Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин, О распределении по модулю 1 субэкспоненциальных последовательностей, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 803–813

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:43:52

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО МОДУЛЮ 1 СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мошевитин

Получены результаты о существовании вещественных чисел, плохо приближаемых рациональными дробями, знаменатели которых образуют сублакунарную последовательность. Например, если рассмотреть последовательность s_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, получающуюся из чисел вида $2^i 3^j$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$, в результате упорядочивания их по абсолютной величине, то доказывается, что множество вещественных чисел α , для которых выполнено $\inf_{n \in \mathbb{N}} n \|s_n \alpha\| > 0$, имеет размерность Хаусдорфа равную единице (мера Лебега множества таких чисел равна нулю в силу расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть $\psi(x)$ – положительнозначная функция натурального аргумента x , монотонно убывающая к нулю при $x \rightarrow \infty$, $Q = (t_n)_{n=1}^{\infty}$ – некоторая достаточно быстро растущая последовательность положительных (целых) чисел, α – некоторое вещественное число и $\| \cdot \|$ – расстояние до ближайшего целого. В настоящей работе исследуется разрешимость в натуральных n диофантова неравенства

$$\|t_n \alpha\| < \psi(n). \quad (1)$$

Через $\text{ND}(Q)$ обозначим множество таких вещественных α , для которых последовательность дробных долей $\{t_n \alpha\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, не всюду плотна на отрезке $[0, 1]$. Через $\text{HD}(P)$ мы будем обозначать хаусдорфову размерность множества P действительных чисел.

Эрдеш в работе [1] поставил следующий вопрос: верно ли, что если $Q = \{t_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ – последовательность натуральных чисел, для которой при всех натуральных n выполняется условие

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geq \lambda > 1 \quad (2)$$

(такого вида последовательности называются *лакунарными*), то $\text{ND}(Q) \neq \mathbb{Q}$? Положительный ответ на этот вопрос был дан де Матаном [2] и Поллингтоном [3]. Они доказали, что если Q – последовательность неотрицательных действительных чисел такая,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00912, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ № МД-3321.2004.1 и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

что выполняется (2), то $\text{HD}(\text{ND}(Q)) = 1$. Отметим, что Бошерницан в работе [4] доказал, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1,$$

то $\text{HD}(\text{ND}(Q)) = 0$.

В настоящей работе мы получили результаты о неразрешимости в натуральных n неравенства (1) для лакунарных последовательностей $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ субэкспоненциального роста, аналогичные теоремам де Матана–Поллингтона. В частности, наши результаты оказываются применимыми для последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, состоящей из всех чисел вида $2^n 3^m$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$.

Прежде, чем переходить к формулировке доказанных нами теорем, сделаем несколько замечаний о метрических результатах касающихся того случая, когда t_n являются целыми числами.

Общеизвестно (см. [5]), что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ сходится, то для почти всех (в смысле меры Лебега) α существует положительная константа $K(\alpha)$ такая, что при всех n будет выполняться

$$\|t_n \alpha\| \geq K(\alpha) \psi(n).$$

С другой стороны, в случае расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ типичной является ситуация, когда неравенство (1) для почти всех α имеет бесконечно много решений в натуральных n . Пр процитируем результат Касселса из работы [5]. Напомним, что возрастающая последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ целых чисел называется Σ -последовательностью, если, обозначая через μ_n количество дробей вида j/t_n , $0 < j < t_n$, не представимых в виде i/t_q с натуральным i и $q < n$, имеет место соотношение

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \frac{\mu_n}{t_n} > 0. \quad (3)$$

Теорема Касселса [5] утверждает, что если $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ является Σ -последовательностью, то в случае расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ неравенство (1) имеет для почти всех α бесконечно много решений в натуральных n .

Отметим, что, как показали Даффин и Шеффер [6], в случае расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)$ неравенство (1) имеет для почти всех α бесконечно много решений в натуральных n не для всякой целочисленной последовательности $(t_n)_{n=1}^{\infty}$. Примеры последовательностей, не являющихся Σ -последовательностями, были построены Касселсом в той же работе [5]. Отметим, что из результатов работы Левека [7] следует, что всякая лакунарная последовательность является Σ -последовательностью.

