1 + u_1)^{m_1} (\zeta_2 + p_2)^{m_2} \dots (\zeta_l + p_l)^{m_l}} \quad (9)$$

(далее для краткости будем писать u вместо u_1 и U вместо U_1).

Члены с $m_1 \geq 2$ в сумме (5) сразу же представляются в нужной форме по лемме 4. Если $I(R_1) = -1$, то дополнительное условие теоремы 1 не выполняется, и нам не надо заботиться о коэффициентах при полилогарифмах с первой координатой 1. В этом случае члены с $m_1 = 1$ также представим по лемме 4.

Рассмотрим далее случай $I(R_1) \leq -2$. В этом случае $\sum_{u \in U} B_{1, u} = 0$. Свернем сумму слагаемых из (5) с $m_1 = 1$ в интеграл вида

$$\int_{[0,1]^m} \frac{(\sum_{u \in U} B_{1, u} x_1^u) \prod_{j=2}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \dots x_{r_j})^{p_j}}{(1 - z x_1) \prod_{j=2}^l (1 - z x_1 x_2 \dots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \\ r_1 = 1, \quad m = r_l.$$

По лемме 4 интеграл представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z). \quad (10)$$

Остается только доказать, что $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Так как $\sum_{u \in U} B_{1, u} = 0$, многочлен $\sum_{u \in U} B_{1, u} x_1^u$ делится на $1 - x_1$. Итак,

$$\sum_{u \in U} B_{1, u} x_1^u = (1 - x_1) B(x_1) = z^{-1} (1 - z x_1) B(x_1) + (1 - z^{-1}) B(x_1);$$

соответственно наш интеграл распадется на два:

$$z^{-1} \int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1) \prod_{j=2}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \dots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=2}^l (1 - z x_1 x_2 \dots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \dots dx_m \\ + (1 - z^{-1}) \int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1) \prod_{j=2}^l (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \dots x_{r_j})^{p_j}}{(1 - z x_1) \prod_{j=2}^l (1 - z x_1 x_2 \dots x_{r_j})} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Первый интеграл по предположению индукции представляется в нужной форме, и условие на коэффициенты там выполняется. Во втором интеграле после домножения на $1 - z^{-1}$ все многочлены будут иметь корнем число 1. Итак, в представлении их суммы в виде линейной формы выполняется свойство $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Так как представление в виде линейной формы единственно по следствию 1, это и есть представление (10). Теорема доказана.

Из леммы 2 и теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. Пусть параметры a_i, b_i, c_j целые, причем $b_i > a_i \geq 1$ при $i = 1, \dots, m$ и $c_j \geq 1, c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j$, где $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$, $j = 1, \dots, l$; d_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j \leq c_j$ при $j = 1, \dots, l$ и $\sum_{k=j}^{l+1} d_k < a_i$ при $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leq r_j$.

Тогда для $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, выполняется равенство

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z), \quad (11)$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leq (r_1 * (r_2 - r_1) * \dots * (r_l - r_{l-1}))$ (в частности, будут выполняться неравенства $\ell(\vec{s}) \leq l$, $w(\vec{s}) \leq m$), а $P_{\vec{s}}(z)$ — многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\deg P_{\vec{s}}(z) \leq \max_{1 \leq i \leq m} b_i - 1$$

для любого вектора $\vec{s}$,

$$\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq d_1 + d_2 + \dots + d_l, \quad \text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq d_1 + d_2 + \dots + d_l + d_{l+1} + 1 \quad (12)$$

для любого непустого вектора $\vec{s}$ в (11). Дополнительно, если существует j такое, что $d_j < c_j$, то

$$\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq d_1 + d_2 + \dots + d_l + 1.$$

Если для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется неравенство $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j - 1$, то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем теорему с менее точной оценкой на порядок нуля многочленов $P_{\vec{s}}(z)$ в точке $z = 0$, а именно,

$$\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq 1, \quad \text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_i \text{ при } \vec{s} \neq \emptyset. \quad (13)$$

Представим интеграл $S(z)$ в виде кратной суммы с помощью леммы 2. Разложим числитель функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l)$ (см. (5)) в сумму мономов вида

$$Z \zeta_1^{X_1} \zeta_2^{Y_1+X_2} \zeta_3^{Y_2+X_3} \dots \zeta_l^{Y_{l-1}+X_l},$$

где

$$X_j + Y_j \leq c_j - 1, \quad j = 1, \dots, l-1, \quad X_l \leq c_l - 1, \quad Z \in \mathbb{Z}.$$

Тогда R разложится в сумму функций $\tilde{R}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = \tilde{R}_1(\zeta_1) \cdots \tilde{R}_l(\zeta_l)$, где

$$\tilde{R}_j(\zeta_j) = \frac{\zeta_j^{Y_{j-1} + X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)]}, \quad Y_0 = 0,$$

причем для каждой такой $\tilde{R}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} I(\tilde{R}_1) + I(\tilde{R}_2) + \cdots + I(\tilde{R}_j) + j \\ = (X_1 - q_1) + (Y_1 + X_2 - q_2) + \cdots + (Y_{j-1} + X_j - q_j) + j \\ = (X_1 + Y_1 + 1) + \cdots + (X_{j-1} + Y_{j-1} + 1) + (X_j + 1) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_j) \\ \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_j) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_j) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\tilde{R}$ выполняются условия теоремы 1. При этом

$$p = \min_{1 \leq i \leq m} a_i - 1, \quad P = \max_{1 \leq i \leq m} b_i - 2.$$

Применяя ее для каждой $\tilde{R}$, получаем требуемое в теореме равенство.

