Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Хэкало, Пошаговая калибровочная эквивалентность
дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2005,
том 77, выпуск 6, 917–929

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:21:08

УДК 517.944

ПОШАГОВАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. П. Хэкало

В работе изучается зависимость между понятием калибровочной эквивалентности и решениями некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эта связь основана на пошаговой калибровочной эквивалентности.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Одним из методов построения дифференциальных операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса [1], [2], явились деформации априори гюйгенсовых операторов. Первые шаги в этом направлении фактически осуществили Штельмахер и Лагнезе [3], [4].

В работах [1], [5]–[7] было отмечено, что известные примеры деформаций гюйгенсовых операторов подчиняются так называемому свойству калибровочной эквивалентности дифференциальных операторов [1], [7]. Это свойство является своеобразным “конкурентом” критерию Адамара для проверки оператора на выполнение принципа Гюйгенса (критерий Адамара состоит в том, что начиная с некоторого номера, соответствующий оператору анзац имеет нулевые коэффициенты).

В отличие от критерия Адамара свойство калибровочной эквивалентности обладает следующим преимуществом: применение анзаца Адамара возможно лишь к гиперболическим дифференциальным операторам второго порядка и сравнительно небольшому классу других операторов [8], а на калибровочную эквивалентность можно исследовать произвольные дифференциальные операторы. Заметим, однако, что проверка калибровочной эквивалентности операторов затруднительна, и ее наличие дает лишь достаточное условие выполнения принципа Гюйгенса.

В работе [9] на основе теории биспектральных операторов, решена задача о калибровочной эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов.

В настоящей заметке предлагается способ пошаговой калибровочной эквивалентности, применяемый к линейным дифференциальным операторам в частных производных, зависящим от неотрицательных целых параметров.

Фактически, этот способ позволяет свести вопрос о калибровочной эквивалентности дифференциальных операторов к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При решении такой системы в явном виде получаются коэффициенты изодеформаций априори гюйгенсовых операторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00248, и Фонда содействия отечественной науке.

2. Определение и свойства калибровочной эквивалентности. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – произвольные операторы на $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ‘ $\circ$ ’ – знак композиции операторов.

Оператором *косого присоединенного действия* [10], [11] называется оператор $\text{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^k \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определяемый следующим рекуррентным соотношением:

$$\text{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^0 \mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \text{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^k \mathcal{C} = \text{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{k-1} (\mathcal{A} \circ \mathcal{C} - \mathcal{C} \circ \mathcal{B}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [10]. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_2$ называется *M-калибровочно эквивалентным* оператору $\mathcal{L}_1$ на $\mathbb{R}^N$ (при помощи функции f), если найдутся натуральное число M и ненулевая бесконечно дифференцируемая функция f такие, что

$$\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^{M+1} f = 0.$$

Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – линейные дифференциальные операторы на $\mathbb{R}^N$ и

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K_2} u_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – мультииндекс целых неотрицательных чисел; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, K_i – степень оператора $\mathcal{L}_i$, $u(x) = \{u_\alpha(x)\}$ – некоторые кусочно-гладкие коэффициенты оператора $\mathcal{L}_2$; $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}$. Тогда оператор $\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^{M+1} f$ можно записать в неявной форме

$$\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^{M+1} f = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} U_{\alpha, \mathcal{L}_1} (\partial^\beta u(x), \partial^\gamma f, M) \partial^\alpha,$$

где $\partial^\beta u(x)$ – частные производные порядка $|\beta| \leq M \cdot K_2$ коэффициентов оператора $\mathcal{L}_2$, $\partial^\gamma f$ – частные производные порядка $|\gamma| \leq M \cdot K_2$ функции f .

Таким образом, в случае, когда по заданному оператору $\mathcal{L}_1$ надо построить ему калибровочно эквивалентный оператор $\mathcal{L}_2$, нужно решить систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$U_{\alpha, \mathcal{L}_1} (\partial^\beta u(x), \partial^\gamma f, M) = 0, \quad |\alpha| \leq K \leq (\max\{K_1, K_2\})^{M+1},$$

на коэффициенты оператора $\mathcal{L}_2$, функцию f и параметр M . В настоящей статье это обстоятельство будет играть главную роль в построении калибровочно эквивалентных операторов.