2. Общие теоремы. Пусть $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ – некоторая (необязательно монотонно возрастающая) последовательность вещественных положительных чисел. Рассмотрим последовательность $(k_r)_{r=0}^{\infty}$ натуральных чисел такую, что $k_0 = 1$, и для нее определим последовательность $(n_r)_{r=0}^{\infty}$, положив $n_r = k_0 + \dots + k_r$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть N_r , $r \in \mathbb{N}$, – последовательность некоторых натуральных чисел и $\Delta_0 > \Delta_1 > \dots > \Delta_r > \Delta_{r+1} > \dots$ – последовательность вещественных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Мы будем рассматривать следующее соотношение:

$$\Delta_r - 2 \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \frac{\psi(n)}{t_n} - 2\Delta_r \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \psi(n) \geq \Delta_{r+1} \left(k_{r+1} + N_{r+1} + \Delta_r \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} t_n \right). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть для последовательности положительных вещественных чисел $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ найдась последовательность натуральных чисел $(k_r)_{r=0}^{\infty}$ и последовательность вещественных чисел $(\Delta_r)_{r=0}^{\infty}$ такие, что (4) выполнено с $N_r = 1$ для всех r . Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для последовательности положительных вещественных чисел $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ найдась последовательность натуральных чисел $(k_r)_{r=0}^{\infty}$ и последовательность вещественных чисел $(\Delta_r)_{r=0}^{\infty}$ такие, что (4) выполнено с $N_r = 2$ для всех r . Тогда существует несчетное множество $\mathcal{A}_\psi \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого $\alpha \in \mathcal{A}_\psi$ выполняется

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < v_0 < 1$ и для последовательности положительных вещественных чисел $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ найдась последовательность натуральных чисел $(k_r)_{r=0}^{\infty}$ и последовательность вещественных чисел $(\Delta_r)_{r=0}^{\infty}$ такие, что (4) выполнено с

$$N_{r+1} = \left\lceil \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} \right)^{v_0} \right\rceil, \quad (6)$$

и пусть ряд

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_r} \Delta_r^{v_0-v} \quad (7)$$

сходится при всех $0 < v < v_0$.

Тогда существует множество $\mathcal{A}_\psi \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого $\alpha \in \mathcal{A}_\psi$ выполняется

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

причем $\text{HD}(\mathcal{A}_\psi) \geq v_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо условия (4) удобно использовать соотношения

$$8 \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \frac{\psi(n)}{t_n} \leq \Delta_r, \quad (8)$$

$$8 \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \psi(n) \leq 1, \quad (9)$$

$$4\Delta_{r+1}(k_{r+1} + N_{r+1}) \leq \Delta_r, \quad (10)$$

$$4\Delta_{r+1} \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} t_n \leq 1, \quad (11)$$

из которых условие (4) очевидно следует.

В следующих двух пунктах мы рассмотрим примеры и следствия, а доказательства теорем 1–3 будут приведены в п. 5.

3. Основное следствие. Мы будем рассматривать последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ положительных вещественных чисел, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Для таких последовательностей мы будем выбирать параметры следующим образом. Пусть $0 \leq v_0 \leq 1$ и $W = W(v_0) = 16^{1/(1-v_0)}$. Определим величины k_r индуктивным образом. Пусть $k_0 = 1$ и $k_0, \dots, k_r$ уже определены. Теперь, в силу (12) существует

$$k_{r+1} = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{\sum_{n=n_r}^{n_r+k-1} t_n}{\sum_{n=n_r-1}^{n_r-1} t_n} \geq Wk \right\}, \quad n_r = k_0 + \dots + k_r. \quad (13)$$

Последовательность величин k_r и соответствующие им величины $n_r = \sum_{j=0}^r k_j$ определены. Отметим, что последовательности $(n_r)_{r=0}^{\infty}$ и $(k_r)_{r=0}^{\infty}$ зависят от выбора v_0 .