Докажем теперь более точную оценку (12). В числителе подынтегрального выражения $S(z)$ подставим следующие равенства:

$$(x_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{d_j} = \left(\frac{1 - (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})}{z} \right)^{d_j}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Это возможно сделать, так как $\sum_{k=j}^l d_k < a_i$ при $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leq r_j$. В результате получим линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{z^{d_1 + d_2 + \cdots + d_l}} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a'_i - 1} (1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{\prod_{j=1}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{c'_j}} dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

с переменными c'_j , причем $0 \leq c'_j \leq c_j$, а $a'_i = a_i - \sum_{k=j}^l d_k \geq d_{l+1} + 1 \geq 1$ для $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leq r_j$. Если все $c'_j = 0$ (это может быть только в случае $d_j = c_j$ для любого j), то интеграл равен константе и утверждение теоремы выполняется. Пусть теперь есть $c'_j > 0$, и j_0 – наибольший такой индекс. Проинтегрировав по переменным x_i , $i > r_{j_0}$, приходим к интегралу, для которого выполняются условия теоремы 2 (это следует из того, что они выполнялись для исходного интеграла и того, что $c'_j \leq c_j$ и степени множителей $1 - x_i$ в интеграле остались прежними), а значит, по теореме 2 с (13) в его разложении $\text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq 1$ и $\text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq d_{l+1} + 1$ для непустого $\vec{s}$. Учитывая множитель $1/z^{d_1 + d_2 + \cdots + d_l}$, приходим к утверждению теоремы.

Так как всегда можно положить $d_j = 0$, $j = 1, \dots, l$, и $d_{l+1} = \min_{1 \leq i \leq m} a_i - 1$, оценка (12) не хуже оценки (13). В общем случае она лучше; например, для интеграла (3) положим $d_1 = d_2 = \cdots = d_{l-1} = n + 1$, $d_l = n - s$, $d_{l+1} = 0$, откуда $\text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq l(n+1) - s$, в том числе и для $\vec{s} = \emptyset$. Если $c_1 + c_2 + \cdots + c_l \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_i$, то можно подобрать d_j так, что $\sum_{k=j}^l d_k = \min_{1 \leq i \leq m} a_i - 1$, $d_{l+1} = 0$, и, следовательно, для $P_{\vec{s}}(z)$ верна оценка $\text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_i$ (в общем случае это неверно).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в предыдущих обозначениях выполняется неравенство $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j - 1$ для любого $j = 1, \dots, l$. Тогда интеграл

$$S = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-x_1 x_2 \dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

представляется в виде линейной формы над $\mathbb{Q}$ от значений кратной дзета-функции, т.е.

$$S = \sum_{\vec{s}} q_{\vec{s}} \tilde{\zeta}(\vec{s}), \quad \tilde{\zeta}(\vec{s}) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \quad q_{\vec{s}} \in \mathbb{Q}.$$

На векторы $\vec{s}$ накладываются те же ограничения, что и в теореме 2, а кроме того, $s_1 > 1$ (что гарантирует сходимость ряда, определяющего кратную дзета-функцию).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Устремим $z \rightarrow 1-$ в утверждении теоремы 2 (возможность перестановки предела и интеграла гарантируется теоремой Б. Леви (см. [12, с. 348])). Осталось заметить, что

$$\lim_{z \rightarrow 1-} (1-z) \text{Le}_{\vec{s}}(z) = 0 \quad \text{в случае } s_1 = 1.$$

3. Усиление общей теоремы при некоторых ограничениях. В некоторых случаях разложение (11) в линейную форму содержит в действительности существенно меньше обобщенных полилогарифмов (см., например, представления (2) и (3)), чем гарантируется общей теоремой 2; именно эти случаи оказываются востребованными в арифметических приложениях. Далее нашей задачей будет дать достаточные условия на параметры интеграла $S(z)$, при которых можно значительно сузить множество полилогарифмов, входящих в его разложение. Ограничения на степени многочленов $P_{\vec{s}}$ и их кратности нуля следуют из теоремы 2, и мы не будем упоминать о них.

Для вектора $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами определим функцию

$$R(\vec{s}; x) = R(s_1, s_2, \dots, s_l; x) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq x} \frac{1}{x^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}.$$

Несложно видеть, что выполняются равенства

$$\text{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\vec{s}; n) z^n,$$

$$R(s_1, s_2, \dots, s_l; x) = \frac{1}{x^{s_1}} \sum_{1 \leq k \leq x} R(s_2, s_3, \dots, s_l; k) \quad \text{при } l > 1.$$

Обозначим через d_n наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$.