Сформулируем основные утверждения о калибровочной эквивалентности операторов. Пусть $\kappa(\mathcal{L})$ – главный символ оператора $\mathcal{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – линейные дифференциальные операторы. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\kappa(\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^m f) = f(\kappa(\mathcal{L}_2) - \kappa(\mathcal{L}_1))^m.$$

Действительно, оператор косого присоединенного действия можно записать в следующей форме:

$$\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^m f = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \mathcal{L}_2^{m-k} \circ f \circ \mathcal{L}_1^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\kappa(\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^m f) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \kappa(\mathcal{L}_2^{m-k}) \kappa(f) \kappa(\mathcal{L}_1^k) \\ &= \kappa(f) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \kappa(\mathcal{L}_2)^{m-k} \kappa(\mathcal{L}_1)^k = f(\kappa(\mathcal{L}_2) - \kappa(\mathcal{L}_1))^m.\end{aligned}$$

Следующее утверждение показывает, что калибровочно эквивалентными если и могут быть, то лишь оператор и его деформация членами меньшего порядка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если линейные операторы $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_1$ калибровочно эквивалентны, то $\kappa(\mathcal{L}_2) = \kappa(\mathcal{L}_1)$.*

Утверждение 2 следует из утверждения 1. Оно также очевидно следует и из определения калибровочной эквивалентности:

$$\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^{M+1} f = \mathcal{L}_2 \circ (\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f) - (\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f) \circ \mathcal{L}_1 = 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [5]. *Оператор $\mathcal{L}_2$ M -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{L}_1$ (при помощи функции f) тогда и только тогда, когда найдется ненулевая бесконечно дифференцируемая функция f такая, что дифференциальный оператор*

$$\mathcal{D}_t^M(f) = \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} (\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^k f) t^k$$

со спектральным параметром $t \in \mathbb{R}$ будет сплетающим для операторов $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_1$ на $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_2 \right) \circ \mathcal{D}_t^M(f) = \mathcal{D}_t^M(f) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_1 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{L}_1$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^N$, и пусть ξ – фиксированная точка $\mathbb{R}^N$, $\langle \xi, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^N$. Тогда из того, что оператор $\mathcal{L}_2$ M -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{L}_1$ с помощью некоторой фиксированной функции f следует, что функция

$$\psi_{\xi, f}(x) = \text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f[e^{\langle \xi, x \rangle}]$$

является собственной функцией оператора $\mathcal{L}_2$. Собственное значение при этом есть значение символа $\tilde{\kappa}(\mathcal{L}_1)$ оператора $\mathcal{L}_1$ в точке ξ . В самом деле,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2[\psi_{\xi, f}(x)] &= \mathcal{L}_2[\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f[e^{\langle \xi, x \rangle}]] = (\mathcal{L}_2 \circ \text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f)[e^{\langle \xi, x \rangle}] \\ &= (\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f \circ \mathcal{L}_1)[e^{\langle \xi, x \rangle}] = \text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f[\mathcal{L}_1[e^{\langle \xi, x \rangle}]] \\ &= \text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^M f[\tilde{\kappa}(\mathcal{L}_1)(\xi) \cdot e^{\langle \xi, x \rangle}] = \tilde{\kappa}(\mathcal{L}_1)(\xi) \cdot \psi_{\xi, f}(x).\end{aligned}$$

Далее, для оператора $\mathcal{L}_1$ на $\mathbb{R}^N$ пусть $\{\Phi_1^{(\lambda)}(x), x \in \mathbb{R}^N\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ – семейство целых по λ обобщенных функций, задающее ядро Рисса:

$$\mathcal{L}_1 \Phi_1^{(\lambda)}(x) = \Phi_1^{(\lambda-1)}(x), \quad \Phi_1^{(0)}(x) = \delta(x),$$

где δ – дельта-функция Дирака. Это значит, что для операторов $\mathcal{L}_1^k$, $k \in \mathbb{N}$, известны фундаментальные решения

$$\mathcal{L}_1^k \Phi_1^{(k)}(x - \xi) = \delta(x - \xi),$$

где $\xi \in \mathbb{R}^N$ – фиксированная точка.

