Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Достанич, Норма и регуляризованный след преобразования Коши, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 844–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:16:12

УДК 517.544.73

НОРМА И РЕГУЛЯРИЗИРОВАННЫЙ СЛЕД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОШИ

М. Р. Достанич

В статье получена норма преобразования Коши C на пространстве $L^2(D, d\mu)$, где $d\mu = \omega(|z|) dA(z)$. Также (в случае $\omega \equiv 1$) получен первый регуляризованный след оператора C^*C на пространстве $L^2(\Omega)$. Эти результаты иллюстрируются различными примерами, в которых функция ω и область Ω выбираются некоторым специальным образом.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ и $\omega \in C^1(0, 1)$ – некоторая положительная функция такая, что

$$\frac{\omega(x)}{x} \int_0^x t \omega(t) dt \in L^1(0, 1).$$

Пусть $d\mu = \omega(|z|) dA(z)$, где dA – мера Лебега. Через $L^2(D, d\mu)$ обозначим пространство Лебега с мерой $d\mu$ на единичном круге D . Пусть $C_\omega : L^2(D, d\mu) \rightarrow L^2(D, d\mu)$ – оператор, задаваемый соотношением

$$C_\omega f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\mu(\xi)$$

(т.е. интегральный оператор Коши или преобразование Коши).

В данной статье определяется норма оператора C_ω (через функцию ω , характеризующую граничную задачу). В случае $\omega \equiv 1$ эта задача была решена в работе [1], где было показано, что норма соответствующего оператора равна $2/j_0$; здесь j_0 – наименьший положительный нуль функции Бесселя J_0 .

Во второй части работы, рассматривается оператор

$$C : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad Cf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{f(\xi)}{\xi - z} dA(\xi),$$

где Ω – некоторая ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$. При определенных условиях находится регуляризованный след оператора C^*C (который не принадлежит классу следов). Более подробное описание сингулярных значений компактных операторов, а также идеалов Шаттена c_p , можно найти в [2] (через c_1 мы обозначаем класс следов).

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega \in C^1(0, 1)$, $\omega(x) > 0$ на $(0, 1)$ и

$$\frac{\omega(x)}{x} \int_0^x t\omega(t) dt \in L^1(0, 1). \quad (1)$$

Тогда $\|C_\omega\| = 2\sqrt{\lambda^*}$, где λ^* – наибольшее значение λ такое, что граничная задача

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x\omega(x)} \right) + y \frac{\omega(x)}{x} &= 0, \\ y(0+) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{y'(x)}{\omega(x)} = 0 \end{aligned}$$

имеет решение $y \in C^2(0, 1)$, удовлетворяющее условиям $y(x) > 0$ и $y'(x) > 0$ на $(0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $\omega(x) = x^\alpha$, $\alpha > -1$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для определения нормы соответствующего оператора C_ω , нужно найти наибольшее значение λ , при котором граничная задача

$$\begin{cases} y''x^2 - (\alpha + 1)xy' + y \cdot \frac{x^{(2\alpha+2)}}{\lambda} = 0, \\ y(0+) = 0, \quad y'(1-0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

имеет решение $y \in C^2(0, 1)$, удовлетворяющее условиям $y(x) > 0$ и $y'(x) > 0$ при $x \in (0, 1)$.

Решая дифференциальное уравнение (2) (см. [3]), получим

$$y(x) = x^{(\alpha+2)/2} \cdot Z_\nu \left(\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\lambda}} \right), \quad \nu = \frac{\alpha+2}{2\alpha+2},$$

где $Z_\nu = c_1 J_\nu + c_2 Y_\nu$ (J_ν и Y_ν – функции Бесселя первого и второго рода).

Так как $y(0+) = 0$, из поведения функции Y_ν , $\nu = (\alpha+2)/(2\alpha+2)$, в окрестности точки $x = 0$ следует, что $c_2 = 0$.

Отсюда следует, что

$$y(x) = x^{(\alpha+2)/2} J_\nu \left(\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\lambda}} \right)$$

(можно положить $c_1 = 1$). Так как

$$J'_\nu(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z),$$

полагая, что $z = x^{\alpha+1}/((\alpha+1)\sqrt{\lambda})$, получим

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x^{(3\alpha+2)/2} J_{\nu-1} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\lambda}} \right).$$

Из условия $y'(1-0) = 0$ следует, что

$$J_{\nu-1} \left(\frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{\lambda}} \right) = 0.$$

Пусть j_α – наименьший положительный нуль функции $J_{\nu-1}$ (т.е. функции $J_{-\alpha/(2\alpha+2)}$, так как $\nu = (\alpha + 2)/(2\alpha + 2)$).