ЛЕММА 6. При целом неотрицательном α выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} R(\vec{s}; n + \alpha) = z^{-\alpha-1} \text{Le}_{\vec{s}}(z) + P(z^{-1}),$$

где $P(z) = \sum_{k=1}^{\alpha} q_k z^k$ и $d_{\alpha+1-k}^{w(\vec{s})} q_k \in \mathbb{Z}$ (в случае $\alpha = 0$ многочлен $P(z)$ отсутствует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть равенства через $L(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} z^{\alpha+1} L(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+\alpha} R(\vec{s}; n + \alpha) = \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) - \sum_{n=1}^{\alpha} z^n R(\vec{s}; n) = \text{Le}_{\vec{s}}(z) - \sum_{n=1}^{\alpha} R(\vec{s}; n) z^n. \end{aligned}$$

Осталось поделить обе части на $z^{\alpha+1}$ и заметить, что $d_n^{w(\vec{s})} R(\vec{s}; n) \in \mathbb{Z}$ и $q_k = R(\vec{s}; \alpha + 1 - k)$.

Далее будем обозначать через S конечное множество непустых векторов, и определим соответствующее ему множество $S_0 = S \cup \{\emptyset\}$. Через $\mathcal{A}$ будем обозначать конечный отрезок суммирования $[\alpha_1, \alpha_2]$ с целыми неотрицательными α_1, α_2 .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $R(x)$ такова, что для любого натурального n выполняется равенство

$$R(n) = \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} R(\vec{s}; n + \alpha), \quad A_{\vec{s}, \alpha} \in \mathbb{C}.$$

Тогда сумма $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) z^{n-1}$ представляется в виде $\sum_{\vec{s} \in S_0} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z)$, причем $\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq 1$ и для непустого вектора $\vec{s}$ имеем $P_{\vec{s}}(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} z^{\alpha+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} R(n) z^{n-1} = \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} R(\vec{s}; n + \alpha).$$

Применяя лемму 6, получим

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} (z^{-\alpha-1} \text{Le}_{\vec{s}}(z) + P_{\vec{s}, \alpha}(z^{-1})) \\ &= \sum_{\vec{s} \in S} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} z^{-\alpha-1} \right) \text{Le}_{\vec{s}}(z) + \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} P_{\vec{s}, \alpha}(z^{-1}). \end{aligned}$$

Неравенство $\text{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geq 1$ следует из леммы 6.

С помощью сравнения коэффициентов в степенных рядах при z^{n-1} , $n \geq 1$, показывается следующая лемма, обратная следствию.

ЛЕММА 7. Пусть сумма $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)z^{n-1}$ представляется в виде линейной комбинации $\sum_{\vec{s} \in S_0} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z)$, причем $\text{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geq 1$, а для вектора $\vec{s} \in S$ пусть $P_{\vec{s}}(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} z^{\alpha+1}$. Тогда для любого натурального n выполняется равенство

$$R(n) = \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} A_{\vec{s}, \alpha} R(\vec{s}; n + \alpha).$$

Леммы 6 и 7 позволяют работать не с бесконечными суммами, а с конечными, зависящими от натурального параметра.

Обозначим через $\mathcal{K}(\vec{T}, p, P)$ линейное пространство функций от n , натянутое на функции $R(\vec{s}; n + \alpha)$, где $\vec{s}$ подчинен вектору $\vec{T}$, и $p \leq \alpha \leq P$, а через $\mathcal{L}(\vec{T}, p, P)$ – его подпространство, содержащее векторы $\vec{s}$ с $s_j > 1$ при $j > 1$. Также обозначим через $\mathcal{K}_0$ подпространство $\mathcal{K}$ и через $\mathcal{L}_0$ – подпространство $\mathcal{L}$, для элементов которых при каждом $\vec{s} = (1, s_2, \dots)$ сумма коэффициентов по α равна нулю ($\mathcal{L}_0$ также будет подпространством $\mathcal{K}_0$).

ЛЕММА 8. Пусть $\alpha'' > \alpha' \geq 0$ – целые числа, а l, m'_1, m''_1, m_j – натуральные числа. Тогда функция

$$\frac{1}{(n + \alpha')^{m'_1}} R(m''_1, m_2, \dots, m_l; n + \alpha'')$$

принадлежит пространству $\mathcal{K}_0((\max(m'_1, m''_1), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$, а при $m_2, \dots, m_l > 1$ (при $l = 1$ считаем это условие выполненным автоматически) и пространству $\mathcal{L}_0((\max(m'_1, m''_1), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . Запишем разложение в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n + \alpha')^{m'_1} (n + \alpha'')^{m''_1}} = \sum_{t=1}^{m'_1} \frac{B_t}{(n + \alpha')^t} + \sum_{t=1}^{m''_1} \frac{C_t}{(n + \alpha'')^t}.$$

Имеет место равенство $B_1 + C_1 = 0$, обеспечивающее, в частности, базу индукции ($l = 1$). Пусть $l > 1$, и для $l - 1$ лемма верна. Обозначим левую часть доказываемого равенства через L . Имеем