Важность понятия калибровочной эквивалентности заключается в следующем: построение фундаментального решения деформированного оператора в случае его калибровочной эквивалентности с исходным можно осуществлять на основе фундаментальных решений степеней исходного оператора (это построение возможно в явном виде).

Следующее утверждение фактически получено в [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть оператор $\mathcal{L}_2$ M -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{L}_1$. Тогда семейство

$$\{\mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(\lambda)}(x, \xi; t)|_{t=0}, x, \xi \in \mathbb{R}^N; t \in \mathbb{R}\}_{\lambda \in \mathbb{C}},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\partial_t}^M(f) &= \sum_{k=0}^M \frac{(-1)^k}{k!} (\text{ad}_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1}^k f) \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \\ \Phi_2^{(\lambda)}(x, \xi; t) &= \frac{1}{f(\xi)} \sum_{i=0}^Q \binom{\lambda + i - 1}{i} \Phi_1^{(\lambda+i)}(x - \xi) t^i \end{aligned}$$

(Q достаточно велико) задает ядро Рисса для оператора $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(\lambda)}(x, \xi; t)|_{t=0}) &= \mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(\lambda-1)}(x, \xi; t)|_{t=0}, \\ \mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(0)}(x, \xi; t)|_{t=0} &= \delta(x - \xi). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $\mathcal{L}_2^k$, $k \in \mathbb{N}$, имеет фундаментальным решением обобщенную функцию $\mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(k)}(x, \xi; t)|_{t=0}$:

$$\mathcal{L}_2^k(\mathcal{H}_{\partial_t}^M(f)\Phi_2^{(k)}(x, \xi; t)|_{t=0}) = \delta(x - \xi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда оператор $\mathcal{L}_1$ имеет ядро Рисса, необходимое и достаточное условие калибровочной эквивалентности операторов $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_1$ состоит в существовании у оператора $\mathcal{L}_2$ “пси-функции” $\psi_\xi(x) = F_\xi(x)e^{\langle \xi, x \rangle}$ с рациональным ядром $F_\xi(x)$.

3. Основной результат. Если оператор $\mathcal{L}_1$ и некоторые его степени удовлетворяют принципу Гюйгенса, то утверждение 3 дает достаточные условия выполнения принципа Гюйгенса деформированного оператора $\mathcal{L}_2$. Таким образом, для конструирования новых операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, достаточно решить вопрос об эффективном построении калибровочно эквивалентных операторов.

В работах [1], [2], [5] этот вопрос решается путем привлечения теории операторов Данкла, связанных с корневыми системами в $\mathbb{R}^N$ и дальнейшей проверкой критериев калибровочной эквивалентности. На этой основе в указанных работах получены значительные результаты в области изогюйгенсовых деформаций.

В следующей теореме, анонсированной в [12], [13], описываются условия пошаговой калибровочной эквивалентности операторов, зависящих от неотрицательных целых параметров.

ТЕОРЕМА 1 (достаточное условие калибровочной эквивалентности). Пусть $\mathcal{R}_n$ – линейный дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^N$, зависящий от неотрицательного целого параметра n . Если для любого $k = 1, 2, \dots, n$ оператор $\mathcal{R}_k$ 1-калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_{k-1}$ при помощи функции f , т.е.

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k-1}}^{1+1} f = 0,$$

то оператор $\mathcal{R}_n$ n -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_0$ при помощи функции f^n

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0}^{n+1} f = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $k = 1, 2, \dots, n$ выполняется равенство

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k-1}}^{1+1} f = 0.$$

Тогда для спектрального параметра $t \in \mathbb{R}$ согласно утверждению 3 имеем на $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_k \right) \circ (f + t(\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k-1}} f)) = (f + t(\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k-1}} f)) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_{k-1} \right).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_n \right) \circ \mathcal{T}_t^n(f) = \mathcal{T}_t^n(f) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_0 \right),$$

где сплетающий оператор $\mathcal{T}_t^n(f)$ задается равенством

$$\mathcal{T}_t^n(f) = \prod_{k=1}^n (f + t(\text{ad}_{\mathcal{R}_{n-k+1}, \mathcal{R}_{n-k}} f))$$

со свободным от t оператором $\mathcal{T}_0^n(f) = f^n$.

Выполнение последнего сплетающего соотношения по утверждению 3 влечет выполнение равенства

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0}^{n+1} \mathcal{T}_0^n(f) = 0,$$

что и утверждалось.

