Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Дубицкас, К. Смит, О длине суммы и произведения алгебраических чисел, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 854–860

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:23:55

УДК 511

О ДЛИНЕ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. Дубицкас, К. Смит

В настоящей работе рассматриваются произведения длин алгебраических чисел, сумма или произведение которых является фиксированным алгебраическим числом. Они используются для построения новой функции высоты алгебраических чисел, с помощью которой вводится метрика на множестве всех алгебраических чисел, индуцирующая дискретную топологию.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}^*$ обозначают соответственно множество натуральных чисел, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле алгебраических чисел и мультипликативную группу алгебраических чисел, отличных от нуля. Через $L(\alpha)$ мы будем обозначать *длину* алгебраического числа α , т.е. сумму модулей коэффициентов его минимального многочлена в $\mathbb{Z}[x]$. На множестве всех многочленов с комплексными коэффициентами $L(f)$ является очень удобной функцией высоты (сложности многочлена), так как верны неравенства $L(f + g) \leq L(f) + L(g)$ и $L(fg) \leq L(f)L(g)$. Однако на множестве всех алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ эти свойства длины $L(\alpha)$ не выполняются.

В работах [1], [2] рассматривались новые функции высоты алгебраических чисел, основанные на мере Малера и обычной высоте алгебраического числа, используя которые можно построить метрику на некоторых факторгруппах группы $\overline{\mathbb{Q}}^*$. Напомним, что *мерой Малера* алгебраического числа α называется произведение старшего коэффициента его минимального многочлена в $\mathbb{Z}[x]$ и всех его корней, по модулю больших единицы. Мера Малера обозначается через $M(\alpha)$, а через $h(\alpha) = (1/d) \log M(\alpha)$, где $d = \deg \alpha$, мы будем обозначать логарифмическую высоту Вейля числа α . Ранее, Шмидт [3] заметил, что $h(\alpha/\beta)$ является метрикой на факторгруппе $\overline{\mathbb{Q}}^*/\Omega$, определяющей расстояние между $\alpha\Omega$ и $\beta\Omega$, где Ω – мультипликативная группа всех корней из единицы. В [1] показано, как на этом же множестве построить метрику, используя так называемую метрическую меру Малера. При этом получаемая топология на $\overline{\mathbb{Q}}^*/\Omega$ будет дискретной тогда и только тогда, когда верна гипотеза Лемера. Позднее эта же идея была применена и для построения метрической высоты, основанной на обычной высоте алгебраического числа (см. [2], [4]).

Целью настоящей работы является построение метрики с использованием длины L . Это построение кажется наиболее естественным, так как расстояние будет введено на $\overline{\mathbb{Q}}$,

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Литовского фонда студий и науки.

а не на какой-нибудь факторгруппе $\overline{\mathbb{Q}}^*$. Действительно, при любом $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ определим $\mathcal{L}(\alpha)$ по формуле

$$\mathcal{L}(\alpha) = \min L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m),$$

где минимум берется по каждому $m \in \mathbb{N}$ и по любым $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$, удовлетворяющим условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha$. Легко видеть, что тогда

$$\varrho(\alpha, \beta) = \log \mathcal{L}(\alpha - \beta)$$

определяет расстояние на $\overline{\mathbb{Q}}$. Ясно, что эта метрика индуцирует дискретную топологию, так как расстояние между двумя различными алгебраическими числами будет $\geq \log 2$.

Иногда более удобно рассматривать представления α в виде произведения алгебраических чисел, а не их суммы. Для того чтобы определить функцию расстояния, мы вычтем из длины единицу и определим мультипликативный аналог этой метрики на факторгруппе $\overline{\mathbb{Q}}^*/\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ является мультипликативной группой всех корней из единицы степени 2^m , $m = 0, 1, 2, \dots$. Определим $\mathcal{L}^*(\alpha)$ по формуле

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = \min (L(\alpha_1) - 1)(L(\alpha_2) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1),$$

где минимум берется по каждому $m \in \mathbb{N}$ и по любым $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$, удовлетворяющим условию $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m = \alpha$. Тогда

$$\varrho^*(\alpha\mathcal{U}, \beta\mathcal{U}) = \log \mathcal{L}^*\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

определяет расстояние на $\overline{\mathbb{Q}}^*/\mathcal{U}$. (Действительно, неравенство треугольника очевидно, а $L(\alpha) = 2$ эквивалентно условию $\alpha \in \mathcal{U}$.) Важным обстоятельством является то, что эта метрика тоже индуцирует дискретную топологию, так как расстояние между двумя различными смежными классами $\alpha\mathcal{U}$ и $\beta\mathcal{U}$, где $\alpha, \beta \neq 0$ и $\alpha/\beta \notin \mathcal{U}$, всегда будет $\geq \log 2$.