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(n + \alpha')^{m'_1} (n + \alpha'')^{m''_1}} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\ &= \sum_{t=1}^{m'_1} \frac{B_t}{(n + \alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m''_1} \frac{C_t}{(n + \alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\ &= \sum_{t=1}^{m'_1} \frac{B_t}{(n + \alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha'} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m''_1} \frac{C_t}{(n + \alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\ &\quad + \sum_{t=1}^{m'_1} \frac{B_t}{(n + \alpha')^t} \sum_{k=n+\alpha'+1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t=1}^{m'_1} B_t R(t, m_2, \dots, m_l; n + \alpha') + \sum_{t=1}^{m''_1} C_t R(t, m_2, \dots, m_l; n + \alpha'') \\
 &\quad + \sum_{t=1}^{m'_1} \sum_{\gamma=\alpha'+1}^{\alpha''} \frac{B_t}{(n + \alpha')^t} R(m_2, \dots, m_l; n + \gamma).
 \end{aligned}$$

Слагаемые

$$\frac{B_t}{(n + \alpha')^t} R(m_2, \dots, m_l; n + \gamma)$$

принадлежат требуемому в утверждении леммы пространству по предположению индукции. Так как $B_1 + C_1 = 0$, выполнено

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=1}^{m'_1} B_t R(t, m_2, \dots, m_l; n + \alpha') + \sum_{t=1}^{m''_1} C_t R(t, m_2, \dots, m_l; n + \alpha'') \\
 &\in \mathcal{X}_0((\max(m'_1, m''_1), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha''),
 \end{aligned}$$

а при $m_2, \dots, m_l > 1$ это выражение также принадлежит пространству $\mathcal{L}_0((\max(m'_1, m''_1), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$, что и завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 9. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma$ – целые неотрицательные числа такие, что $\alpha_2 + \beta_1 \geq \alpha_1$; $u_1, u_2, \dots, u_l$ – натуральные числа. Тогда для любого натурального n_1 выполняется равенство

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2 + \alpha_2) \\
 &= R(u_1, u_2, \dots, u_l; n_1 + \alpha_1) - \frac{E}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} + f(n_1),
 \end{aligned}$$

где $f \in \mathcal{X}_0((u_1, u_2, \dots, u_l), \alpha_1, \alpha_2 + \beta_1)$ и константа E зависит только от $(u_2, \dots, u_l)$ и α_2 . Дополнительно, если $u_j > 1$ при $j > 2$, то $f \in \mathcal{L}_0((u_1, u_2, \dots, u_l), \alpha_1, \alpha_2 + \beta_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть доказываемого равенства может быть представлена в виде

$$L = \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2).$$

Учитывая неравенство $\alpha_2 + \beta_1 \geq \alpha_1$, имеем

$$\sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} = \sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha_1} + \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} - \sum_{n_2=1}^{\alpha_2}.$$

Если $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1$, то вторая сумма отсутствует (считаем ее равной нулю). Отсюда

$$\begin{aligned}
 L &= R(u_1, u_2, \dots, u_l; n_1 + \alpha_1) \\
 &\quad + \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2) - \frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2, \dots, u_l; n_2).
 \end{aligned}$$

Обозначим не зависящую от n_1 и α_1 константу $\sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2, \dots, u_l; n_2)$ через E . Остается заметить, что к слагаемым

$$\frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{u_1}} R(u_2, \dots, u_l; n_1 + \alpha'_1)$$

при $\alpha_1 + 1 \leq \alpha'_1 \leq \alpha_2 + \beta_1$ применима лемма 8. Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть β_j , $j = 1, \dots, l-1$, и $p_j \leq P_j$, T_j , $j = 1, \dots, l$, – целые неотрицательные числа, причем $p_{j+1} + \beta_j \geq P_j$ для любого $j = 1, \dots, l-1$; $R_1(x), \dots, R_l(x)$ – рациональные функции от x , причем $I(R_j) < 0$. Полюсы функций $R_j(x)$ сосредоточены в целых точках на отрезке $[-P_j, -p_j]$ и кратности полюсов не превосходят T_j . Тогда

$$S = R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1-1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\beta_{l-1}-1} R_l(n_l) \in \mathcal{K} \left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \right).$$

Если при этом $I(R_j) < -1$ при $j > 1$, то $S \in \mathcal{L}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. Дополнительно, если $I(R_1) < -1$, то $S \in \mathcal{L}_0(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . При $l = 1$ суммы по $n_2, \dots, n_l$ отсутствуют и утверждение леммы очевидно после разложения R_1 в сумму простых дробей. Пусть $l > 1$, и для $l-1$ лемма верна. Применим предположение индукции к выражению $f(n_2)$ в сумме

$$S = R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} f(n_2), \quad f \in \mathcal{K} \left((T_2, T_3, \dots, T_l), m_2, P_l + \sum_{j=2}^{l-1} \beta_j \right).$$

Покажем вначале, что S лежит в $\mathcal{K}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. В силу линейности достаточно доказать, что

$$\frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{t_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2) \in \mathcal{K} \left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \right),$$

где $p_1 \leq \alpha_1 \leq P_1$, $1 \leq t_1 \leq T_1$, $\vec{u} = (u_2, \dots, u_l)$ подчинен $(T_2, T_3, \dots, T_l)$, $p_2 \leq \alpha_2 \leq P_l + \sum_{j=2}^{l-1} \beta_j$. Это следует из леммы 9.