Теорема 1 может быть естественным образом обобщена на случай нескольких целых неотрицательных параметров.

Пусть $\bar{1}_i$ – мультииндекс, состоящий из нулевых элементов, за исключением единицы на i -й позиции.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $\bar{n}$ – мультииндекс фиксированных неотрицательных целых параметров, $\bar{n} = (n_1, \dots, n_s)$, $s = 1, 2, \dots$, $\mathcal{R}_{\bar{n}}$ – линейный дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^N$, зависящий от $\bar{n}$. Если для любых $k_i = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, s$, оператор $\mathcal{R}_{\bar{k}}$ 1-калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_{\bar{k} - \bar{1}_i}$ при помощи функции f_i , то

- 1) оператор $\mathcal{R}_{\bar{n}}$ n_i -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_{\bar{n} - n_i \cdot \bar{1}_i}$, $i = 1, \dots, s$, при помощи функции $f_i^{n_i}$;
- 2) оператор $\mathcal{R}_{\bar{n}}$ $|\bar{n}|$ -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_{\bar{0}}$ при помощи функции $f^{\bar{n}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для любых $k_i = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, s$, оператор $\mathcal{R}_{\bar{k}}$ 1-калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_{\bar{k}-\bar{1}_i}$ при помощи функции f_i , то

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{\bar{k}}, \mathcal{R}_{\bar{k}-\bar{1}_i}}^{1+1} f_i = 0.$$

Тогда по теореме 1 для любых $i = 1, \dots, s$ имеем

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{\bar{n}}, \mathcal{R}_{\bar{n}-n_i \cdot \bar{1}_i}}^{n_i+1} f_i^{n_i} = 0.$$

Первая часть теоремы 1' доказана.

Вторая часть получается применением теоремы 1 для сдвигов индекса оператора $\mathcal{R}_{\bar{n}}$, например, в следующем порядке:

$$\mathcal{R}_{\bar{n}} \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{n}-n_s \cdot \bar{1}_s} \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{n}-n_s \cdot \bar{1}_s - n_{s-1} \cdot \bar{1}_{s-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{n}-n_s \cdot \bar{1}_s - \dots - n_2 \cdot \bar{1}_2} \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{0}}.$$

В результате

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{\bar{n}}, \mathcal{R}_{\bar{0}}}^{|\bar{n}|+1} f^{\bar{n}} = 0, \quad |\bar{n}| = n_1 + \dots + n_s, \quad f^{\bar{n}} = \prod_{i=1}^s f_i^{n_i},$$

и доказательство завершено.

Условия теоремы 1, как уже отмечалось выше, равносильны системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с неотрицательными целыми параметрами. Однако в отличие от M -калибровочной эквивалентности, условие 1-калибровочной эквивалентности может быть выписано в явном виде.

В самом деле, пусть $\mathcal{R}_0$ – однородный линейный дифференциальный оператор порядка K на $\mathbb{R}^N$ с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{\alpha, |\alpha|=K} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Здесь, как и ранее, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – мультииндекс целых неотрицательных чисел; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}$.

На основе необходимого условия калибровочной эквивалентности определим деформацию оператора $\mathcal{R}_0$, зависящую от неотрицательного целого параметра n :

$$\mathcal{R}_n = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} u_\alpha^n(x) \partial^\alpha,$$

где на почти всюду гладкие коэффициенты $u_\alpha^n(x)$ накладываются ограничения

$$u_\alpha^0(x) = \begin{cases} a_\alpha, & |\alpha| = K, \\ 0, & |\alpha| < K, \end{cases}$$

$$u_\alpha^n(x) = u_\alpha^0(x) = a_\alpha, \quad |\alpha| = K, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f \neq 0$, положим

$$g_\alpha^n(f) \equiv g_\alpha^n = \sum_{\beta \geq \alpha, |\beta| \leq K} \binom{\beta}{\alpha} u_\beta^n (\partial^{\beta-\alpha} f) - u_\alpha^{n-1} f, \quad |\alpha| \leq K,$$

где биномиальный коэффициент на мультииндексах

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\beta_N}{\alpha_N}$$

задается произведением биномиальных коэффициентов и частичное упорядочение задается правилом

$$\beta \geq \alpha \iff \beta_i \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее, для мультииндексов β и α таких, что $|\beta| \leq K$, $|\alpha| \leq K$, положим

$$r_{\alpha\beta}^n(f) \equiv r_{\alpha\beta}^n = \sum_{\gamma \geq \alpha, |\gamma| \leq K} \binom{\gamma}{\alpha} [u_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} g_\beta^n) - g_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} u_\beta^{n-1})].$$

Выпишем некоторые свойства элементов $r_{\alpha\beta}$.