Пусть

$$\nu_{r+1} = \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} t_n. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \geq Wk_{r+1}. \quad (15)$$

Далее, положим

$$\omega_{r+1} = \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \frac{1}{t_n}. \quad (16)$$

Определим также функцию $\psi_v^*(n)$ постоянной на интервале $[n_r, n_{r+1})$, положив

$$\psi_v^*(n) = \min \left\{ \frac{1}{32\omega_{r+1}\nu_r}, \frac{1}{8k_{r+1}} \right\} \quad \text{при } n_r \leq n < n_{r+1}. \quad (17)$$

Пусть также

$$\Delta_r = \frac{1}{4\nu_r} \quad \forall r \quad (18)$$

Следствием теорем 1–3 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть последовательность вещественных чисел $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (12). Тогда

1) существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi_0^*(n) \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

2) если, к тому же, при некотором $v_0 \in (0, 1)$ выполнено условие теоремы 3 о сходимости ряда (7) при всех $v \in (0, v_0)$, где Δ_r определена по формуле (18), то множество $\mathcal{A}_{v_0}$ тех чисел α , для которых при всех натуральных n выполнено

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi_{v_0}^*(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

имеет хаусдорфову размерность $\text{HD}(\mathcal{A}_{v_0}) \geq v_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для доказательства пункта 1) теоремы 4 положим $v = 0$ и проверим выполнение условий (8)–(11). Действительно, (8) следует из определение (17) функции ψ_0^* , определения величины Δ_r и равенства (16).

Далее, (9) следует из определения (17) функции ψ_v^* .

Соотношение (10) следует из того, что

$$\frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} = \frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \geq 16k_{r+1}. \quad (19)$$

Соотношение (11) вытекает из равенства (14).

Пункт 1) доказан.

Для доказательства пункта 2) при заданном v_0 снова рассмотрим величины Δ_r , определенные согласно (18). Тогда условия (8), (9), (11) выполнены по аналогичным причинам, а для проверки условия (10) надо воспользоваться выбором параметра $W(v_0)$ равенством (6), неравенствами (19) и

$$\frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} = \frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \geq 8 \left(\frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \right)^{v_0}.$$

Пункт 2) доказан.

4. Примеры. Если (надлежащим образом выбрав параметры) применить нашу теорему 4 к лакунарной последовательности $(t_n)_{n=1}^\infty$, то получится результат де Матана–Поллингтона. Более того, в случае, когда лакунарная последовательность t_n удовлетворяет условию

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{1}{d},$$

достаточно оптимальный выбор параметров в нашей теореме 1 обеспечивает существование α такого, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|t_n \alpha\| \geq \frac{1}{2^7 d^2}.$$

Этот результат доказан авторами в [8]. Он точнее, упомянутого результата де Матана–Поллингтона [2], [3]. Более того, этот результат точнее, чем недавний результат Кашнельсона [9], утверждающий существование α такого, что

$$\|t_n \alpha\| \geq \frac{\gamma}{d^2 \ln^2 d} \quad \forall n$$

с некоторым положительным γ . Отметим, что подобного рода результаты нашли свое применение при оценке хроматических чисел некоторых дистанционных графов на вещественной прямой (см. [8]–[10]).

Основной интерес представляет применение наших теорем к последовательностям субэкспоненциального роста. Отметим, что если целочисленная последовательность $(t_n)_{n=1}^\infty$ растет медленнее, чем $\exp(n^\beta)$, $\beta < 1/2$, то применение теорем 1–4 дает тривиальный результат – при оптимальном выборе параметров ряд $\sum_{n=1}^\infty \psi(n)$ будет сходиться и согласно упомянутой выше метрической теореме неравенство (5) будет асимптотически выполняться для почти всех α .