Пусть теперь $I(R_j) < -1$ при $j > 1$. Тогда по предположению индукции

$$f \in \mathcal{L}_0 \left((T_2, T_3, \dots, T_l), m_2, P_l + \sum_{j=2}^{l-1} \beta_j \right).$$

В качестве образующих $\mathcal{L}_0$ возьмем $R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2)$ с $u_j > 1$ и $R(\vec{u}; n_2 + \alpha'_2) - R(\vec{u}; n_2 + \alpha''_2)$ с $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$. При $u_j > 1$ по лемме 9

$$\frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{t_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2) \in \mathcal{L} \left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \right),$$

а если $t_1 > 1$, то также принадлежит $\mathcal{L}_0$. Пусть теперь $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$. Тогда по лемме 9

$$\frac{1}{(n_1 + \alpha_1)^{t_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} (R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2')) = \frac{E_{\vec{u}, \alpha_2'} - E_{\vec{u}, \alpha_2''}}{(n_1 + \alpha_1)^{t_1}} + g(n_1),$$

$$g \in \mathcal{L}_0\left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\right),$$

а следовательно, и все выражение лежит в $\mathcal{L}$, а при $t_1 > 1$ и в $\mathcal{L}_0$. Осталось доказать утверждение леммы при $I(R_1) < -1$. В этом случае вместо $R_1(x)$ мы можем рассматривать функции

$$\frac{1}{(x + \alpha_1)^{t_1}}, \quad t_1 > 1, \quad \text{и} \quad \frac{1}{x + \alpha_1''} - \frac{1}{x + \alpha_1'}.$$

Случай $t_1 > 1$ разобран выше. Аналогично показывается, что при $u_j > 1$

$$\left(\frac{1}{n_1 + \alpha_1''} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1'}\right) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2) \in \mathcal{L}_0\left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\right),$$

а при $u_2 = 1$ и $u_j > 1, j > 2$,

$$\left(\frac{1}{n_1 + \alpha_1''} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1'}\right) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} (R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2 + \alpha_2')) \in \mathcal{L}_0\left(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\right).$$

Лемма полностью доказана.

Перейдем теперь к представлению интеграла $S(z)$ (см. (4)) в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены неравенства $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j$ и $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0$ при всех $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1} + 1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, верно равенство $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \text{Le}_{\vec{s}}(z)$, где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, подчиненным $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$. Дополнительно, если $c_1 \leq q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leq q_j$ при $j = 2, \dots, l$, то в этих векторах $\vec{s}$ выполняется $s_j > 1$ при $j > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим интеграл в кратную сумму (см. лемму 2)

$$S(z) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{n_1} \dots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} z^{n_{l-1}} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^l \Gamma(c_j)} \times \frac{\prod_{j=1}^l [(n_j - n_{j+1} + 1)(n_j - n_{j+1} + 2) \dots (n_j - n_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(n_j + a_i - 1)(n_j + a_i) \dots (n_j + b_i - 2)]}, \quad n_{l+1} \equiv 1. \quad (14)$$

Заметим, что суммирование n_{j+1} можно вести не до n_j , а до $n_j + c_j - 1$, так как добавленные слагаемые равны нулю. Далее мы действуем так же, как и при доказательстве теоремы 2. Разложим числитель суммируемой функции в сумму мономов вида

$Z n_1^{X_1} n_2^{Y_1+X_2} n_3^{Y_2+X_3} \dots n_l^{Y_{l-1}+X_l}$, где $X_j + Y_j \leq c_j - 1$, $Y_l = 0$, $Z \in \mathbb{Z}$. Теперь при фиксированных X_j, Y_j рассмотрим сумму

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+c_1-1} R_2(n_2) \dots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+c_{l-1}-1} R_l(n_l), \quad (15)$$

где

$$R_j(n_j) = \frac{n_j^{Y_{j-1}+X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(n_j + a_i - 1)(n_j + a_i) \dots (n_j + b_i - 2)]}, \quad Y_0 = 0.$$

Рассмотрим вначале случай $c_1 \leq q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leq q_j$ при $j = 2, \dots, l$. В этом случае $I(R_1) \leq -1$ и $I(R_j) < -1$ при $j > 1$. Применим к сумме (15) лемму 10. При этом $\vec{T} = (r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$, $\beta_j = c_j - 1$,

$$m_j = \min_{r_{j-1}+1 \leq i \leq r_j} a_i - 1, \quad P_j = \max_{r_{j-1}+1 \leq i \leq r_j} b_i - 2,$$

и необходимые неравенства на p_j и P_j выполняются вследствие неравенств $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1} + 1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. Следовательно, сумма (15) лежит в $\mathcal{L}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. Для перехода к линейным формам от полилогарифмов воспользуемся леммой 6.

В более общем случае, при $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j$, сумма (15) является δ -суммой с неравенствами $p_{j+1} + \delta_j \geq P_j$ вследствие ограничений на параметры интеграла. С помощью леммы 5 представим (15) в виде линейной комбинации δ -сумм с $I(R_j) < 0$, в каждой из которых также выполнены неравенства $p_{j+1} + \delta_j \geq P_j$. Поэтому к ним можно применить лемму 10, причем вектор $\vec{T}$ в этих суммах подчинен $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$, а значит, сумма (15) принадлежит $\mathcal{H}((r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1}), p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. После этого применяем лемму 6.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 4. При $a_{i+1} + c_i - b_i \geq 0$ для $i = 1, \dots, l-1$ и $\sum_{i=1}^j (b_i - a_i - c_i) \geq 0$ для любого $j = 1, \dots, l$ справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^l x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_j)^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_l = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Le}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 5. Пусть

$$(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geq c_{j-1} + c_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad c_0 = 0, \\ a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0, \quad i_1 \in [2j-1, 2j], \quad i_2 \in [2j+1, 2j+2], \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Тогда справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{2j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l} \\ = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \text{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) > c_1$, то $T_k(1) = 0$ для любого $k = 1, \dots, l-1$.