2. Основные результаты. Очевидно, что $\mathcal{L}(\alpha) \leq L(\alpha)$ и $\mathcal{L}^*(\alpha) \leq L(\alpha) - 1$. Насколько малы могут быть величины $\mathcal{L}(\alpha)$ и $\mathcal{L}^*(\alpha)$? Пример числа $\beta = (-2)^{-1/d} - 1/N$, где $d \in \mathbb{N}$, а N — большое нечетное положительное число, показывает, что

$$\mathcal{L}(\beta) \leq L((-2)^{-1/d})L\left(-\frac{1}{N}\right) = 3(N+1).$$

При этом $L(\beta) = 2(N+1)^d + N^d$, так что $\mathcal{L}(\alpha)$ может быть значительно меньше $L(\alpha)$. Следующая теорема дает оценки величин $\mathcal{L}(\alpha)$ и $\mathcal{L}^*(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 1. Если α — алгебраическое число степени d , то

$$L(\alpha)^{1/d} \leq \mathcal{L}(\alpha) \leq L(\alpha), \quad (L(\alpha) - 1)^{1/d} \leq \mathcal{L}^*(\alpha) \leq L(\alpha) - 1.$$

Кроме того, $\mathcal{L}(\alpha) \geq \lceil \alpha \rceil + 1$ и $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq \lceil \alpha \rceil$.

Через $\lceil \alpha \rceil$ здесь обозначен максимальный модуль среди всех сопряженных числа α над полем $\mathbb{Q}$.

Как уже замечено выше, неравенства $\mathcal{L}(\alpha) \leq L(\alpha)$ и $\mathcal{L}^*(\alpha) \leq L(\alpha) - 1$ очевидны. Неравенство $\mathcal{L}(\alpha) \geq L(\alpha)^{1/d}$ следует из первой части следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ является числом степени d , то

$$L(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^{1/d} \leq L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m).$$

Также, если $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ является числом степени d , то

$$2^{1-1/d}L(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m).$$

Доказательства теорем 1 и 2 изложены в п. 4.

Отметим, что если $d = 1$, т.е. $\alpha \in \mathbb{Q}$, то из теоремы 1 следует, что $\mathcal{L}(\alpha) = L(\alpha)$ и $\mathcal{L}^*(\alpha) = L(\alpha) - 1$. При $d = 1$ из теоремы 2 получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Если $r \in \mathbb{Q}$ представлено в виде суммы или произведения произвольных алгебраических чисел, то произведение их длин не превышает длины числа r .

Интересным является вопрос, насколько точны оценки

$$\mathcal{L}(\alpha) \geq L(\alpha)^{1/d} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^*(\alpha) \geq (L(\alpha) - 1)^{1/d}.$$

Наш пример числа β показывает, что если верно неравенство $\mathcal{L}(\alpha) \geq c_d L(\alpha)^{1/d}$, то $c_d \leq 3^{1-1/d}$. Более того, если d – степень двойки, то многочлен $x^d + 1$ неразложим в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Для любого из его корней $\zeta \in \mathcal{U}$ верно неравенство $\mathcal{L}(\zeta) \leq L(\zeta) = 2$. Следовательно, $c_d \leq 2^{1-1/d}$, если d – степень двойки. Ясно также, что $\mathcal{L}^*(\zeta) \leq L(\zeta) - 1 = 1$ и $\mathcal{L}^*(\zeta) \geq (L(\zeta) - 1)^{1/d} = 1$. Таким образом, неравенство $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq (L(\alpha) - 1)^{1/d}$ в теореме 1 не улучшаемо, если d – целая степень двойки. В остальных случаях, пример $\gamma = 2^{1/d}$ показывает, что если верно неравенство $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq c_d^*(L(\alpha) - 1)^{1/d}$, то $c_d^* \leq 2^{1-1/d}$. По-видимому, неравенства $\mathcal{L}(\alpha) \geq c_d L(\alpha)^{1/d}$, где $c_d = 2^{1-1/d}$ при $d = 2^s$ и $c_d = 3^{1-1/d}$ при $d \neq 2^s$, а также $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq c_d^*(L(\alpha) - 1)^{1/d}$, где $c_d^* = 2^{1-1/d}$ при $d \neq 2^s$, верны.

3. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1. Если $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, то $M(\alpha) \leq L(\alpha) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – основной многочлен числа α . По неравенству Гончалвеса (см., например, [5, с. 244] или [6], где приведен более простой вариант этого неравенства)

$$(M(\alpha) + |a_d a_0| M(\alpha)^{-1})^2 - 2|a_d a_0| = M(\alpha)^2 + |a_d a_0|^2 M(\alpha)^{-2} \leq |a_d|^2 + \dots + |a_1|^2 + |a_0|^2.$$

Положим $S = |a_{d-1}|^2 + \dots + |a_1|^2$. Из неравенства следует, что

$$M(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{S + (|a_d| + |a_0|)^2} + \sqrt{S + (|a_d| - |a_0|)^2}).$$

Ввиду неравенства $\sqrt{S} \leq |a_{d-1}| + \dots + |a_1| = L(\alpha) - |a_d| - |a_0|$ легко видеть, что первый квадратный корень не превышает $L(\alpha)$, а второй не превышает

$$\sqrt{S} + ||a_d| - |a_0|| \leq L(\alpha) - |a_d| - |a_0| + ||a_d| - |a_0|| = L(\alpha) - 2 \min\{|a_d|, |a_0|\}.$$

Таким образом,

$$M(\alpha) \leq L(\alpha) - \min\{|a_d|, |a_0|\} \leq L(\alpha) - 1.$$

ЛЕММА 2. Если $r \in \mathbb{Q}$ и $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ имеет степень d , то

$$L(r + \alpha)^{1/d} \leq L(r)L(\alpha)^{1/d} \quad \text{и} \quad L(r\alpha)^{1/d} \leq M(r)L(\alpha)^{1/d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что $L(0) = M(0) = 1$, неравенства очевидны, если $r = 0$ или $\alpha = 0$. Пусть $r = u/v \neq 0$, где u и v — взаимно простые целые числа. Тогда $L(r) = |u| + |v|$ и $M(r) = \max\{|u|, |v|\}$.

Если $a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ — основной многочлен числа α , то $u/v + \alpha$ — корень многочлена

$$Q(x) = a_d(vx - u)^d + \dots + a_1 v^{d-1}(vx - u) + a_0 v^d \in \mathbb{Z}[x].$$

Поскольку $\deg(u/v + \alpha) = \deg \alpha = d$, то основным многочленом числа $u/v + \alpha$ будет или сам $Q(x)$, или его делитель степени d . Поэтому

$$\begin{aligned} L\left(\frac{u}{v} + \alpha\right) &\leq L(Q) \leq |a_d|(|v| + |u|)^d + \dots + |a_1||v|^{d-1}(|v| + |u|) + |a_0||v|^d \\ &\leq (|a_d| + \dots + |a_1| + |a_0|)(|v| + |u|)^d = L(\alpha)L\left(\frac{u}{v}\right)^d. \end{aligned}$$

Извлекая корень степени d , мы получим первое неравенство.

Во втором случае число $u\alpha/v$ является корнем многочлена

$$R(x) = a_d v^d x^d + \dots + a_1 v u^{d-1} x + a_0 u^d \in \mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, как и выше,

$$\begin{aligned} L\left(\frac{u\alpha}{v}\right) &\leq L(R) \leq |a_d||v|^d + \dots + |a_1||v||u|^{d-1} + |a_0||u|^d \\ &\leq (|a_d| + \dots + |a_1| + |a_0|) \max\{|u|, |v|\}^d = L(\alpha)M\left(\frac{u}{v}\right)^d. \end{aligned}$$

Извлекая корень степени d , мы получим второе неравенство.