Приведем несколько примеров когда наши теоремы дают нетривиальные следствия. Наибольший интерес представляет пример 2, поэтому в примерах 1 и 3 мы даем лишь формулировки, а в примере 2 имеются некоторые выкладки.

ПРИМЕР 1 (сублакунарные последовательности). Если последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{c}{n^\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \quad c > 0, \quad (20)$$

то применение теоремы 4 дает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для последовательности $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (20), существует множество $\mathcal{A}$ действительных чисел хаусдорфовой размерности $\text{HD}(\mathcal{A}) = 1$ такое, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ с некоторой положительной постоянной $\gamma = \gamma(\alpha)$ при любом натуральном n выполнено неравенство

$$\|t_n \alpha\| \geq \frac{\gamma}{n^{2\beta}}.$$

ПРИМЕР 2 (последовательность $\{2^n 3^m \alpha\}$). Рассмотрим множество натуральных чисел вида $2^n 3^m$, и пусть последовательность

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 4, \quad s_5 = 6, \quad \dots$$

представляет собой это множество, упорядоченное в порядке возрастания чисел. Фюрстенберг [11] (см. также [12]) доказал, что для иррационального α множество дробных долей $\{2^n 3^m \alpha\}$ на отрезке $[0, 1]$ всюду плотно и, стало быть,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|s_n \alpha\| = 0.$$

Отметим, что о характере стремления величины $\|s_n \alpha\|$ к нулю в настоящее время удовлетворительных результатов нет.

Внутри прямоугольного треугольника

$$k, m \geq 0, \quad k \ln 2 + m \ln 3 \leq \ln s_n$$

ровно n целых точек, одна из которых лежит на прямой $x \ln 2 + y \ln 3 = \ln s_n$. Следовательно,

$$\frac{\ln^2(6s_n)}{2 \ln 2 \ln 3} \geq n \geq \frac{\ln^2 s_n}{2 \ln 2 \ln 3},$$

откуда сразу получаются оценки

$$\frac{e^{\eta \sqrt{n}}}{6} \leq s_n \leq e^{\eta \sqrt{n}}, \quad \text{где } \eta = \sqrt{2 \ln 2 \ln 3} = 1.2340 \dots \quad (21)$$

Нам хватит этих грубых оценок для s_n . На самом деле, с помощью оценок линейных форм от логарифмов алгебраических чисел для s_n получаются более точные оценки (см. [13], [14]).

Из теоремы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\gamma \leq \gamma_0 = 2^{-14}$. Тогда существует множество $\mathcal{A}_\gamma$ хаусдорфовой размерности

$$\text{HD}(\mathcal{A}_\gamma) \geq v_0 = 1 - \frac{4}{\log_2(1/\gamma) - 10}$$

такое, что для любого $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ при любом натуральном n выполнено неравенство

$$\|s_n \alpha\| \geq \frac{\gamma}{n}.$$

Видно, что $\text{HD}(A_\gamma) \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow 0$, так что $\text{HD}(\bigcup_{\gamma>0} A_\gamma) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что последовательность $(s_n)_{n=1}^\infty$ является Σ -последовательностью (действительно, в данном случае $\mu_n \geq s_n/6$ и (3) выполнено) и, поскольку ряд $\sum_{n=2}^\infty (1/n)$ расходится, то при любом положительном γ для почти всех α неравенство

$$\|s_n \alpha\| \leq \frac{\gamma}{n}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных n . Таким образом, множества, существование которых обеспечивается следствием 2, имеют меру нуль.

Заметим также, что, применяя упомянутые выше (достаточно сложные) оценки снизу линейных форм от алгебраических чисел, нетрудно доказать, что последовательность величин s_n удовлетворяет условию (20) с $\beta = 1/2$, однако ниже мы выводим наше следствие 2 из теоремы 4, не используя этих сложных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Проверим, что выполняются условия пункта 2) теоремы 4. Последовательность $(s_n)_{n=1}^\infty$ в силу (21) очевидно удовлетворяет условию (12).

Проверим условие сходимости ряда (7) при всех $v \in (0, v_0)$, где Δ_r определена по формуле (18).