Полагая в теореме $r_j = 2j - 1$ при $j = 1, \dots, l+1$, получим

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть

$$b_1 - a_1 \geq c_1, \quad (b_{2j-2} - a_{2j-2}) + (b_{2j-1} - a_{2j-1}) \geq c_{j-1} + c_j, \quad j = 2, \dots, l, \\ a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0, \quad i_1 \in [\max(1, 2j-2), 2j-1], \quad i_2 \in [2j, 2j+1], \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Тогда справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1} (1-zx_1x_2 \dots x_{2j-1})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l+1} \\ = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Le}_{1, \{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^l T_k(z^{-1}) \text{Le}_{\{2\}_k}(z).$$

С помощью этих следствий получим представления для интеграла $V(z)$ (обобщения интегралов $V_{m,n}$ в (1)). В следующей теореме рассмотрен случай четного m .

ТЕОРЕМА 4. Пусть параметры $A_i, i = 0, \dots, 2l, B_i, i = 1, \dots, 2l$, — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$B_i > A_i > 0 \quad \text{при всех } i, \quad B_i > A_{i-2} \quad \text{при четных } i, \\ A_3 \geq A_2, A_5 \geq A_4, \dots, A_{2l-1} \geq A_{2l-2}, \quad B_2 \geq B_1, B_4 \geq B_3, \dots, B_{2l-2} \geq B_{2l-3}, \\ A_2 + B_1 \geq A_0 + A_1, A_4 + B_3 \geq A_3 + B_2, \dots, A_{2l} + B_{2l-1} \geq A_{2l-1} + B_{2l-2}.$$

Тогда

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1} (1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \dots + zx_1x_2 \dots x_{2l})^{A_0}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l} \\ = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \text{Le}_{1, \{2\}_k}(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем равенство (см. [7, теорема 1] или [9, теорема])

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1} (1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \dots + zx_1x_2 \dots x_{2l})^{A_0}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l} \\ = \gamma \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l},$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l})}{\Gamma(A_0)} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(B_{2j} - A_{2j})}{\Gamma(B_{2j} - A_{2j-2})},$$

$a_i = A_i$ при нечетном i и $a_i = A_{i-2}$ при четном i . Далее применяем следствие 5.

Для разложения интегралов $V(z)$ при нечетном m воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

ЛЕММА 11. Пусть параметры $A_i, i = 0, \dots, 2l+1, B_i, i = 1, \dots, 2l+1$, – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} B_i > A_i > 0 \quad \text{при всех } i, \quad B_1 > A_0, \quad B_i > A_{i-2} \quad \text{при нечетных } i \geq 3, \\ A_2 \geq A_1, \quad A_4 \geq A_3, \dots, \quad A_{2l} \geq A_{2l-1}, \quad B_3 \geq B_2, \quad B_5 \geq B_4, \dots, \quad B_{2l-1} \geq B_{2l-2}, \\ A_1 \geq A_0, \quad A_3 + B_2 \geq A_2 + B_1, \quad A_5 + B_4 \geq A_4 + B_3, \dots, \quad A_{2l+1} + B_{2l} \geq A_{2l} + B_{2l-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1} (1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1} \\ = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^l T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем равенство (см. теорему из [9])

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1} (1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1} \\ = \gamma \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1} (1-zx_1x_2\cdots x_{2j-1})^{B_{2j-1}-A_{2j-1}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)} \frac{\Gamma(B_1-A_1)}{\Gamma(B_1-A_0)} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j+1})}{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j-1})},$$

$a_i = A_i$ при четном i , $a_1 = A_0$ и $a_i = A_{i-2}$ при нечетном $i \geq 3$. Далее применяем следствие 6.

Можно доказать аналоги лемм 8–10 и теоремы 3 для обобщенных полилогарифмов со строгими неравенствами $\operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)$. При этом вместо функции $R(\vec{s}; x)$ используется

$$\widehat{R}(s_1, s_2, \dots, s_l; x) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_l < x} \frac{1}{x^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}},$$

а неравенства $p_{j+1} + \beta_j \leq P_j$ заменяются на $p_j > P_j$. Так мы доказываем следующую теорему, которая является аналогом теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены неравенства $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j$ и $a_{i_1} \geq b_{i_2}$ при всех $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1} + 1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, верно равенство $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)$, где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, подчиненным $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$. Дополнительно, если $c_1 \leq q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leq q_j$ при $j = 2, \dots, l$, то в этих векторах $\vec{s}$ выполняется $s_j > 1$ при $j > 1$.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

СЛЕДСТВИЕ 7. При $b_1 > a_1 \geq b_2 > a_2 \geq \dots \geq b_l > a_l$ и $\sum_{i=1}^j (b_i - a_i - c_i) \geq 0$ для любого $j = 1, \dots, l$ справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^l x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_j)^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_l = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть

$$(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geq c_{j-1} + c_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad c_0 = 0, \\ a_{i_1} \geq b_{i_2}, \quad i_1 \in [2j-1, 2j], \quad i_2 \in [2j+1, 2j+2], \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Тогда справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \dots x_{2j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l} \\ = \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1, \{2\}_k}(z).$$

В частном случае эта аналитическая конструкция использовалась в [6].

