Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Байдакова, О порядке констант Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 814–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:46:53

УДК 517.518.8

О ПОРЯДКЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО РАВНОМЕРНЫМ УЗЛАМ СИМПЛЕКСА

Н. В. Байдакова

Для интерполяционного процесса алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам m -симплекса для $m \geq 2$ найден порядок роста по n констант Лебега, совпадающий с одномерным случаем, для которого ранее А. Х. Турецким была найдена асимптотика.

Библиография: 4 названия.

1. Введение

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ – невырожденный m -симплекс, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – барицентрические координаты (см., например, [1]) точки симплекса, $u(\lambda) \in \Delta$ – точка, имеющая барицентрические координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$, $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}\}$ – узлы равномерной сетки на симплексе Δ , т.е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{m+1}}{n} \right), \quad i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{m+1} = n. \quad (1)$$

Через $L_n^m(\lambda) = L_n^m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$ будем обозначать функцию Лебега лагранжева процесса интерполяции функции $f \in C(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени не выше n по совокупности переменных в узлах равномерной сетки (1), т.е. норму функционала в пространстве $C(\Delta)$, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке $u(\lambda)$ (под *степенью* многочлена по совокупности m переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ понимается наибольшая из степеней $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ входящих в него мономов $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ [2, § 51]). Через L_n^m будем обозначать *константу Лебега* указанного интерполяционного процесса, т.е. норму оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен. Такой выбор интерполяционных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00764, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1347.2003.1, и целевой программы поддержки междисциплинарных проектов между Уро РАН и СО РАН.

условий часто используется в методе конечных элементов. Константы Лебега позволяют получать оценки неустранимой погрешности интерполирования, обусловленной ошибками задания значений интерполируемой функции в узлах: если ошибки задания функции не превосходят ε , то неустранимая погрешность интерполирования оценивается сверху величиной $L_n^m \varepsilon$. Кроме того, константы Лебега используются при исследовании сходимости интерполяционных процессов: известно, что интерполяционный процесс для заданной матрицы узлов сходится, если $E_n(f)L_n^m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $E_n(f)$ – величина наилучшего приближения интерполируемой функции f множеством многочленов степени не выше n .

Введем множество мультииндексов

$$I = \{i = (i_1, \dots, i_{m+1}) \mid i \in \mathbb{Z}_+^{m+1}, |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{m+1} = n\}.$$

Пусть $l_i(\lambda)$, $i \in I$, – *фундаментальные многочлены*, т.е. такие многочлены степени n по совокупности переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, что если a_j , $j \in I$, – узел интерполяции (1), то

$$l_i(a_j) = \delta_i^j,$$

где $\delta_i^j = \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \dots \delta_{i_{m+1}}^{j_{m+1}}$, $\delta_{i_k}^{j_k}$ – символ Кронекера. Тогда

$$L_n^m(\lambda) = \sum_{i \in I} |l_i(\lambda)|. \quad (2)$$

Фундаментальные многочлены имеют следующий вид:

$$l_i(\lambda) = \frac{\omega_i(\lambda)}{\omega_i(a_i)},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i(\lambda) &= \prod_{s_1=0}^{i_1-1} \left(\lambda_1 - \frac{s_1}{n} \right) \prod_{s_2=0}^{i_2-1} \left(\lambda_2 - \frac{s_2}{n} \right) \dots \prod_{s_{m+1}=0}^{i_{m+1}-1} \left(\lambda_{m+1} - \frac{s_{m+1}}{n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^n \prod_{s_1=0}^{i_1-1} (n\lambda_1 - s_1) \dots \prod_{s_{m+1}=0}^{i_{m+1}-1} (n\lambda_{m+1} - s_{m+1}) \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^n \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1)} \dots \frac{\Gamma(n\lambda_{m+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_{m+1} - i_{m+1} + 1)}. \end{aligned}$$

Впервые такое представление фундаментальных многочленов указал Николаидис [3]. Отметим, что действительно $\omega_i(a_j) = 0$ при $i \neq j$, так как в этом случае найдется $q \in \{1, \dots, m+1\}$ такое, что $j_q < i_q$, и, следовательно,

$$\prod_{s_q=0}^{i_q-1} \left(\frac{j_q}{n} - \frac{s_q}{n} \right) = 0.$$

Поскольку $\omega_i(a_i) = (1/n)^n \Gamma(i_1 + 1) \dots \Gamma(i_{m+1} + 1) = (1/n)^n i_1! i_2! \dots i_{m+1}!$, то

$$l_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) = \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_{m+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1) \dots \Gamma(n\lambda_{m+1} - i_{m+1} + 1)} \cdot \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_{m+1}!}.$$

Договоримся при получении оценок исключать из рассмотрения те λ и i , при которых аргумент хотя бы одной из Γ -функций знаменателя является ее полюсом, так как этот случай соответствует ситуации $l_i(\lambda) = 0$, т.е. соответствующее слагаемое суммы (2) равно нулю.

Известно, что

$$L_n^m = \max_{\lambda: u(\lambda) \in \Delta} L_n^m(\lambda).$$

Для $m = 1$ Турецким [4, с. 42] была найдена асимптотика константы Лебега:

$$L_n^1 = \frac{2^{n+1}}{en \ln n} (1 + \varepsilon_n), \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (3)$$

Цель данной работы – указать порядок роста констант Лебега по n для $m \geq 2$, а именно, доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Для константы Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам на m -симплексе справедлива оценка*

$$C_1 \frac{2^n}{n \ln n} \leq L_n^m \leq C_2(m) \frac{2^n}{n \ln n},$$

где C_1 – абсолютная константа, а $C_2(m)$ может зависеть от m .