Действительно, $n_r = \sum_{j=0}^r k_j \geq r$. Так как $s_{n+1} \leq 2s_n$, то в силу (13) выполнены неравенства

$$Wk_{r+1} \leq \frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \leq 3Wk_{r+1}.$$

Таким образом, сходимость ряда (7) следует из сходимости ряда

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{r}{e^{(v_0-v)\eta\sqrt{r}}}$$

при $0 < v < v_0$.

Итак, условия теоремы 4 проверены. Применение теоремы 4 дает существование множества $\mathcal{A}_{v_0}$ вещественных чисел α хаусдорфовой размерности $\text{HD}(\mathcal{A}_{v_0}) \geq v_0$, для которых при всех натуральных n выполнено неравенство

$$\|t_n \alpha\| \geq \psi_{v_0}^*(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

При определении константы $W(v_0)$ положим

$$v_0 = 1 - \frac{4}{\log_2(1/\gamma) - 10}.$$

Осталось только доказать, что при $n_r \leq n < n_{r+1}$ выполнено неравенство

$$\psi_{v_0}^*(n) = \min \left\{ \frac{1}{32\omega_{r+1}\nu_r}, \frac{1}{8k_{r+1}} \right\} \geq \frac{\gamma}{n}, \quad (22)$$

где $\gamma = 1/(2^{10}W) = 2^{-10-4/(1-v_0)}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega_{r+1} &= \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \frac{1}{s_n} \leq 2 \sum_{n=n_r+1}^{\infty} \frac{1}{s_n} \leq 12 \int_{n_r}^{\infty} \exp(-\eta\sqrt{x}) dx \leq 20 \frac{\sqrt{n_r}}{s_{n_r}}, \\ \frac{1}{20 s_{n_{r+1}} \sqrt{n_{r+1}}} &\leq \frac{1}{4} \int_1^{n_{r+1}-1} \exp(\eta\sqrt{x}) dx \leq \nu_{r+1} = \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} s_n \\ &\leq \int_{n_r}^{n_{r+1}} \exp(\eta\sqrt{x}) dx \leq 20 s_{n_{r+1}} \sqrt{n_{r+1}}. \end{aligned}$$

(Оценка снизу следует из того, что в силу (15))

$$\nu_{r+1} - \sum_{j=1}^r \nu_j \geq \nu_{r+1} \left(1 - \sum_{j=1}^r \frac{1}{W^j} \right),$$

а $W = W(v_0) \geq 16$.)

Далее, в силу (21) выполнены неравенства

$$\frac{1}{2400} \exp(\eta\sqrt{n_r + k_{r+1}} - \eta\sqrt{n_r}) \leq \frac{1}{400} \frac{s_{n_{r+1}}}{s_{n_r}} \leq \frac{\nu_{r+1}}{\nu_r} \leq 3Wk_{r+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$k_{r+1} \leq 20 W n_r.$$

Теперь из полученных оценок параметров сразу следует неравенство (22) для величины $\psi_{v_0}^*(n)$.

Следствие доказано.

ПРИМЕР 3. Теоремы 1–4 могут давать нетривиальные следствия не только для сублакунарных последовательностей. Например, пусть последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$t_n \asymp \exp(\eta n^{1-\beta}), \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \quad \eta > 0. \quad (23)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для последовательности (23) существует множество $\mathcal{A}$ действительных чисел хаусдорфовой размерности $\text{HD}(\mathcal{A}) = 1$ такое, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ с некоторой положительной постоянной $\gamma = \gamma(\alpha)$ при любом натуральном n выполнено неравенство

$$\|t_n \alpha\| \geq \frac{\gamma}{n^{2\beta}}.$$

Если же последовательность t_n удовлетворяет, например, условию

$$t_n \asymp \exp\left(\frac{\eta n}{\ln n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta > 0, \quad (24)$$

то легко обеспечить существование множества $\mathcal{A}$ действительных чисел хаусдорфовой размерности $\text{HD}(\mathcal{A}) = 1$ такого, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ с некоторой положительной постоянной $\gamma = \gamma(\alpha)$ при любом натуральном n выполнено неравенство

$$\|t_n \alpha\| \geq \frac{\gamma}{\ln^2 n}.$$

5. Доказательства теорем 1, 2 и 3.