СВОЙСТВО 1. Если $|\alpha| = |\beta| = K$, то

$$r_{\alpha\beta} = 0.$$

СВОЙСТВО 2. Если $|\alpha| = K$, то

$$r_{\alpha\beta} = a_\alpha g_\beta^n, \quad r_{\alpha\alpha} = 0, \quad r_{\beta\alpha} = -a_\alpha g_\beta^n, \quad r_{\alpha\beta} + r_{\beta\alpha} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТИХ УТВЕРЖДЕНИЙ НЕПОСРЕДСТВЕННО СЛЕДУЕТ ИЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ $r_{\alpha\beta}$.

ТЕОРЕМА 2 [14]. Для операторов $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, равенство

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^{1+1} f = 0$$

имеет место, если и только если коэффициенты оператора $\mathcal{R}_n$ и функция f удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sum_{\alpha \leq \gamma, |\alpha| \leq K} r_{\alpha, \gamma-\alpha}^n = 0, & |\gamma| \leq K, \\ \sum_{\alpha \leq \gamma, |\gamma| - K \leq |\alpha| \leq K} r_{\alpha, \gamma-\alpha}^n = 0, & 1 + K \leq |\gamma| \leq 2K, \end{cases}$$

$\binom{2K+N}{N}$ нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ВЫЧИСЛИМ

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} f &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} u_\alpha^n \circ \partial^\alpha \circ f - f \circ \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} u_\alpha^{n-1} \circ \partial^\alpha \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} u_\alpha^n \circ \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f) \circ \partial^\beta - f \circ \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} u_\alpha^{n-1} \circ \partial^\alpha. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой

$$\sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta \leq \alpha} u_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta \geq \alpha, |\beta| \leq K} u_{\beta\alpha},$$

получаем

$$\operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} f = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \left(\sum_{\beta \geq \alpha, |\beta| \leq K} \binom{\beta}{\alpha} u_\beta^n \circ (\partial^{\beta-\alpha} f) - f \circ u_\alpha^{n-1} \right) \circ \partial^\alpha.$$

Положим

$$g_\alpha^n = \sum_{\beta \geq \alpha, |\beta| \leq K} \binom{\beta}{\alpha} u_\beta^n (\partial^{\beta-\alpha} f) - u_\alpha^{n-1} f, \quad |\alpha| \leq K,$$

тогда

$$\operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} f = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} g_\alpha^n \circ \partial^\alpha.$$

Отметим, что порядок оператора $\operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} f$ не более чем $K - 1$ в силу того, что при $|\alpha| = K$ имеет место равенство

$$g_\alpha^n = u_\alpha^n f - u_\alpha^{n-1} f = (a_\alpha - a_\alpha) f = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^2 f &= \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} \left(\sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} g_\alpha^n \circ \partial^\alpha \right) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}} (g_\alpha^n \circ \partial^\alpha) \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \left(\sum_{\beta, |\beta| \leq K} u_\beta^n \circ \partial^\beta \circ g_\alpha^n \circ \partial^\alpha - g_\alpha^n \circ \partial^\alpha \circ \sum_{\beta, |\beta| \leq K} u_\beta^{n-1} \circ \partial^\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} (u_\beta^n \circ \partial^\beta \circ g_\alpha^n \circ \partial^\alpha - g_\alpha^n \circ \partial^\alpha \circ u_\beta^{n-1} \circ \partial^\beta) \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} (u_\alpha^n \circ \partial^\alpha \circ g_\beta^n \circ \partial^\beta - g_\alpha^n \circ \partial^\alpha \circ u_\beta^{n-1} \circ \partial^\beta) \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} \left(u_\alpha^n \circ \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^{\alpha-\gamma} g_\beta^n) \circ \partial^{\gamma+\beta} \right. \\ &\quad \left. - g_\alpha^n \circ \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^{\alpha-\gamma} u_\beta^{n-1}) \circ \partial^{\gamma+\beta} \right) \\ &= \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (u_\alpha^n \circ (\partial^{\alpha-\gamma} g_\beta^n) - g_\alpha^n \circ (\partial^{\alpha-\gamma} u_\beta^{n-1})) \circ \partial^{\gamma+\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^2 f = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} \sum_{\gamma \geq \alpha, |\gamma| \leq K} \binom{\gamma}{\alpha} [u_\gamma^n \circ (\partial^{\gamma-\alpha} g_\beta^n) \\ - g_\gamma^n \circ (\partial^{\gamma-\alpha} u_\beta^{n-1})] \circ \partial^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Для β и α таких, что $|\beta| \leq K$, $|\alpha| \leq K$, положим