Для дальнейшего нам потребуется теорема о поведении обобщенных полилогарифмов при преобразовании $z \mapsto -z/(1-z)$.

Пусть у нас есть вектор $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами. Сопоставим ему вектор $\vec{s}'$ по следующему правилу:

$$\vec{s}' = (\{1\}_{s_1-1}, 2, \{1\}_{s_2-2}, \dots, 2, \{1\}_{s_{l-1}-2}, 2, \{1\}_{s_l-1});$$

если $s_k = 1$ при некотором k , $1 < k < l$, то вместо ' $2, \{1\}_{s_k-2}$ ' следует писать ' $1+$ '.

Будем называть вектор $\vec{s}'$ *двойственным* к $\vec{s}$, так как из определения $\vec{s}'$ следует, что $(\vec{s}')' = \vec{s}$. Если $\vec{s} \neq (1)$, то один и только один из двойственных векторов начинается с единицы, а их веса равны. Е. А. Уланский подсказал следующее определение двойственного вектора. Сопоставим вектору $\vec{s}$ слово $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_k-1} x_1 = v x_1$. Пусть σ — отображение, действующее на таких словах и меняющее буквы x_0 и x_1 между собой. Тогда двойственный вектор $\vec{s}'$ соответствует слову $\sigma(v) x_1$. Далее нам понадобятся следующие пары двойственных векторов: $(1, \{2\}_k) \leftrightarrow (\{2\}_k, 1)$ и $(\{2\}_k) \leftrightarrow (1, \{2\}_{k-1}, 1)$.

ЛЕММА 12 (о двойственности). Пусть $|z| < 1$ и $|z| < |1-z|$. Тогда выполняется равенство

$$\operatorname{Le}_{\vec{s}}\left(-\frac{z}{1-z}\right) = -\operatorname{Le}_{\vec{s}'}(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $z = 0$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем $z \neq 0$. Воспользуемся интегральным представлением $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$ из леммы 3:

$$\text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(z) = z \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1 x_2 \cdots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \cdots + s_j$, $m = r_l$. Преобразуем интеграл с помощью теоремы из [9] для $a_i = 1$, $b_i = 2$:

$$\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1 x_2 \cdots x_{r_j})} = \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{1 - zQ_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m)}, \quad (16)$$

где

$$Q_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 \cdots x_{r_1-1} - x_1 \cdots x_{r_1} + \cdots + x_1 \cdots x_{r_l-1} - x_1 \cdots x_{r_l}.$$

Подставим вместо z в равенство (16) дробь $-z/(1-z)$:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{1 + zQ_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m)/(1-z)} &= (1-z) \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{1 - z + zQ_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m)} \\ &= (1-z) \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{1 - zQ'_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $Q'_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - Q_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Сделаем в последнем интеграле замену $x_m \mapsto 1 - x_m$ и заметим, что

$$\begin{aligned} Q'_{\vec{s}}(x_1, x_2, \dots, 1 - x_m) &= x_1 \cdots x_{r'_1-1} - x_1 \cdots x_{r'_1} + \cdots + x_1 \cdots x_{r'_{l'}-1} - x_1 \cdots x_{r'_{l'}} \\ &= Q_{\vec{s}'}(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

соответствует вектору $\vec{s}'$ (собственно это и мотивирует его определение). Здесь мы использовали обозначения $l' = \ell(\vec{s}')$ и $r'_j = s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_j$. Снова сворачивая интеграл (после замены) в правой части (17) по тождеству из [9], запишем равенство (17) на языке полилогарифмов:

$$\frac{\text{Le}_{\vec{s}}(-z/(1-z))}{-z/(1-z)} = (1-z) \frac{\text{Le}_{\vec{s}'}(z)}{z},$$

что равносильно утверждению теоремы.

Используя лемму 11 и преобразование $z \mapsto -z/(1-z)$, можно доказать следующую теорему, дающую разложение $V(z)$ при нечетном m .

ТЕОРЕМА 6. Пусть параметры A_i , $i = 0, \dots, 2l+1$, B_i , $i = 1, \dots, 2l+1$, — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам леммы 11 и, дополнительно, $B_{2j} > A_{2j-2}$ при $j = 1, \dots, l$, $B_{2l+1} > A_{2l}$ и $\sum_{j=1}^{l+1} (B_{2j-1} - A_{2j-1}) \geq A_0$. Тогда