ЛЕММА. Пусть $k, N \in \mathbb{N}$. И пусть множество D есть объединение не более, чем $k+1$ непересекающихся отрезков суммарной длины σ . Тогда в множестве D найдутся N отрезков длины $\sigma/(k+N)$ с непересекающимися внутренностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_D(x)$ – характеристическая функция множества D . Выберем числа a_i, b_i , $i = 1, 2, \dots, k+N$, следующим образом:

$$a_1 = \inf_{a \in D} a, \\ b_i = \inf \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \int_{a_i}^b \chi_D(x) dx = \frac{\sigma}{k+N} \right\}, \quad a_i = \sup \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \int_{b_{i-1}}^a \chi_D(x) dx = 0 \right\}.$$

Рассмотрим теперь отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, k+N$. Длина такого отрезка равна $\sigma/(k+N)$ тогда и только тогда, когда этот отрезок содержится в множестве D , т.е. пересекается не более, чем с одним из отрезков множества D . Предположим, что есть $k+1$ отрезков длины большей, чем $\sigma/(k+N)$. Тогда количество отрезков в множестве D должно быть $k+2$. Противоречие. Значит, отрезков $[a_i, b_i]$ длины $\sigma/(k+N)$ (т.е. содержащихся в множестве D) как минимум $N+k-k=N$.

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 мы будем применять лемму с $N=1$, для доказательства теоремы 2 – с $N=2$, а для доказательства теоремы 3 мы будем применять лемму с различными значениями N .

Мы построим индуктивным образом систему вложенных стягивающихся отрезков $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_r \supset \dots$ такую, чтобы были выполнены два условия:

- а) отрезок I_r имеет длину $|I_r| = \Delta_r$;
- б) для любого $x \in I_r$ при $n < n_r$ выполнено $\|t_n x\| \geq \psi(n)$.

Тогда число $\alpha \in \bigcap_r I_r$ будет обладать требуемыми свойствами.

Очевидно, отрезок I_0 выбрать можно. Опишем индуктивную процедуру построения отрезка I_{r+1} , если уже построены отрезки $I_0, \dots, I_r$, удовлетворяющие условиям а) и б). Рассмотрим множества

$$T_n = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z - \psi(n)}{t_n}, \frac{z + \psi(n)}{t_n} \right), \quad n_r \leq n < n_{r+1},$$

и пусть $T = \bigcup_{n_r \leq n < n_{r+1}} T_n$.

Так как $|I_r| = \Delta_r$, то при фиксированном n отрезок I_r может пересекать не более чем

$$\tau_r = 1 + \lfloor 2\psi(n) + t_n \Delta_r \rfloor$$

интервалов из множества T_n , причем интервалов из множества T_n , лежащих внутри отрезка I_r , будет $\leq 1 + t_n \Delta_r$. Следовательно, множество $D_r = \Delta_r \setminus T$ представляет собою объединение не более чем

$$H_r \leq 1 + \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} (1 + \Delta_r t_n) = 1 + k_{r+1} + \Delta_r \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} t_n,$$

непересекающихся отрезков суммарной длины

$$\sigma_r \geq \Delta_r - 2 \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \frac{\psi(n)}{t_n} - 2\Delta_r \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} \psi(n).$$

Но согласно условиям доказываемых теорем выполнено соотношение (4) и, применяя лемму с $D = D_r$, $\sigma = \sigma_r$, $k = k_{r+1}$ и $N = N_{r+1}$, где последняя величина выбрана в соответствии с условием доказываемой теоремы, получаем, что в множестве D_r найдутся N_{r+1} отрезков, с непересекающимися внутренностями, длины $\sigma_r / (H_r + N_{r+1} - 1)$. Выберем любой из полученных отрезков. Пусть это будет отрезок I'_{r+1} .