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Сумму, у которой нижний предел индекса суммирования больше верхнего предела, будем считать равной нулю. Далее используются следующие обозначения: $[x]$ – целая часть числа x ; α_p – дробная часть числа $n\lambda_p$, т.е. $\alpha_p = n\lambda_p - [n\lambda_p]$, $p \in \{1, \dots, m+1\}$;

$$\begin{aligned} Q(x, k) &= \frac{\Gamma(x+1)}{k! |\Gamma(x-k+1)|} \\ &= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)} \frac{|\sin \pi x|}{\pi}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq [x] + 1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$F(x, k) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(k+1-x) \sin \pi x}{\pi \Gamma(k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad (5)$$

$$N_s(j_1, \dots, j_{m+1}) = n - \sum_{q=s+1}^{m+1} [n\lambda_{j_q}] - m - 1 + s - \sum_{q=1}^{s-1} i_{j_q}, \quad s = 2, \dots, m; \quad (6)$$

$$N_s = N_s(1, \dots, m+1) = n - \sum_{q=s+1}^{m+1} [n\lambda_q] - m - 1 + s - \sum_{q=1}^{s-1} i_q, \quad s = 2, \dots, m; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{m+1}) &= \sum_{i_{j_1}=0}^{[n\lambda_{j_1}]} \cdots \sum_{i_{j_{m+1-k}}=0}^{[n\lambda_{j_{m+1-k}}]} \sum_{i_{j_{m+2-k}}=[n\lambda_{j_{m+2-k}}]+1}^{N_{m+2-k}(j_1, \dots, j_{m+1})} \cdots \\ &\quad \times \sum_{i_{j_m}=[n\lambda_{j_m}]+1}^{N_m(j_1, \dots, j_{m+1})} |l_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})|, \end{aligned} \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, m, \quad \{j_1, \dots, j_{m+1}\} = \{1, \dots, m+1\};$$

$$\begin{aligned}
S_k &= S_k(1, 2, \dots, m+1) \\
&= \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{N_{m+2-k}} \frac{\Gamma(n\lambda_{m+2-k}+1)}{i_{m+2-k}! |\Gamma(n\lambda_{m+2-k} - i_{m+2-k} + 1)|} \cdots \\
&\quad \times \sum_{i_m=[n\lambda_m]+1}^{N_m} \frac{\Gamma(n\lambda_m+1)}{i_m! |\Gamma(n\lambda_m - i_m + 1)|} \cdot \frac{\Gamma(n\lambda_{m+1}+1)}{i_{m+1}! |\Gamma(n\lambda_{m+1} - i_{m+1} + 1)|} \\
&= \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{N_{m+2-k}} Q(n\lambda_{m+2-k}, i_{m+2-k}) \cdots \\
&\quad \times \sum_{i_m=[n\lambda_m]+1}^{N_m} Q(n\lambda_m, i_m) Q(n\lambda_{m+1}, i_{m+1}), \tag{9}
\end{aligned}$$

где верхние границы сумм определены в (7), $k = 2, \dots, m$;

$$S_1 = \frac{\Gamma(n\lambda_{m+1}+1)}{i_{m+1}! |\Gamma(n\lambda_{m+1} - i_{m+1} + 1)|} = Q(n\lambda_{m+1}, i_{m+1}); \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \sigma_k(1, 2, \dots, m+1) \\
&= \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} \frac{\Gamma(n\lambda_1+1)}{i_1! \Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1)} \cdots \\
&\quad \times \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} \frac{\Gamma(n\lambda_{m+1-k}+1)}{i_{m+1-k}! \Gamma(n\lambda_{m+1-k} - i_{m+1-k} + 1)} S_k, \tag{11}
\end{aligned}$$

где S_k определены в (9) и (10), $k = 1, \dots, m$. В дальнейшем при оценке σ_k будем считать, что $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{m+1-k}]$ (иначе можем изменить порядок суммирования и нумерацию);

$$\begin{aligned}
&S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}) \\
&= \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{j_{m+2-k}}]+1}^{[n\lambda_{j_{m+2-k}}]+2} Q(n\lambda_{j_{m+2-k}}, i_{m+2-k}) \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_{j_s}]+1}^{[n\lambda_{j_s}]+2} Q(n\lambda_{j_s}, i_s) \\
&\quad n - [n\lambda_{j_{s+2}}] - \dots - [n\lambda_{j_{m+1}}] - 3(m-s) - i_1 - \dots - i_s \\
&\quad \times \sum_{i_{s+1}=[n\lambda_{j_{s+1}}]+3} Q(n\lambda_{j_{s+1}}, i_{s+1}) \cdots \\
&\quad n - [n\lambda_{j_{m+1}}] - 3 - i_1 - \dots - i_{m-1} \\
&\quad \times \sum_{i_m=[n\lambda_{j_m}]+3} Q(n\lambda_{j_m}, i_m) Q(n\lambda_{j_{m+1}}, i_{m+1}), \tag{12} \\
&\quad s = m+2-k, \dots, m;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_k^{m+1-k}(1, \dots, m+1) \\
&= \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+3}^{n-[n\lambda_{m+3-k}]-\dots-[n\lambda_{m+1}]-3(m-(m+1-k))-i_1-\dots-i_{m+1-k}} Q(n\lambda_{m+2-k}, i_{m+2-k}) \cdots \\
&\quad \times \sum_{i_m=[n\lambda_m]+3}^{n-[n\lambda_{m+1}]-3-i_1-\dots-i_{m-1}} Q(n\lambda_m, i_m) Q(n\lambda_{j_{m+1}}, i_{m+1}); \tag{13}
\end{aligned}$$

$$R_q(\alpha, \beta) = \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha}{i_q^{1+\alpha/2}} \frac{\beta}{(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}}; \tag{14}$$

$$g(\theta, k) = \frac{\theta}{k^{1+\theta/2}}. \tag{15}$$

Через C и $C(m)$ будем обозначать константы, не обязательно равные; $C(m)$ могут зависеть от m .

ЛЕММА 1. *Справедливо следующее представление функции Лебега:*

$$L_n^m(\lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_{m+1-k}\} \subset \{1, \dots, m+1\}} \sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{m+1-k}),$$

где $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{m+1-k})$ определены в (8) и суммирование ведется по всем сочетаниям по $m+1-k$ элементов из множества $\{1, \dots, m+1\}$, $k = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном λ , отличном от узлов интерполяции (узлы интерполяции можно не рассматривать, так как значение функции Лебега в любом из них известно и равно единице) разобьем правую часть равенства (2) на несколько сумм в зависимости от знаков $n\lambda_s - i_s$. Фиксируем $k \in \{1, \dots, m\}$, возьмем произвольно $\{j_1, \dots, j_{m+1-k}\} \subset \{1, \dots, m+1\}$ и выделим те слагаемые суммы (2), для которых $n\lambda_{j_s} - i_{j_s} \geq 0$ (т.е. $0 \leq i_{j_s} \leq [n\lambda_{j_s}]$) при $s = 1, 2, \dots, m+1-k$ и $n\lambda_{j_s} - i_{j_s} < 0$ (т.е. $i_{j_s} \geq [n\lambda_{j_s}] + 1$) при $s = m+2-k, \dots, m+1$. Чтобы при $s \geq m+2-k$ найти границы для i_{j_s} , рассмотрим для примера $s = m+2-k$. С одной стороны, $i_{j_{m+2-k}} \geq [n\lambda_{j_{m+2-k}}] + 1$. С другой, в силу того, что $i_{j_q} \geq [n\lambda_{j_q}] + 1$ для $q = m+3-k, \dots, m+1$, справедливо неравенство

$$\sum_{q=m+3-k}^{m+1} i_{j_q} \geq \sum_{q=m+3-k}^{m+1} [n\lambda_{j_q}] + k - 1,$$