Тогда, очевидно, $y'(x) > 0$ на отрезке $(0, 1)$. Из того, что наименьший положительный нуль функции $J_{\nu-1}$ меньше, чем наименьший положительный нуль функции J_ν (см. [4, с. 70]), следует, что $y(x) > 0$ на отрезке $(0, 1)$. Таким образом, наибольшее число λ^* (при котором задача (2) имеет решение $y \in C^2(0, 1)$ такое, что $y(x) > 0$ и $y'(x) > 0$ на $(0, 1)$) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{(\alpha + 1)\sqrt{\lambda^*}} = j_\alpha.$$

Из этого условия и из теоремы 1 следует, что при $\omega(x) = x^\alpha$, $\alpha > -1$, имеет место равенство

$$\|C_\omega\| = \frac{2}{(\alpha + 1)j_\alpha}.$$

Случай $\alpha = 0$ рассматривался в [1].

3. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы нам понадобятся ряд лемм.

Пусть A_m , $m \in \mathbb{Z}$, – операторы на пространстве $L^2(0, 1)$, определенные следующим образом:

$$A_m f(r) = \begin{cases} 2 \int_0^r \sqrt{\omega(r)\omega(t)} \left(\frac{t}{r}\right)^{1/2-m} f(t) dt, & m \leq 0, \\ 2 \int_1^r \sqrt{\omega(r)\omega(t)} \left(\frac{r}{t}\right)^{m-1/2} f(t) dt, & m \geq 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. Пусть K_0 – минимальное значение константы K такой, что неравенство

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_m e^{im\theta} (A_m \Phi_m)(r) \right|^2 dr d\theta \leq K^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_m e^{im\theta} \Phi_m(r) \right|^2 dr d\theta \quad (3)$$

выполняется при любых (конечных) значениях функции $\Phi_m \in L^2(0, 1)$. Тогда $\|C_\omega\| = K_0$. (Здесь $r \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 2\pi)$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = re^{i\theta}$. Тогда система функций

$$\{f_{mn}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}, \quad \text{где } f_{mn}(z) = e^{im\theta} J_m(j_{mn}r),$$

полна в пространстве $L^2(D, d\mu)$ [5]. Здесь $\{j_{mn}\}_{n=1}^\infty$ – множество положительных нулей функции Бесселя J_m , $m \in \mathbb{Z}$. Непосредственно вычисляется, что

$$C_\omega f_{mn}(z) = \begin{cases} 2z^{m-1} \int_1^{|z|} r^{1-m} J_m(j_{mn}r) \omega(r) dr, & m \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 2z^{m-1} \int_0^{|z|} r^{1-m} J_m(j_{mn}r) \omega(r) dr, & m \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что неравенство (3) выполняется при любом выборе функций $\Phi_m \in L^2(0, 1)$. Полагая, что Φ_m являются функциями вида

$$r \mapsto \sum_n c_{mn} \sqrt{r\omega(r)} J_m(j_{mn}r),$$

где сумма конечна, применяя (4) и принимая во внимание определение операторов A_m , мы видим, что неравенство (3) можно записать в виде

$$\int_D \left| C_\omega \left(\sum_{m,n} c_{mn} f_{mn} \right) \right|^2 d\mu \leq K^2 \int_D \left| \sum_{m,n} c_{mn} f_{mn} \right|^2 d\mu.$$

Так как система функций $\{f_{mn}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ полна в $L^2(D, d\mu)$, из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_D |C_\omega f|^2 d\mu \leq K^2 \int_D |f|^2 d\mu \quad \forall f \in L^2(D, d\mu),$$

т.е. $\|C_\omega\| \leq K$; таким образом, получаем, что

$$\|C_\omega\| \leq K_0.$$

Обратно, из неравенства

$$\left\| C_\omega \left(\sum_{m,n} c_{mn} f_{mn} \right) \right\|^2 \leq \|C_\omega\|^2 \left\| \sum_{m,n} c_{mn} f_{mn} \right\|^2,$$

где $\|\varphi\|^2 = \int_D |\varphi|^2 d\mu$, следует, что

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_m e^{im\theta} A_m \Phi_m(r) \right|^2 dr d\theta \leq \|C_\omega\|^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_m e^{im\theta} \Phi_m(r) \right|^2 dr d\theta, \quad (5)$$