Далее, выберем отрезок $I_{r+1} \subset I'_{r+1} \subset D_r \subset I_r$ так, что $|I_{r+1}| = \Delta_{r+1}$. Это сделать можно в силу выполнения условия (4). Итак, построение отрезка I_{r+1} завершено.

Свойства а) и б) выполнены по построению.

Континуальность множества $\mathcal{A}_\psi$ в теореме 2 достигается за счет свободы выбора одного из двух отрезков на каждом шаге.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Для доказательства теоремы 3 положим

$$A_r = \sqcup I_r, \quad A = A_\psi = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r, \quad R_r = \prod_{i=1}^r N_i \geq \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_r} \right)^{v_0}.$$

Из условия теоремы следует, что ряд

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_r} (R_r (\Delta_r)^v)^{-1} \ll \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_r} \Delta_r^{v_0-v}$$

сходится при $0 < v < v_0$. Для завершения доказательства теоремы 3 остается применить следующий известный результат Эгглестона.

ТЕОРЕМА (см. [15]). Пусть $A_k = \bigsqcup_{i=1}^{R_k} I_k(i)$, где $I_k(i)$ – интервал длины $|I_k(i)| = \Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$. И пусть каждый интервал $I_k(i)$ содержит в точности $N_{k+1} > 1$ дизъюнктивных интервалов (длины Δ_{k+1}) из множества A_{k+1} (при этом $R_{k+1} = R_k \cdot N_{k+1}$). Предположим, что $0 < v_0 \leq 1$ и что при любом $0 < v < v_0$ сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} (R_k (\Delta_k)^v)^{-1}.$$

Тогда множество $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ имеет хаусдорфову размерность $\text{HD}(A) \geq v_0$.

Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе результаты немного сильнее теорем, анонсированных первым автором в [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Erdős P. Repartition Modulo 1. Lecture Notes in Math. V. 475. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [2] de Mathan D. Numbers contravening a condition in density modulo 1 // Acta Math. Hungar. 1980. V. 36. P. 237–241.
- [3] Pollington A. D. On the density of sequence $\{n_k \theta\}$ // Illinois J. Math. 1979. V. 23. P. 511–702.
- [4] Boshernitzan M. Density modulo 1 of dilations of sublacunary sequences // Adv. in Math. 1994. V. 108. P. 104–117.
- [5] Cassels J. W. S. Some metrical theorems in Diophantine approximation. I // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1950. V. 46. № 2. P. 209–218.
- [6] Duffin R. J., Schaeffer A. C. Khintchine's problem in metric Diophantine approximation // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 243–255.
- [7] LeVeque W. J. On the frequency of small fractional parts of real sequences. III // J. Reine Angew. Math. 1959. V. 202. P. 215–220.
- [8] Ахунжанов Р. К., Мошевитин Н. Г. О хроматическом числе дистанционного графа, связанного с лакунарной последовательностью // Докл. РАН. 2004. Т. 397. № 3. С. 1–2.
- [9] Katznelson Y. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence // Combinatorica. 2001. V. 21. № 2. P. 211–219.
- [10] Ruzsa I. Z., Tuza Zs., Voigt M. Distance graphs with finite chromatic number // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 2002. V. 85. P. 181–187.
- [11] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation // Math. Systems Theory. 1967. V. 1. P. 1–49.
- [12] Boshernithan M. D. Elementary proof of Furstenberg's Diophantine result // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. P. 67–70.
- [13] Hardy G. H., Littlewood J. E. The lattice points of a right angled triangle. II // Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 1922. V. 1. P. 212–249.
- [14] Фельдман Н. И. Сельмая проблема Гильберта. М.: МГУ, 1987.
- [15] Eggleston H. G. Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. 1951–52. V. 54. P. 42–93.
- [16] Ахунжанов Р. К. О построении чисел с заданными диофантовыми свойствами // Чебышевский сб. 2004. Т. 5. № 2(10). С. 19–29.