т.е.

$$n - \sum_{q=1}^{m+2-k} i_{j_q} \geq \sum_{q=m+3-k}^{m+1} [n\lambda_{j_q}] + k - 1,$$

откуда следует, что

$$i_{j_{m+2-k}} \leq n - \sum_{q=m+3-k}^{m+1} [n\lambda_{j_q}] - k + 1 - \sum_{q=1}^{m+1-k} i_{j_q}.$$

Аналогично для $s = m + 2 - k, \dots, m$ получаем

$$[n\lambda_{j_s}] + 1 \leq i_{j_s} \leq N_s(j_1, \dots, j_{m+1}),$$

где $N_s(j_1, \dots, j_{m+1})$ выписаны в (6). Выделенные таким образом из (2) слагаемые составят $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{m+1})$. Так как $i = (i_1, \dots, i_{m+1}) \in I$ и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{m+1} (n\lambda_s - i_s) = n - n = 0,$$

то для любого $i \in I$ множество $\{n\lambda_s - i_s\}_{s=1}^{m+1}$ содержит как отрицательные, так и неотрицательные элементы. Таким образом, взяв все возможные различные множества $\{j_1, \dots, j_{m+1-k}\} \subset \{1, \dots, m+1\}$, $k = 1, \dots, m$, и просуммировав соответствующие $\sigma_k(j_1, j_2, \dots, j_{m+1-k})$, получим $L_n^m(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

Фиксируем $k \in \{1, \dots, m\}$. Дальнейшие действия будут связаны с оценкой σ_k , определенной в (11).

ЛЕММА 2. Пусть $i_p \in \mathbb{N}$, $n\lambda_p \in \mathbb{R}_+$, $i_p \geq [n\lambda_p] + 1$, функция Q определена в (4). Тогда $Q(n\lambda_p, i_p) \leq 1$. Кроме того, если $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$, то $Q(n\lambda_p, i_p) \leq Q(\alpha_p, i_p)$, где α_p – дробная часть числа $n\lambda_p$ (см. обозначения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} i_p! Q(n\lambda_p, i_p) &= \frac{\Gamma(n\lambda_p + 1)}{|\Gamma(n\lambda_p - i_p + 1)|} = |n\lambda_p(n\lambda_p - 1) \cdots (n\lambda_p - i_p + 1)| \\ &= |(-n\lambda_p)(-n\lambda_p + 1) \cdots (-n\lambda_p + i_p - 2)(-n\lambda_p + i_p - 1)| \leq i_p!, \end{aligned}$$

т.е. $Q(n\lambda_p, i_p) \leq 1$. Если $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$ и $[n\lambda_p] \geq 1$, то поскольку

$$|-\alpha_p - s| \leq |-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + s|$$

для $s \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} i_p! Q(n\lambda_p, i_p) &= |(-n\lambda_p)(-n\lambda_p + 1) \cdots (-n\lambda_p + i_p - 2)(-n\lambda_p + i_p - 1)| \\ &= (-\alpha_p - [n\lambda_p])(-\alpha_p - [n\lambda_p] + 1) \cdots (-\alpha_p - 1)(-\alpha_p) \\ &\quad \times (-\alpha_p + 1) \cdots (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1) \\ &\leq |(-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + [n\lambda_p])(-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + [n\lambda_p] - 1) \cdots \\ &\quad \times (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1 + 1)(-\alpha_p) \\ &\quad \times (-\alpha_p + 1) \cdots (-\alpha_p - [n\lambda_p] + i_p - 1)| \\ &= |(-\alpha_p)(-\alpha_p + 1) \cdots (-\alpha_p + i_p - 1)| = i_p! Q(\alpha_p, i_p), \end{aligned}$$

откуда следует оставшаяся часть утверждения леммы 2.

ЛЕММА 3. Справедливо неравенство

$$\sigma_k \leq \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} C_{[n\lambda_{m+1-k}+1]}^{i_{m+1-k}} S_k,$$

где σ_k и S_k определяются соответственно в (11) и (9), (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того, что для $i_s \leq [n\lambda_s]$ (т.е. $s = 1, \dots, m+1-k$) выполняется неравенство

$$\frac{\Gamma(n\lambda_s + 1)}{i_s! \Gamma(n\lambda_s - i_s + 1)} = \frac{1}{i_s!} \prod_{p=0}^{i_s-1} (n\lambda_s - p) \leq \frac{1}{i_s!} \prod_{p=0}^{i_s-1} ([n\lambda_s] + 1 - p) = C_{[n\lambda_s+1]}^{i_s}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $[n\lambda_1] < 2m$, σ_k определено в (11). Тогда

$$\sigma_k \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сначала S_k из (9), (10). Учитывая, что согласно лемме 2 для $i_p \geq [n\lambda_p] + 1$ справедлива оценка

$$Q(n\lambda_p, i_p) = \frac{\Gamma(n\lambda_p + 1)}{|\Gamma(n\lambda_p - i_p + 1)| i_p!} \leq 1,$$

можем заключить, что сумма S_k не превосходит числа своих слагаемых, т.е.

$$S_k \leq (N_m - [n\lambda_m]) \cdots (N_{m+2-k} - [n\lambda_{m+2-k}]).$$

Поскольку для $s = m+2-k, \dots, m$ числа N_s (см. (7)) не превосходят n , то $S_k \leq n^{k-1}$, откуда с учетом леммы 3 и того, что $[n\lambda_{m+1-k}] \leq [n\lambda_{m-k}] \leq \dots \leq [n\lambda_1] \leq 2m$, получаем требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \sigma_k &\leq n^{k-1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} C_{[n\lambda_{m+1-k}+1]}^{i_{m+1-k}} \\ &\leq n^{k-1} 2^{2m(m+1-k)} \leq 2^{2m^2} n^{m-1} = C(m) n^{m-1} \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}$, функция F определяется формулой (5). Тогда справедлива оценка сверху

$$F(\alpha, k) \leq C \frac{\alpha}{k^{\alpha/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически повторяет доказательство аналогичной леммы Турецкого [4, с. 42] и приводится для удобства читателя. Рассмотрим $F(\alpha, k)$:

$$F(\alpha, k) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{k!} \prod_{s=1}^k (s-\alpha) \leq \frac{\alpha}{k!} \prod_{s=2}^k (s-\alpha).$$