где

$$\Phi_m(r) = \sum_n c_{mn} (r\omega(r))^{1/2} J_m(j_{mn}r).$$

Так как система функций $\{(r\omega(r))^{1/2} J_m(j_{mn}r)\}_{n=1}^\infty$ полна в пространстве $L^2(0, 1)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$, то неравенство (5) также выполняется для любой произвольной функции $\Phi_m \in (0, 1)$ (так как все операторы A_m ограничены на $L^2(0, 1)$). Отсюда следует неравенство

$$K_0^2 \leq \|C_\omega\|^2,$$

которое завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $T: L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ – оператор, определенный как

$$Tf(x) = \int_0^x \sqrt{\omega(x)\omega(y)} \sqrt{\frac{y}{x}} f(y) dy.$$

Тогда

$$\|C_\omega\| = 2\|T\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя равенство Парсеваля, из леммы 1 получаем

$$\|C_\omega\| = \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A_m\|.$$

Покажем, что

$$\|A_m\| \leq \|A_0\|, \quad \text{если } m \leq 0, \quad (6)$$

$$\|A_m\| \leq \|A_1\|, \quad \text{если } m \geq 1. \quad (7)$$

Пусть

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

а также пусть $m \leq 0$ и $f, g \in L^2(0, 1)$. Тогда имеем

$$(A_m f, g) = 2 \int_0^1 \int_0^1 \overline{g(x)} \theta(y-x) \sqrt{\omega(x)\omega(y)} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2-m} f(y) dx dy.$$

Следовательно, принимая во внимание неравенство

$$\theta(y-x) \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2-m} \leq \theta(y-x) \sqrt{\frac{y}{x}},$$

получаем

$$\begin{aligned} |(A_m f, g)| &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 |g(x)| |f(y)| \sqrt{\omega(x)\omega(y)} \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy \\ &= |(A_0 f, g)| \leq \|A_0\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|A_m\| \leq \|A_0\|.$$

Неравенство (7) доказывается аналогично. Таким образом,

$$\|C_\omega\| = \max\{\|A_0\|, \|A_1\|\}.$$

Из равенства $A_1^* = -A_0$ следует, что

$$\|C_\omega\| = \|A_0\| = 2\|T\|.$$

Докажем теперь теорему 1.

Из леммы 2 следует, что достаточно определить норму оператора T . Эта норма равна $\sqrt{\lambda^*}$, где λ^* – наименьшее значение константы λ , при котором неравенство

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} \left| \int_0^x \sqrt{y\omega(y)} f(y) dy \right|^2 dx \leq \lambda \int_0^1 |f|^2 dx$$

выполняется при любых $f \in L^2(0, 1)$. Если положить $g(y) = f(y)\sqrt{y\omega(y)}$, $W(x) = \omega(x)/x$ и $M(x) = 1/(x\omega(x))$, то предыдущее неравенство примет вид

$$\int_0^1 W(x) \left| \int_0^x g(y) dy \right|^2 dx \leq \lambda \int_0^1 |g(x)|^2 M(x) dx, \quad g \in L^2((0, 1), M dx). \quad (8)$$

Отметим, что оператор $T_1 f(x) = \omega(x) \int_0^x f(t) dt$ является компактным на $L^2((0, 1), M dx)$. (Кроме того, в силу условия (1), этот оператор является оператором Гильберта–Шмидта.)

Применим теорему 1 из работы [6] в случае, когда $p = r = 2$, $q = 0$, $W(x) = \omega(x)/x$, $M(x) = 1/(x\omega(x))$. Видно, что наименьшее значение λ , при котором (8) выполняется при любом $g \in L^2((0, 1), M dx)$, равно наибольшему значению λ , при котором граничная задача

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x\omega(x)} \right) + y \frac{\omega(x)}{x} = 0,$$

$$y(0_+) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{y'(x)}{\omega(x)} = 0,$$

имеет решение $y \in C^2(0, 1)$, удовлетворяющее условиям $y(x) > 0$ и $y'(x) > 0$ при $x \in (0, 1)$.

Отсюда следует утверждение теоремы.

4. Регуляризованный след преобразования Коши. Пусть Ω – ограниченная односвязная область с аналитической границей в пространстве $\mathbb{C}$. Известно [7], что преобразование Коши $C: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$,

$$Cf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dA(\xi),$$

имеет следующую асимптотику сингулярных значений:

$$s_n(C) \sim \sqrt{\frac{|\Omega|}{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $|\Omega|$ – площадь области Ω . Таким образом, мы видим, что оператор C^*C не принадлежит классу c_1 .

Теперь найдем сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n^2(C) - \mu_n),$$

где μ_n – некоторая специальным образом выбранная последовательность (либо некоторая конкретная последовательность, либо последовательность, связанная со спектром какого-либо хорошо известного оператора).