$$r_{\alpha\beta}^n = \sum_{\gamma \geq \alpha, |\gamma| \leq K} \binom{\gamma}{\alpha} [u_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} g_\beta^n) - g_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} u_\beta^{n-1})],$$

тогда

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^2 f = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq K} \sum_{\beta, |\beta| \leq K} r_{\alpha\beta}^n \circ \partial^{\alpha+\beta}.$$

Далее, положив для мультииндекса γ , $|\gamma| \leq 2K$,

$$R_\gamma^n = \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha+\beta=\gamma \\ |\alpha| \leq K, |\beta| \leq K}} r_{\alpha\beta}^n,$$

имеем

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^2 f = \sum_{\gamma, |\gamma| \leq 2K} R_\gamma^n \circ \partial^\gamma.$$

Заметим теперь, что

$$R_\gamma^n = \begin{cases} \sum_{\alpha \leq \gamma, |\alpha| \leq K} r_{\alpha, \gamma-\alpha}^n, & |\gamma| \leq K, \\ \sum_{\alpha \leq \gamma, |\gamma|-K \leq |\alpha| \leq K} r_{\alpha, \gamma-\alpha}^n, & 1+K \leq |\gamma| \leq 2K, \end{cases}$$

и

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^{1+1} f = 0 \iff R_\gamma^n = 0, \quad 0 \leq |\gamma| \leq 2K.$$

При фиксированном $|\gamma|$ количество элементов R_γ^n равно

$$\binom{|\gamma| + N - 1}{N - 1}.$$

Таким образом, число уравнений в системе равно

$$\sum_{|\gamma|=0}^{2K} \binom{|\gamma| + N - 1}{N - 1} = \binom{2K + N}{N}.$$

Теорема доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для мультииндекса γ такого, что $|\gamma| = 2K$ или $|\gamma| = 2K - 1$, имеет место тождество $R_\gamma^n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\gamma| = 2K$. Тогда

$$R_\gamma^n = \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K, |\beta| = K}} r_{\alpha\beta}^n = 0$$

по свойству 1.

Если $|\gamma| = 2K - 1$, то

$$R_\gamma^n = \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K, |\beta| = K-1}} r_{\alpha\beta}^n + \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K-1, |\beta| = K}} r_{\alpha\beta}^n = \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K, |\beta| = K-1}} (r_{\alpha\beta}^n + r_{\beta\alpha}^n) = 0$$

по свойству 2. Доказательство завершено.

Отметим, что в теории изогюйгенсовых деформаций дифференциальных операторов [1], [2], [6], [15] однородный гюйгенсов оператор обычно деформируется членами, имеющими порядок меньше на два, чем у исходного оператора. В этой связи приводится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если в деформации $\mathcal{R}_n$ коэффициенты u_α^n , $|\alpha| = K - 1$, нулевые, то из условия 1-калибровочной эквивалентности операторов $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{R}_{n-1}$

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}}^{1+1} f = 0$$

следует, что функция f удовлетворяет системе $\binom{2K+N-3}{N-1}$ дифференциальных уравнений

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = |\beta| = K-1}} \sum_{i,j=1}^N (\alpha_i + 1)(\beta_j + 1) a_{\alpha + \bar{1}_i} a_{\beta + \bar{1}_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