Положим

$$\varphi_k(\alpha) = \prod_{s=2}^k (s-\alpha)$$

и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\ln \varphi_k(\alpha) &= \sum_{s=2}^k \ln(s - \alpha) = \sum_{s=2}^k \ln s - \sum_{s=2}^k (\ln s - \ln(s - \alpha)) \\ &= \ln k! - \sum_{s=2}^k \ln\left(1 + \frac{\alpha}{s - \alpha}\right) \leq \ln k! - \sum_{s=2}^k \frac{\alpha}{2(s - \alpha)} = \ln k! - \frac{\alpha}{2} \sum_{s=2}^k \frac{1}{s - \alpha} \\ &\leq \ln k! - \frac{\alpha}{2} \sum_{s=2}^k \frac{1}{s} \leq \ln k! - \frac{\alpha}{2} \int_2^k \frac{dx}{x} = \ln k! - \frac{\alpha}{2} \ln k + \frac{\alpha}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

Получаем

$$\varphi_k(\alpha) \leq \exp\left(\ln k! + \frac{\alpha}{2} \ln 2 - \frac{\alpha}{2} \ln k\right) = \frac{k! 2^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}}.$$

Таким образом,

$$F(\alpha, k) \leq \frac{\alpha}{k!} \cdot \frac{k! 2^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}} \leq \sqrt{2} \frac{\alpha}{k^{\alpha/2}},$$

и лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\kappa \geq 3$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, R_q и g определены в (14) и (15) соответственно. Тогда $R_q(\alpha, \beta) \leq Cg(\theta, l_{q-1})$, где

$$l_{q-1} = n - i_1 - \dots - i_{q-1}, \quad \theta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } g(\alpha, l_{q-1}) \geq g(\beta, l_{q-1}), \\ \beta, & \text{если } g(\alpha, l_{q-1}) < g(\beta, l_{q-1}). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем $R_q(\alpha, \beta)$:

$$R_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{(n-i_1-\dots-i_q+i_q)\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}} = R_1 + R_2,$$

где

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{\beta/2}}, \\ R_2 &= \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} \frac{\alpha\beta}{i_q^{\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_q)^{1+\beta/2}}.\end{aligned}$$

Оценим слагаемое R_1 . Для этого разобьем его на две суммы R_{11} и R_{12} следующим образом:

$$\sum_{i_q=3}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}} = \sum_{i_q=3}^{(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]} + \sum_{i_q=[(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]+1}^{n-\kappa-i_1-\dots-i_{q-1}}.$$

Рассмотрим вторую сумму R_{12} . В этой сумме не более $n - \kappa - i_1 - \dots - i_{q-1} - 2$ слагаемых, каждое из которых мы можем оценить сверху не зависящей от i_q величиной

$$\frac{\alpha}{l_{q-1}[(n - i_1 - \dots - i_{q-1})/2 + 1]^{1+\alpha/2}} \times \frac{\beta}{(n - i_1 - \dots - i_{q-1} - n + \kappa + i_1 + \dots + i_{q-1})^{\beta/2}},$$

поэтому с учетом числа слагаемых получаем

$$\begin{aligned} R_{12} &\leq \frac{1}{l_{q-1}} \frac{\alpha}{[(n - i_1 - \dots - i_{q-1})/2 + 1]^{1+\alpha/2}} \\ &\quad \times \frac{\beta(n - \kappa - i_1 - \dots - i_{q-1} - 2)}{(n - i_1 - \dots - i_{q-1} - n + \kappa + i_1 + \dots + i_{q-1})^{\beta/2}} \\ &\leq C \frac{1}{l_{q-1}} \frac{\alpha}{(n - i_1 - \dots - i_{q-1})^{\alpha/2}} = Cg(\alpha, l_{q-1}). \end{aligned}$$

Сумма R_{11} оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{11} &\leq \frac{1}{l_{q-1}} \sum_{i_q=3}^{[(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]} \frac{\alpha\beta}{i_q^{1+\alpha/2}(n-i_1-\dots-i_{q-1}-(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2)^{\beta/2}} \\ &= \frac{1}{l_{q-1}} \frac{\beta}{((n-i_1-\dots-i_{q-1})/2)^{\beta/2}} \sum_{i_q=3}^{[(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]} \frac{\alpha}{i_q^{1+\alpha/2}} \\ &\leq \frac{2^{\beta/2}\beta}{(n-i_1-\dots-i_{q-1})^{1+\beta/2}} \int_2^{[(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]} \frac{\alpha dt}{t^{1+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_2^{[(n-i_1-\dots-i_{q-1})/2]} \frac{\alpha dt}{t^{1+\alpha/2}} = 2 \left(\frac{1}{2^{\alpha/2}} - \frac{1}{[l_{q-1}/2]^{\alpha/2}} \right) \leq 2,$$

получаем

$$R_{11} \leq Cg(\beta, l_{q-1}),$$

т.е.

$$R_1 = R_{11} + R_{12} \leq Cg(\theta, l_{q-1}).$$

Слагаемое R_2 после замены $i_q = n - i_1 - \dots - i_{q-1} - s$ оценивается аналогично. Лемма 6 доказана.

3. Доказательство теоремы

3.1. Сведение к σ_k . Оценка снизу следует из одномерного результата Турешко-го (3): пусть $f \in C[0, 1]$ – функция одной переменной, экстремальная с точки зрения константы Лебега, т.е. такая, на которой достигается норма оператора интерполирования. Пусть

$$\|f\|_{C[0,1]} = 1.$$

Положим $F(\lambda) = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) = f(\lambda_1)$. Отметим, что

$$\|F\|_{C(\Delta)} = \|f\|_{C[0,1]} = 1.$$

Пусть $p(f)$ – многочлен одной переменной, интерполирующий f на $[0, 1]$; $P(F)$ – многочлен, интерполирующий F на Δ . Тогда, используя (3), получаем оценку

$$L_n^m \geq \|P(F)\|_{C(\Delta)} = \|p(f)\|_{C[0,1]} = L_n^1 = \frac{2^{n+1}}{en \ln n} (1 + \varepsilon_n).$$

Таким образом, требуется доказать лишь оценку сверху.