Предположим, что F – конформное отображение области Ω на единичный круг D (F можно аналитически продолжить на некоторую окрестность $\overline{\Omega}$ так, чтобы $F'(z) \neq 0$ на $\overline{\Omega}$).

Через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, обозначим собственные значения, а через $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированную систему (в $L^2(\Omega)$) соответствующих собственных функций лапласиана Дирихле, т.е. граничной задачи

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отметим, что $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L^2(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $s_n(C) \geq 2/\sqrt{\lambda_n}$, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (s_n^2(C) - 4/\lambda_n)$ и имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n^2(C) - \frac{4}{\lambda_n}) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right|^2 dA(\xi) dA(z). \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\Omega = D$ все сингулярные значения преобразования Коши были определены в работе [12]. Все они двукратные и равны $\{2/j_{mn}\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{j_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ – положительные нули функции Бесселя J_m .

Однако спектр лапласиана Дирихле для единичного круга содержит двукратные собственные значения $\{j_{mn}^2\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, так же, как и однократные собственные значения $\{j_{0n}^2\}_{n=1}^{\infty}$. Применим (9) в случае $\Omega = D$. Тогда мы можем положить $F(z) = z$ и, таким образом, получаем

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{0n}^2} = \frac{1}{\pi} \int_D \int_D \left| \frac{\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} \right|^2 dA(\xi) dA(z).$$

Легко видеть, что правая часть равна единице и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{0n}^2} = \frac{1}{4}.$$

Тот же результат был получен в работе [4, с. 72–73] с помощью теоремы Адамара о факторизации.

5. Доказательство теоремы 2. Функция Грина лапласиана Дирихле для области Ω имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{F(z) - F(\xi)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right|,$$

и, таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{F(z) - F(\xi)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right| \right) u_n(\xi) dA(\xi) = \frac{1}{\lambda_n} u_n(z).$$

Дифференцируя обе части по z , получаем

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \left[\frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} + \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right] u_n(\xi) dA(\xi) = -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \theta_n(z),$$

где

$$\theta_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\partial u_n}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что $\theta_n \in C(\overline{\Omega})$ (см. [8, с. 39–41]), а из формулы Коши–Грина [8] следует, что

$$\int_{\Omega} \theta_n(z) \overline{\theta_m(z)} dA(z) = \delta_{nm}.$$

Пусть $A, B: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ – операторы, определенные равенствами

$$Af(z) = \int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \left[\frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} + \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right] f(\xi) dA(\xi),$$

$$Bf(z) = \int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right] f(\xi) dA(\xi).$$

Следовательно, $Au_n = -(2/\sqrt{\lambda_n})\theta_n$ и, таким образом, мы получаем

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}(f, u_n)\theta_n$$

(здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$), откуда следует, что

$$s_n(A) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Для компактного оператора S через $\lambda_n(S)$ и $s_n(S)$ обозначим соответственно его n -е собственное значение и его n -е сингулярное значение.

Из леммы 7 в работе [9], теоремы Ки-Фана [2] и теоремы Бирмана–Соломяка (о росте сингулярных значений интегральных операторов с гладкими ядрами) следует, что

$$s_n(B) \sim \text{const} \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\lambda_n(B^*B) \sim \text{const} \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Покажем, что

$$A^*B = B^*A = 0. \quad (11)$$

Так как $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $L^2(\Omega)$, то достаточно показать, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$(Au_n, Bu_m) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (Bu_m, Au_n) &= \left(Bu_m, -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\theta_n \right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{\Omega} \overline{\theta_n(z)} dA(z) \int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right] u_m(\xi) dA(\xi) \\ &\quad (\text{теорема Фубини}) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{\Omega} u_n(\xi) dA(\xi) \int_{\Omega} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right] \overline{\theta_n(z)} dA(z) \\ &= -\frac{4}{\pi\lambda_n} \int_{\Omega} u_n(\xi) dA(\xi) \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\overline{u_n(z)} \left(\frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right) dA(z) \right] \\ &\quad (\text{формула Коши–Грина}) \\ &= -\frac{4}{\pi\lambda_n} \int_{\Omega} u_n(\xi) dA(\xi) \left[\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \overline{u_n(z)} \left(\frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)}F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)} \right) dz \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

потому что $u_n|_{\partial\Omega} = 0$. Так как $C = A + B$, то из (11) следует, что

$$C^*C = A^*A + B^*B, \quad (12)$$

откуда вытекает, что $C^*C \geq A^*A$. Таким образом, применяя неравенство Гейнца, мы получаем неравенство

$$\sqrt{C^*C} \geq \sqrt{A^*A},$$

откуда следует, что $s_n(C) \geq 2/\sqrt{\lambda_n}$.