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1} (1-x_i)^{B_i-A_i-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1}}{(1 - zx_1 + zx_1 x_2 - zx_1 x_2 x_3 + \cdots - zx_1 x_2 \cdots x_{2l+1})^{A_0}} \\ &= \sum_{k=0}^l P_k(z^{-1}) \text{Le}_{\{2\}_k, 1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \text{Le}_{1, \{2\}_k, 1}(z) + U(z^{-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B_i > A_i > 0$ при всех i , а также $B_{2j} > A_{2j-2}$ при $j = 1, \dots, l$ и $B_{2l+1} > A_{2l}$, то (см. [7, теорема 2] или [9, теорема])

$$I(z) = \gamma \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{B_i-a_i-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2 \cdots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}} (1-zx_1x_2 \cdots x_{2l+1})^{A_{2l+1}}},$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)} \frac{\Gamma(B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(B_{2l+1}-A_{2l})} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(B_{2j}-A_{2j})}{\Gamma(B_{2j}-A_{2j-2})},$$

$a_i = A_i$ при нечетном $i < 2l$, $a_{2l+1} = A_{2l}$ и $a_i = A_{i-2}$ при четном i . Проверим теперь условие $c_1 + \dots + c_k \leq q_1 + \dots + q_k$ при $k = 1, \dots, l+1$ для интеграла в правой части, которое дает разложение в линейную форму от полилогарифмов по теореме 2. При $k = 1, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned} (q_1 + \dots + q_k) - (c_1 + \dots + c_k) &= \sum_{j=1}^k (B_j - A_{j-1}) - \sum_{j=1}^k (B_{2j} - A_{2j}) \\ &= (A_{2k} - A_{2k-1}) + (B_1 - A_0) + \sum_{j=2}^k (B_{2k-1} - A_{2k-3}) > 0 \end{aligned}$$

(в оценке использовались неравенства на параметры A_i, B_i из условия леммы 11). При $k = 2l+1$

$$(q_1 + \dots + q_{2l+1}) - (c_1 + \dots + c_{2l+1}) = \sum_{j=1}^{l+1} (B_{2j-1} - A_{2j-1}) - A_0 \geq 0.$$

Обозначим интеграл, фигурирующий в лемме 11, через $J(z)$. Имеем равенство

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} J\left(\frac{-z}{1-z}\right) \\ &= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} \left(\sum_{k=0}^l P_k \left(-\frac{1-z}{z} \right) \text{Le}_{1, \{2\}_k} \left(\frac{-z}{1-z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^l T_k \left(-\frac{1-z}{z} \right) \text{Le}_{\{2\}_k} \left(\frac{-z}{1-z} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^l \tilde{P}_k(z) \text{Le}_{\{2\}_k, 1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{T}_k(z) \text{Le}_{1, \{2\}_k, 1}(z) + \tilde{U}(z), \end{aligned}$$

где $\tilde{P}_k(z), \tilde{T}_k(z), \tilde{U}(z)$ – рациональные функции. В последнем равенстве мы использовали лемму 12 для пар векторов $(1, \{2\}_k) \leftrightarrow (\{2\}_{k-1}, 1)$ и $(\{2\}_k) \leftrightarrow (1, \{2\}_{k-1}, 1)$ (мы считаем, что $\text{Le}_{\emptyset}(z) = 1$ и $T_0(z)$ дает слагаемое $\tilde{U}(z)$). Сравнивая с разложением

$I(z) = \sum_{\mathcal{S}} P_{\mathcal{S}}(z^{-1}) \text{Le}_{\mathcal{S}}(z)$ и учитывая линейную независимость обобщенных полилогарифмов над $\mathbb{C}(z)$, заключаем, что функции $\tilde{P}_k(z)$, $\tilde{T}_k(z)$, $\tilde{U}(z)$ в действительности являются многочленами от аргумента z^{-1} . В промежуточных выкладках предполагается, что z находится в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z| < |1 - z|\}$. Но в конечном равенстве, с помощью аналитического продолжения, можно считать, что $|z| < 1$. Теорема доказана.

Из равенств $\text{Le}_{\{2\}_k}(1) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ и $\text{Le}_{\{2\}_{k,1}}(1) = 2\zeta(2k + 1)$ (см. [13] и [7]) следует, что в условиях теорем 4 и 6 интегралы $V_m(1)$ могут быть представлены в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$ с рациональными коэффициентами, где натуральные k имеют ту же четность, что и m . С помощью теоремы 6 и теоремы 2 из [7] показывается разложение интеграла из [5].

Автор выражает благодарность чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко за помощь, оказанную при написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272.
- [2] Василенко О. Н. Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках // Республиканская научно-теоретическая конференция “Теория чисел и ее приложения” (Ташкент, 26–28 сентября 1990 г.). Тезисы докл. Ташкент: Ташкентский госпединститут, 1990. С. 27.
- [3] Vasilyev D. V. On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers // Preprint № 1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.
- [4] Зудилин В. В. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 177–178.
- [5] Сорокин В. Н. Теорема Аперы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–52.
- [6] Сорокин В. Н. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.
- [7] Злобин С. А. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.
- [8] Fischler S. Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2002. V. 335. P. 1–4.
- [9] Злобин С. А. О некоторых интегральных тождествах // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 153–154.
- [10] Hoang Ngoc Minh, Petitot M., Van Der Hoeven J. Shuffle algebra and polylogarithms // Discrete Math. 2000. V. 225. № 1–3. P. 217–230.
- [11] Уланский Е. А. Тождества для обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 613–624.
- [12] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [13] Васильев Д. В. Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 1. С. 81–84.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

08.12.2003

Исправленный вариант

13.10.2004