В силу леммы 1

$$L_n^m(\lambda) \leq C(m) \max_k \max_{\{j_1, \dots, j_{m+1-k}\}} \sigma_k(j_1, \dots, j_{m+1}). \quad (16)$$

Так как

$$L_n^m = \max_{\lambda: u(\lambda) \in \Delta} L_n^m(\lambda),$$

то задача сводится к оценке $\sigma_k(j_1, \dots, j_{m+1})$, где $\{j_1, \dots, j_{m+1-k}\} \subset \{1, \dots, m+1\}$. Без ограничения общности можем рассматривать $\sigma_k = \sigma_k(1, \dots, m+1)$ (см. (11)), $1 \leq k \leq m$. Напомним, что можем считать $[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{m+1-k}]$ (см. раздел 2). Случай $[n\lambda_1] < 2m$ разобран в лемме 4, поэтому пусть далее $[n\lambda_1] \geq 2m$. Принимая во внимание результат леммы 3, разобьем оценку σ_k на две суммы:

$$\sigma_k \leq \sigma_k^0 + \sigma_k^1, \quad (17)$$

где

$$\sigma_k^0 = \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]-2m} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[n\lambda_2]} C_{[n\lambda_2+1]}^{i_2} \cdots \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} C_{[n\lambda_{m+1-k}+1]}^{i_{m+1-k}} S_k(1, 2, \dots, m+1), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^1 = & \sum_{i_1=[n\lambda_1]-2m+1}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[n\lambda_2]} C_{[n\lambda_2+1]}^{i_2} \cdots \\ & \times \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} C_{[n\lambda_{m+1-k}+1]}^{i_{m+1-k}} S_k(1, 2, \dots, m+1). \end{aligned} \quad (19)$$

Так как $S_k \leq n^{k-1}$ (см. доказательство леммы 4),

$$\sum_{i_s=0}^{[n\lambda_s]} C_{[n\lambda_s+1]}^{i_s} \leq 2^{[n\lambda_s+1]}$$

для $s = 2, \dots, m+1-k$ и

$$\sum_{i_1=[n\lambda_1]-2m+1}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \leq 2m(n\lambda_1+1)^{2m},$$

то

$$\sigma_k^1 \leq C(m)(n\lambda_1+1)^{2m} 2^{n\lambda_2+\dots+n\lambda_{m+1-k}+(m-k)} n^{k-1}.$$

Если $n\lambda_1+1 \leq n/m$, то

$$\begin{aligned} \sigma_k^1 &\leq C(m) \left(\frac{n}{m}\right)^{2m} 2^{n(m-k)/m} n^{k-1} = C(m) 2^{n(m-k)/m} n^{k-1+2m} \\ &= C(m) 2^n \frac{n^{k-1+2m}}{2^{kn/m}} \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n} \frac{n^{k+2m} \ln n}{2^{kn/m}} \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Если $n\lambda_1+1 > n/m$, то

$$\begin{aligned} \sigma_k^1 &\leq C(m)(n\lambda_1+1)^{2m} 2^{n-(n\lambda_1+1)} n^{k-1} \leq C(m) 2^n \frac{(n\lambda_1+1)^{2m} n^{k-1}}{2^{n\lambda_1+1}} \\ &\leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n} \frac{n^{2m} n^k \ln n}{2^{n/m}} \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_k^1 \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}. \quad (20)$$

Остается оценить σ_k^0 .

3.2. Оценка σ_k^0 .

ЛЕММА 7. Для $k = 2, \dots, m$ справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{s=m+2-k}^m \sum_{\{j_{m+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{m+2-k, \dots, m+1\}} S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}) \\ &\quad + S_k^{m+1-k}(1, \dots, m+1), \end{aligned} \quad (21)$$

где S_k и S_k^s определяются формулами (9) и (12), (13) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1. Рассмотрим, по каким индексам ведется суммирование в S_k в случае оценки σ_k^0 . Возьмем сумму по i_{m+2-k} и оценим снизу величину N_{m+2-k} , определенную в (7). Сначала оценим сверху $\sum_{q=1}^{m+1-k} i_q$, принимая во внимание значения верхних пределов соответствующих индексов суммирования в сумме σ_k^0 . В результате получаем следующую оценку для N_{m+2-k} :

$$N_{m+2-k} \geq n - \sum_{q=m+3-k}^{m+1} [n\lambda_q] - m - 1 + m + 2 - k - \sum_{q=1}^{m+1-k} [n\lambda_q] + 2m.$$

Так как узлы интерполяции мы не рассматриваем, то хотя бы две из величин $n\lambda_s$, $s = 1, 2, \dots, m+1$, отличны от целых чисел, поэтому

$$n - \sum_{q=m+3-k}^{m+1} [n\lambda_q] - \sum_{q=1}^{m+1-k} [n\lambda_q] \geq [n\lambda_{m+2-k}] + 1,$$

и, следовательно,

$$N_{m+2-k} \geq [n\lambda_{m+2-k}] + 1 + 1 + 2m - k \geq [n\lambda_{m+2-k}] + m + 2,$$

т.е. в сумме σ_k^0 , а значит, и в S_k индекс суммирования i_{m+2-k} может принимать значения $[n\lambda_{m+2-k}] + 1$, $[n\lambda_{m+2-k}] + 2$ и далее. Так как порядок суммирования по i_s для $s \geq m+2-k$ выбирался произвольно и мог бы быть изменен, то это утверждение справедливо и для других i_s : если $s \in \{m+2-k, \dots, m+1\}$, то индекс i_s может принимать значения $[n\lambda_s] + 1$, $[n\lambda_s] + 2$ и далее.