Для доказательства формулы следа нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3 [10]. Если E и F – положительные компактные операторы на некотором комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таком, что $|E - F|^{\operatorname{Re} z} \in c_1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$, то $E^z - F^z \in c_1$ и

$$|E^z - F^z|_1 \leq \frac{|\sin \pi z|}{\sin \pi(\operatorname{Re} z)} \| |E - F|^{\operatorname{Re} z} \|_1.$$

(Здесь c_1 означает класс следов, символ $|S|$ обозначает $\sqrt{S^*S}$ и $|S|_1$ обозначает норму операторов S в классе следов).

Из (10) и (12) следует, что при любых $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$s_n((C^*C)^k - (A^*A)^k) = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),$$

и, таким образом, по лемме 3 функция

$$z \mapsto \operatorname{tr}((C^*C)^z - (A^*A)^z) = \operatorname{tr}(((C^*C)^k)^{z/k} - ((A^*A)^k)^{z/k})$$

является аналитической при $1/(k+1) < \operatorname{Re}(z/k) < 1$, т.е. при

$$\frac{k}{k+1} < \operatorname{Re} z < k.$$

Следовательно, функция $z \mapsto \operatorname{tr}((C^*C)^z - (A^*A)^z)$ является аналитической при z таких, что $\operatorname{Re} z > 1/2$.

Так как $\lambda_n(A^*A) = 4/\lambda_n$ и асимптотика последовательности λ_n известна (формула Вейля), мы имеем

$$\lambda_n(A^*A) = \frac{|\Omega|}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда и из (12) в соответствии с теоремой 6.3 в работе [11, с. 48] следует, что

$$\lambda_n(C^*C) = \frac{|\Omega|}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^z(C^*C) - \lambda_n^z(A^*A)) \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^z(C^*C) - \left(\frac{4}{\lambda_n} \right)^z \right) \right).$$

Из упомянутой выше асимптотики последовательностей $\lambda_n(A^*A)$ и $\lambda_n(C^*C)$ следует, что Ψ является аналитической функцией при z таких, что $\operatorname{Re} z \geq 2/3$.

Если $\operatorname{Re} z > 1$, то оба оператора $(C^*C)^z$ и $(A^*A)^z$ принадлежат классу c_1 и, таким образом,

$$\operatorname{tr}((C^*C)^z - (A^*A)^z) = \operatorname{tr}((C^*C)^z) - \operatorname{tr}((A^*A)^z) = \Psi(z).$$

Отсюда в силу теоремы единственности следует, что

$$\Psi(z) \equiv \operatorname{tr}((C^*C)^z - (A^*A)^z)$$

при z таких, что $\operatorname{Re} z > 2/3$. Следовательно, для любых $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(s_n^{2k}(C) - \left(\frac{4}{\lambda_n} \right)^k \right) = \operatorname{tr}((C^*C)^k - (A^*A)^k).$$

В частности, при $k = 1$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(s_n^2(C) - \frac{4}{\lambda_n} \right) = \operatorname{tr}(C^*C - A^*A) = \operatorname{tr} B^*B.$$

Так как

$$\operatorname{tr} B^*B = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{z - \xi} - \frac{F'(z)}{F(z) - F(\xi)} - \frac{\overline{F(\xi)} F'(z)}{1 - \overline{F(\xi)} F(z)} \right|^2 dA(\xi) dA(z),$$

из предыдущего неравенства получаем (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Anderson J. M., Hinkkanen A. The Cauchy transform on bounded domain // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. P. 179–185.
- [2] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [3] Watson G. N. A Treatise of the Theory of Bessel Functions. 2nd edition. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1962.
- [4] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [5] Dostanić M. R. Norm estimate of the Cauchy transform on $L^p(\Omega)$ // Integral Equations Operator Theory. (to appear).
- [6] Boyd D. W. Best constants in a class of integral inequalities // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 2. P. 367–383.
- [7] Dostanić M. R. The properties of the Cauchy transform on a bounded domain // J. Operator Theory. 1996. V. 36. P. 233–247.
- [8] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
- [9] Dostanić M. R. Spectral properties of the Cauchy operator and its product with Bergman's projection on a bounded domain // Proc. London Math. Soc. (3). 1998. V. 76. P. 667–684.
- [10] Dostanić M. R. Spectral properties of the operator of Riesz potential type // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 8. P. 2291–2297.
- [11] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. Киев: Наукова думка, 1984.
- [12] Anderson J. M., Khavinson D., Lomonosov V. Spectral properties of some integral operators arising in potential theory // Quart. J. Math. (Oxford). Ser. 2. 1992. P. 387–407.