ЛЕММА 3. Если $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, то $L(\alpha) \geq \sqrt[d]{|\alpha|} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если α и α' — сопряженные алгебраические числа, т.е. оба являются корнями основного многочлена для α , $a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то $L(\alpha) = L(\alpha')$. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$L(\alpha) \geq |\alpha| + 1.$$

Оно очевидно при $\alpha = 0$ и при $0 < |\alpha| \leq 1$. Предположим, что $|\alpha| > 1$. Из равенства $-a_d = a_{d-1}/\alpha + a_{d-2}/\alpha^2 + \dots + a_0/\alpha^d$ следует, что

$$|a_d| \leq \left| \frac{a_{d-1}}{\alpha} \right| + \left| \frac{a_{d-2}}{\alpha^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{\alpha^d} \right| \leq \frac{|a_{d-1}| + \dots + |a_0|}{|\alpha|}.$$

Теперь получаем, что

$$L(\alpha) = |a_d| + |a_{d-1}| + \dots + |a_0| \geq |a_d| + |a_d||\alpha| \geq |\alpha| + 1.$$

Лемма доказана.

4. Оценки снизу для произведения длин. Начнем с доказательства неравенства

$$L(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)^{1/d} \leq L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m),$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ — алгебраическое число степени d . Если хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ рационально, то, используя неравенство $L(r + \alpha)^{1/d} \leq L(r)L(\alpha)^{1/d}$ из леммы 2, можно применить индукцию по m . Поэтому предположим, что $m \geq 2$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$. Обозначим степени чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ через $d_1, d_2, \dots, d_m \geq 2$. Используя хорошо известное неравенство $L(\alpha) \leq 2^d M(\alpha)$, а также неравенство

$$h(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) \leq h(\alpha_1) + h(\alpha_2) + \cdots + h(\alpha_m) + \log m$$

(см., например, [7, лемма 3.7]), мы получим, что

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)^{1/d} &\leq 2M(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)^{1/d} \\ &\leq 2mM(\alpha_1)^{1/d_1}M(\alpha_2)^{1/d_2} \cdots M(\alpha_m)^{1/d_m}. \end{aligned}$$

Однако по лемме 1 при любом $j = 1, 2, \dots, m$

$$M(\alpha_j)^{1/d_j} \leq M(\alpha_j)^{1/2} \leq (L(\alpha_j) - 1)^{1/2} \leq \frac{L(\alpha_j)}{2}.$$

Следовательно,

$$L(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)^{1/d} \leq \frac{2m}{2^m} L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m),$$

что и доказывает требуемое неравенство, так как $2m \leq 2^m$ при $m \geq 2$.

Для доказательства неравенства

$$2^{1-1/d} L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m),$$

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ — алгебраическое число степени d , мы сначала заметим, что оно очевидно, если $\alpha = 0$ или $m = 1$. Если $\alpha \neq 0$, то и все $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ отличны от нуля. Если хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, например α_m , рационально, то, применяя леммы 1 и 2, получим, что

$$L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq M(\alpha_m)L(\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1})^{1/d} \leq (L(\alpha_m) - 1)L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1})^{1/d}.$$

Следовательно,

$$2^{1-1/d} L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} < 2^{1-1/d} L(\alpha_m)L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1})^{1/d},$$

и требуемое неравенство легко получается индукцией по m . Поэтому предположим, что $m \geq 2$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — алгебраические числа степеней соответственно $d_1, d_2, \dots, d_m \geq 2$. Тогда, пользуясь неравенствами $L(\alpha) \leq 2^d M(\alpha)$ и

$$h(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m) \leq h(\alpha_1) + h(\alpha_2) + \cdots + h(\alpha_m)$$

(см. [7, свойство 3.3]), нетрудно убедиться в том, что

$$L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq 2M(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq 2M(\alpha_1)^{1/d_1} M(\alpha_2)^{1/d_2} \cdots M(\alpha_m)^{1/d_m}.$$

Как и выше, для любого $j = 1, 2, \dots, m$

$$M(\alpha_j)^{1/d_j} \leq M(\alpha_j)^{1/2} \leq (L(\alpha_j) - 1)^{1/2},$$

поэтому

$$L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq 2((L(\alpha_1) - 1)(L(\alpha_2) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1))^{1/2}$$