В лемме 2 приводятся разные оценки функции $Q(n\lambda_p, i_p)$ для $i_p \geq [n\lambda_p] + 3$ и $i_p = [n\lambda_p] + 1$, $[n\lambda_p] + 2$. С этим и будет связано разбиение S_k на суммы $S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1})$. Фиксируем $s \in \{m+1-k, \dots, m\}$, возьмем произвольно

$$\{j_{m+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{m+2-k, \dots, m+1\}$$

и выделим те слагаемые суммы S_k , для которых $i_q = [n\lambda_q] + 1$, $[n\lambda_q] + 2$ при $q = j_{m+2-k}, \dots, j_s$ и $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$ для $q = j_{s+1}, \dots, j_{m+1}$, где

$$\{j_{s+1}, \dots, j_{m+1}\} \subset \{m+2-k, \dots, m+1\} \setminus \{j_{m+2-k}, \dots, j_s\}$$

(случай $s = m+1-k$ соответствует ситуации $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$ при $q = j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}$). Эти слагаемые составят сумму $S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1})$. Отметим, что невозможен случай, когда $i_q \leq [n\lambda_q] + 2$ при всех $q = j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}$: если $i_q \leq [n\lambda_q] + 2$ для $q = j_{m+2-k}, \dots, j_m$, то

$$\begin{aligned} i_{j_{m+1}} &= n - i_1 - \dots - i_{m+1-k} - i_{j_{m+2-k}} - \dots - i_{j_m} \\ &\geq n - ([n\lambda_1] - 2m) - [n\lambda_2] - \dots - [n\lambda_{m+1-k}] \\ &\quad - ([n\lambda_{j_{m+2-k}}] + 2) - \dots - ([n\lambda_{j_m}] + 2). \end{aligned}$$

Так как узлы интерполяции не рассматриваются, то

$$[n\lambda_1] + \dots + [n\lambda_{m+1-k}] + [n\lambda_{j_{m+2-k}}] + \dots + [n\lambda_{j_m}] \leq n - [n\lambda_{j_{m+1}}] - 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} i_{j_{m+1}} &\geq n - (n - 1 - [n\lambda_{j_{m+1}}]) + 2m - 2(m - (m+1-k)) \\ &= 1 + [n\lambda_{j_{m+1}}] + 2m - 2(k-1) \geq [n\lambda_{j_{m+1}}] + 3. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $q = j_{s+1}$. С одной стороны, $i_{j_{s+1}} \geq [n\lambda_{j_{s+1}}] + 3$. С другой,

$$\sum_{p=s+2}^{m+1} i_{j_p} \geq \sum_{p=s+2}^{m+1} [n\lambda_{j_p}] + 3(m-s),$$

т.е.

$$n - \sum_{p=1}^{m+1-k} i_p - \sum_{p=m+2-k}^{s+1} i_{j_p} \geq \sum_{p=s+2}^{m+1} [n\lambda_{j_p}] + 3(m-s),$$

откуда следует, что

$$[n\lambda_{j_{s+1}}] + 3 \leq i_{j_{s+1}} \leq n - \sum_{p=1}^{m+1-k} i_p - \sum_{p=m+2-k}^s i_{j_p} - \sum_{p=s+2}^{m+1} [n\lambda_{j_p}] - 3(m-s).$$

Действуя аналогичным образом, получаем

$$[n\lambda_{j_r}] + 3 \leq i_{j_r} \leq n - \sum_{p=1}^{m+1-k} i_p - \sum_{p=m+2-k}^{r-1} i_{j_p} - \sum_{p=r+1}^{m+1} [n\lambda_{j_p}] - 3(m-r+1) \quad (22)$$

для $r = s+1, \dots, m$;

$$[n\lambda_{j_r}] + 1 \leq i_{j_r} \leq [n\lambda_{j_r}] + 2 \quad (23)$$

для $r = m+2-k, \dots, s$.

Просуммировав слагаемые $Q(n\lambda_{j_1}, i_{j_1})Q(n\lambda_{j_2}, i_{j_2}) \cdots Q(n\lambda_{j_{m+1}}, i_{j_{m+1}})$ по индексам i_{j_p} в пределах, указанных в (23) и (22), после переобозначений i_{j_p} на i_p получим $S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1})$. Взяв все возможные различные множества $\{j_{m+2-k}, \dots, j_s\} \subset \{m+2-k, \dots, m+1\}$, $s = m+2-k, \dots, m$, и просуммировав соответствующие $S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1})$ и $S_k^{m+1-k}(1, \dots, m+1)$, получим (21). Лемма 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в $S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1})$ ведется суммирование слагаемых

$$Q(n\lambda_{j_{m+2-k}}, i_{m+2-k})Q(n\lambda_{j_{m+3-k}}, i_{m+3-k}) \cdots Q(n\lambda_{j_{m+1}}, i_{m+1})$$

по индексам $i_{m+2-k}, \dots, i_m$, причем $i_p = [n\lambda_{j_p}] + 1, [n\lambda_{j_p}] + 2$ для $p = m+2-k, \dots, s$ и $i_p \geq [n\lambda_{j_p}] + 3$ для $p = s+1, \dots, m+1$.

ЛЕММА 8. Пусть $i_q \geq [n\lambda_q] + 3$. Тогда для функции $Q(\cdot, \cdot)$, определяемой (4), справедлива оценка

$$Q(n\lambda_q, i_q) \leq g(\alpha_q, i_q), \quad (24)$$

где α_q — дробная часть $n\lambda_q$, $g(\cdot, \cdot)$ определено в (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 2 и 5:

$$\begin{aligned} Q(n\lambda_q, i_q) &\leq Q(\alpha_q, i_q) = F(\alpha_q, i_q) \frac{1}{i_q - \alpha_q} \\ &\leq C(m) \frac{\alpha_q}{i_q^{\alpha/2}} \frac{1}{i_q - \alpha_q} \leq C(m) \frac{\alpha_q}{i_q^{\alpha/2} i_q} = g(\alpha_q, i_q). \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для S_k , $k = 1, \dots, t$, определенного в (9), справедлива оценка

$$S_k \leq C(m) \frac{1}{([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1) \ln([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq 2$. Так как лемма 7 приводит к неравенству

$$S_k \leq C(m) \max \left\{ \max_s \max_{\{j_{m+2-k}, \dots, j_s\}} S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}), \right. \\ \left. S_k^{m+1-k}(1, \dots, m+1) \right\},$$

то доказательство леммы сводится к оценке сверху величины

$$S_k^s(1, \dots, m+1-k, j_{m+2-k}, \dots, j_{m+1}), \quad m+1-k \leq s \leq m.$$

Без ограничения общности можем рассматривать $S_k^s = S_k^s(1, \dots, m+1)$ для произвольного $s \in \{m+1-k, \dots, m\}$ (см. (12) при $j_{m+2-k} = m+2-k, \dots, j_{m+1} = m+1$).

С учетом замечания к лемме 7 для $q = m+2-k, \dots, s$ лемма 2 дает оценку $Q(n\lambda_q, i_q) \leq 1$, а для $q = s+1, \dots, m+1$ используем лемму 8: $Q(n\lambda_q, i_q) \leq g(\alpha_q, i_q)$. Таким образом, получаем

$$S_k^s \leq C(m) \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{[n\lambda_{m+2-k}]+2} \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \\ \times \sum_{i_{s+1}=[n\lambda_{s+1}]+3}^{n-[n\lambda_{s+2}]-\dots-[n\lambda_{m+1}]-3(m-s)-i_1-\dots-i_s} g(\alpha_{s+1}, i_{s+1}) \cdots \\ \times \sum_{i_m=[n\lambda_m]+3}^{n-[n\lambda_{m+1}]-3-i_1-\dots-i_{m-1}} g(\alpha_m, i_m) g(\alpha_{m+1}, i_{m+1}).$$

Заменим i_{m+1} на $n - i_1 - \dots - i_m$. В суммах по i_q для $q = s+1, \dots, m$ заменим нижние пределы суммирования на меньшие, а верхние – на большие (вообще говоря, в зависимости от λ эти пределы или их часть могут остаться без изменений). При этом в правой части последнего неравенства могут лишь добавиться положительные слагаемые:

$$S_k^s \leq C(m) \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{[n\lambda_{m+2-k}]+2} \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \sum_{i_{s+1}=3}^{n-3(m-s)-i_1-\dots-i_s} g(\alpha_{s+1}, i_{s+1}) \cdots \\ \times \sum_{i_m=3}^{n-3-i_1-\dots-i_{m-1}} g(\alpha_m, i_m) g(\alpha_{m+1}, n - i_1 - \dots - i_m). \quad (25)$$

Возьмем неравенство (25) и $m-s$ раз воспользуемся леммой 6:

$$S_k^s \leq C(m) \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{[n\lambda_{m+2-k}]+2} \cdots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} g(\theta, n - i_1 - \dots - i_s),$$

где $\theta \in \{\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{m+1}\}$, т.е. $0 \leq \theta \leq 1$. Из вида (15) функции $g(\theta, k)$ следует, что максимум по $\theta \geq 0$ этой функции при фиксированном $k > 1$ достигается при $2/\ln k$, т.е.

$$\max_{\theta \geq 0} g(\theta, k) = g\left(\frac{2}{\ln k}, k\right) = \frac{\theta}{k^{1+\theta/2}} \Big|_{\theta=2/\ln k} = \frac{\theta}{k \exp((\theta/2) \ln k)} \Big|_{\theta=2/\ln k} = \frac{2}{ek \ln k}.$$

Тогда

$$\max_{\theta \geq 0} g(\theta, n - i_1 - \dots - i_s) = \frac{2}{e(n - i_1 - \dots - i_s) \ln(n - i_1 - \dots - i_s)}.$$

Таким образом, получаем

$$S_k^s \leq C(m) \sum_{i_{m+2-k}=[n\lambda_{m+2-k}]+1}^{[n\lambda_{m+2-k}]+2} \dots \sum_{i_s=[n\lambda_s]+1}^{[n\lambda_s]+2} \frac{1}{(n - i_1 - \dots - i_s) \ln(n - i_1 - \dots - i_s)}. \quad (26)$$

Правая часть (26) содержит $2^{s-m-1+k}$ слагаемых, растущих с уменьшением $n - i_1 - \dots - i_s$. Учитывая пределы, в которых ведется суммирование в правой части (26), получаем

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq n - \sum_{q=1}^{m+1-k} i_q - [n\lambda_{m+2-k}] - 2 - \dots - [n\lambda_s] - 2.$$

При оценке величины σ_k^0 , определяемой равенством (18), выполняются неравенства $i_q \leq [n\lambda_q]$ для $q = 2, \dots, m+1-k$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq n - \sum_{q=2}^{m+1} [n\lambda_q] - i_1 - 2(s - m - 1 + k).$$

Так как узлы интерполяции не рассматриваются, то

$$n - \sum_{q=2}^{m+1} [n\lambda_q] \geq [n\lambda_1] + 1$$

и, значит,

$$n - i_1 - \dots - i_s \geq [n\lambda_1] + 1 - i_1 - 2(m - m - 1 + k) \geq [n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1.$$

Таким образом, неравенство (26) приводится к виду

$$\begin{aligned} S_k^s &\leq \frac{C(m) 2^{s-m-1+k}}{([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1) \ln([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1)} \\ &\leq C(m) \frac{1}{([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1) \ln([n\lambda_1] - 2m + 3 - i_1)}, \end{aligned}$$

и лемма 9 для $k \geq 2$ доказана. Рассмотрим теперь случай $k = 1$.

Величина S_1 определяется формулой (10). Из сравнения верхних и нижних пределов индексов суммирования в равенстве (18), определяющем σ_k^0 , следует, что

$$\begin{aligned} i_{m+1} &= n - i_1 - \dots - i_m \geq n - ([n\lambda_1] - 2m) - \sum_{s=2}^m [n\lambda_s] \\ &\geq [n\lambda_{m+1}] + 1 + 2m \geq [n\lambda_{m+1}] + 3. \end{aligned}$$

Тогда согласно лемме 8 получаем

$$S_1 = Q(n\lambda_{m+1}, i_{m+1}) \leq g(\alpha_{m+1}, i_{m+1}).$$

Дальнейшее доказательство аналогично случаю $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \max_{\theta \geq 0} g(\theta, i_{m+1}) = g\left(\frac{2}{\ln i_{m+1}}, i_{m+1}\right) = \frac{2}{e(n - i_1 - \dots - i_m) \ln(n - i_1 - \dots - i_m)} \\ &\leq \frac{2}{e(n - i_1 - [n\lambda_2] - \dots - [n\lambda_{m+1}])(\ln(n - i_1 - [n\lambda_2] - \dots - [n\lambda_{m+1}]))} \\ &\leq C \frac{1}{([n\lambda_1] + 1 - i_1)(\ln([n\lambda_1] + 1 - i_1))}. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Положим $N = [n\lambda_1] - 2m < [n\lambda_1] + 1$ и, применив лемму 9, вернемся к оценке σ_k^0 :

$$\begin{aligned} \sigma_k^0 &\leq C(m) \sum_{i_1=0}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{[n\lambda_2]} C_{[n\lambda_2+1]}^{i_2} \dots \\ &\quad \times \sum_{i_{m+1-k}=0}^{[n\lambda_{m+1-k}]} C_{[n\lambda_{m+1-k}+1]}^{i_{m+1-k}} \frac{1}{(N + 3 - i_1) \ln(N + 3 - i_1)} \\ &\leq C(m) 2^{[n\lambda_2]+1+\dots+[n\lambda_{m+1-k}]+1} \sum_{i_1=0}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N + 3 - i_1) \ln(N + 3 - i_1)} \\ &\leq C(m) 2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{m+1-k}]} \sum_{i_1=0}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N + 3 - i_1) \ln(N + 3 - i_1)}. \end{aligned}$$