при любом $m \geq 2$ и при любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. Требуемое неравенство теперь следует из оценок

$$(L(\alpha_j) - 1)^{1/2} \leq \frac{L(\alpha_j)}{2},$$

где $j = 1, 2, \dots, m$, $m \geq 2$, поскольку

$$2^{1-1/d} \cdot 2 \cdot 2^{-m} = 2^{2-m-1/d} < 1.$$

Таким образом, теорема 2 доказана. Из первого неравенства теоремы 2 и определения $\mathcal{L}(\alpha)$ мы получаем, что $L(\alpha)^{1/d} \leq \mathcal{L}(\alpha) \leq L(\alpha)$. Неравенство $\mathcal{L}^*(\alpha) \leq L(\alpha) - 1$ очевидно. Так как $\mathcal{L}^*(\alpha\zeta) = \mathcal{L}^*(\alpha)$ при любом $\zeta \in \mathcal{U}$, то для доказательства неравенства $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq (L(\alpha) - 1)^{1/d}$ достаточно показать, что

$$(L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m) - 1)^{1/d} \leq (L(\alpha_1) - 1)(L(\alpha_2) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1)$$

при любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \notin \mathcal{U}$. Здесь $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ — алгебраическое число степени d . Это неравенство очевидно, если $\alpha = 0$ или $m = 1$. Более того, как и выше, не ограничивая общности, можно считать, что все $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ иррациональны, ибо при $\alpha_m \in \mathbb{Q}$

$$(L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m) - 1)^{1/d} < L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq (L(\alpha_m) - 1)L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1})^{1/d}.$$

Однако при этих условиях нами уже получено неравенство $L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq 2((L(\alpha_1) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1))^{1/2}$. Так как $\alpha_j \notin \mathcal{U} \cup \{0\}$, то $L(\alpha_j) \geq 3$ для каждого $j = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, $(L(\alpha_j) - 1)^{1/2} \leq (L(\alpha_j) - 1)/\sqrt{2}$ и

$$(L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m) - 1)^{1/d} < L(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^{1/d} \leq 2^{1-m/2} (L(\alpha_1) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1).$$

Это доказывает требуемое неравенство, поскольку $m \geq 2$.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что $\mathcal{L}(\alpha) \geq \overline{|\alpha|} + 1$ и $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq \overline{|\alpha|}$. Если $\mathcal{L}(\alpha) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m)$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$, то из того, что любое сопряженное числа α , скажем α' , можно записать как сумму чисел сопряженных соответственно к $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, следует равенство $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha')$. Аналогично, $\mathcal{L}^*(\alpha) = \mathcal{L}^*(\alpha')$.

Поэтому для первого неравенства достаточно доказать, что $\mathcal{L}(\alpha) \geq |\alpha| + 1$. Для этого мы воспользуемся леммой 3 и представлением $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha) &= L(\alpha_1)L(\alpha_2) \cdots L(\alpha_m) \geq (|\alpha_1| + 1)(|\alpha_2| + 1) \cdots (|\alpha_m| + 1) \\ &\geq |\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m| + 1 = |\alpha| + 1. \end{aligned}$$

Неравенство $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq \overline{|\alpha|}$ следует из неравенства $\mathcal{L}^*(\alpha) \geq |\alpha|$, которое получается аналогичным образом: если $\mathcal{L}^*(\alpha) = (L(\alpha_1) - 1)(L(\alpha_2) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1)$, где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, то

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = (L(\alpha_1) - 1)(L(\alpha_2) - 1) \cdots (L(\alpha_m) - 1) \geq |\alpha_1| |\alpha_2| \cdots |\alpha_m| = |\alpha|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dubickas A., Smyth C. J. On the metric Mahler measure // J. Number Theory. 2001. V. 86. P. 368–387.
- [2] Dubickas A., Smyth C. J. On metric heights // Period. Math. Hungar. 2003. V. 42. P. 135–155.
- [3] Schmidt W. Heights of points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$ // Contemp. Math. 1998. V. 210. P. 97–99.
- [4] Dubickas A. Asymptotic density of surds with stable height // Acta Appl. Math. 2003. V. 78. P. 99–102.
- [5] Schinzel A. Polynomials with Special Regard to Reducibility. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [6] Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. М.: Изд-во Московского ун-та, 1981.
- [7] Waldschmidt M. Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Berlin–New York: Springer-Verlag, 2000.

(А. Дубицкас) Вильнюсский университет, Литва

Поступило

(К. Смит) Университет Эдинбурга, Великобритания

02.04.2004

E-mail: arturas.dubickas@maf.vu.lt, chris@maths.ed.ac.uk