Пусть далее $[n\lambda_1] \geq 4m^2$, так как если $[n\lambda_1] < 4m^2$, то, учитывая неравенство

$$[n\lambda_1] \geq [n\lambda_2] \geq \dots \geq [n\lambda_{m+1-k}],$$

получим $\sigma_k^0 \leq C(m)$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $[n\lambda_1] \leq n/(m+1)$. Тогда

$$[n\lambda_{m+1-k}] \leq \dots \leq [n\lambda_2] \leq [n\lambda_1] \leq \frac{n}{m+1}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\sigma_k^0 &\leq C(m)2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{m+1-k}]}2^{[n\lambda_1]+1} \leq C(m)2^{[n\lambda_1]+\dots+[n\lambda_{m+1-k}]} \\ &\leq C(m)\frac{2^m}{2^{n/(m+1)}} \leq C(m)2^{nm/(m+1)} \leq C(m)\frac{2^n}{n \ln n}.\end{aligned}$$

Случай 2. Пусть $[n\lambda_1] > n/(m+1)$. В этом случае правую часть в оценке σ_k^0 разобьем на две суммы:

$$\sigma_k^0 \leq C(m)2^{[n\lambda_2]+\dots+[n\lambda_{m+1-k}]}(g_1 + g_2), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}g_1 &= \sum_{i_1=0}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)}, \\ g_2 &= \sum_{i_1=N-[\sqrt{n\lambda_1}]+1}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1) \ln(N+3-i_1)}.\end{aligned}$$

Оценим g_1 :

$$g_1 \leq \frac{1}{\ln(N+3-N+[\sqrt{n\lambda_1}])} \sum_{i_1=0}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{1}{(N+3-i_1)}.$$

Отметим, что $N+3-i_1 = ([n\lambda_1]+3-i_1) - 2m$, причем

$$[n\lambda_1]+3-i_1 \geq [n\lambda_1]+3 - ([n\lambda_1]-2m-[\sqrt{n\lambda_1}]) = 2m+3+[\sqrt{n\lambda_1}] \geq 2m+3+2m > 4m.$$

Так как при $q \geq 4m$ справедливо неравенство $1/(q-2m) = 2/(q+q-4m) \leq 2/q$, то верна оценка

$$\begin{aligned}g_1 &\leq \frac{1}{\ln \sqrt{n\lambda_1}} \sum_{i_1=0}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]} C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1} \frac{2}{[n\lambda_1]+3-i_1} \\ &\leq \frac{2 \cdot 2}{[n\lambda_1+2] \ln n\lambda_1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} \frac{[n\lambda_1+1]! [n\lambda_1+2]}{i_1! [n\lambda_1+1-i_1]! [n\lambda_1+2-i_1]} \\ &\leq \frac{4}{n\lambda_1 \ln n\lambda_1} \sum_{i_1=0}^{[n\lambda_1]} C_{[n\lambda_1+2]}^{i_1} \\ &\leq \frac{4}{(n/(m+1))(\ln n - \ln(m+1))} 2^{[n\lambda_1+2]} \leq C(m) \frac{2^{[n\lambda_1]}}{n \ln n}.\end{aligned} \quad (28)$$

Остается оценить g_2 . Прежде всего отметим, что

$$g_2 \leq \sum_{i_1=N-[\sqrt{n\lambda_1}]+1}^N C_{[n\lambda_1+1]}^{i_1}.$$

Так как

$$N - [\sqrt{n\lambda_1}] + 1 = [n\lambda_1] - 2m - [\sqrt{n\lambda_1}] + 1 \geq \frac{n\lambda_1}{2}$$

при $[n\lambda_1] \geq 4m^2$, то

$$\begin{aligned} g_2 &\leq \sqrt{n\lambda_1} C_{[n\lambda_1+1]}^{N-[\sqrt{n\lambda_1}]+1} = \sqrt{n\lambda_1} C_{[n\lambda_1+1]}^{[n\lambda_1]-2m-[\sqrt{n\lambda_1}]+1} \\ &= \sqrt{n\lambda_1} \frac{[n\lambda_1+1]!}{([n\lambda_1+1]-2m-[\sqrt{n\lambda_1}])! ([\sqrt{n\lambda_1}]+2m)!}. \end{aligned}$$

Положим $\nu = [\sqrt{n\lambda_1}] + 2m$, $\mu = [n\lambda_1 + 1]$. В этих обозначениях получаем

$$g_2 \leq \nu \frac{\mu!}{(\mu-\nu)! \nu!} \leq \mu(\mu-1) \cdots (\mu-\nu+1) \leq \mu^\nu.$$

Возьмем логарифм от обеих частей неравенства:

$$\ln g_2 \leq \nu \ln \mu = \mu \left(\frac{\nu \ln \mu}{\mu} + \frac{\ln \mu}{\mu} + \frac{\ln \ln \mu}{\mu} \right) - \ln \mu - \ln \ln \mu.$$

Сумма в скобках стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого n , зависящего от m , не превосходит $\ln 2$. Тогда справедлива оценка

$$\ln g_2 \leq C(m) + \mu \ln 2 - \ln \mu - \ln \ln \mu,$$

откуда следует, что

$$g_2 \leq C(m) \frac{2^\mu}{\mu \ln \mu},$$

т.е.

$$g_2 \leq C(m) \frac{2^{[n\lambda_1]}}{(n/(m+1)) \ln(n/(m+1))} \leq C(m) \frac{2^{[n\lambda_1]}}{n \ln n}. \quad (29)$$

Из (27)–(29) следует, что в рассматриваемом случае

$$\sigma_k^0 \leq C(m) \frac{2^{[n\lambda_1]+\cdots+[n\lambda_{m+1-k}]}}{n \ln n} \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}.$$

То есть случаи 1 и 2 дают оценку

$$\sigma_k^0 \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n}. \quad (30)$$

Тогда в силу (16), (17), (20) и (30) получаем неравенство

$$L_n^m \leq C(m) \frac{2^n}{n \ln n},$$

и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
- [2] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
- [3] Nicolaidis R. A. On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation // SIAM J. Numer. Anal. 1972. V. 9. № 3. P. 435–445.
- [4] Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1968.