где мультииндекс $\bar{1}_i$ состоит из нулевых элементов за исключением единицы на i -й позиции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для мультииндексов γ таких, что $|\gamma| = 2K - 2$, имеем

$$\begin{aligned} R_\gamma^n &= \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K, |\beta| = K-2}} r_{\alpha\beta}^n + \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K-1, |\beta| = K-1}} r_{\alpha\beta}^n + \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K-2, |\beta| = K}} r_{\alpha\beta}^n \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K, |\beta| = K-2}} (r_{\alpha\beta}^n + r_{\beta\alpha}^n) + \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K-1, |\beta| = K-1}} r_{\alpha\beta}^n = \sum_{\substack{\alpha, \beta | \alpha + \beta = \gamma \\ |\alpha| = K-1, |\beta| = K-1}} r_{\alpha\beta}^n. \end{aligned}$$

Остается выяснить явный вид элементов $r_{\alpha\beta}^n$ при $|\alpha| = K - 1$, $|\beta| = K - 1$. Из определения имеем

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta}^n &= u_\alpha^n g_\beta^n - g_\alpha^n u_\beta^{n-1} + \sum_{\gamma > \alpha, |\gamma| = K} \binom{\gamma}{\alpha} [u_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} g_\beta^n) - g_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} u_\beta^{n-1})] \\ &= \sum_{\gamma > \alpha, |\gamma| = K} \binom{\gamma}{\alpha} u_\gamma^n (\partial^{\gamma-\alpha} g_\beta^n) = \sum_{i=1}^N \binom{\alpha + \bar{1}_i}{\alpha} u_{\alpha + \bar{1}_i}^n (\partial^{\bar{1}_i} g_\beta^n) \\ &= \sum_{i=1}^N (\alpha_i + 1) a_{\alpha + \bar{1}_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_\beta^n \right). \end{aligned}$$

Далее, для $\beta, |\beta| = K - 1$, имеем

$$\begin{aligned} g_\beta^n &= u_\beta^n f - u_\beta^{n-1} f + \sum_{\gamma > \beta, |\gamma|=K} \binom{\gamma}{\beta} u_\gamma^n (\partial^{\gamma-\beta} f) \\ &= \sum_{j=1}^N \binom{\beta + \bar{1}_j}{\beta} u_{\beta + \bar{1}_j}^n (\partial^{\bar{1}_j} f) = \sum_{j=1}^N (\beta_j + 1) a_{\beta + \bar{1}_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Тогда при $\alpha, \beta, |\alpha| = |\beta| = K - 1$, имеем

$$r_{\alpha\beta}^n = \sum_{i,j=1}^N (\alpha_i + 1)(\beta_j + 1) a_{\alpha + \bar{1}_i} a_{\beta + \bar{1}_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $N = 1, x \in \mathbb{R}$ система уравнений утверждения 6 принимает наиболее простой вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0.$$

4. Примеры. В этом пункте приводятся некоторые примеры калибровочно эквивалентных операторов.

ПРИМЕР 1 (специальный дифференциальный многочлен, [14]). Пусть $\mathcal{R}_0$ – однородный дифференциальный оператор порядка K с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathbb{R}^N = \{(y, x) \mid y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Представим его в виде

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{k=0}^K \mathcal{A}_k \circ \frac{\partial^k}{\partial y^k},$$

где $\mathcal{A}_k$ – линейные дифференциальные операторы на $\mathbb{R}^{N-1} = \{x\}$ порядка $K - k$ с постоянными коэффициентами. Тогда для операторов

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_0 + \sum_{k=0}^{K-2} \left(\sum_{p=2}^{K-k} (-1)^{p-1} (p-1) \binom{p+k}{k} \frac{(n, p)}{y^p} \circ \mathcal{A}_{p+k} \right) \circ \frac{\partial^k}{\partial y^k}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $(n, p) = n(n+1) \cdots (n+p-1)$ – символ Похгаммера, выполняются условия теоремы 1 с $f(y, x) = y$.

Таким образом, оказывается, что оператор $\mathcal{R}_n$ n -калибровочно эквивалентен специальному дифференциальному многочлену $\mathcal{R}_0$:

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0}^{n+1} f^n(y, x) = 0, \quad f^n(y, x) = y^n.$$

При этом коэффициенты, используемые в деформации специального дифференциального многочлена, обобщают потенциалы Штелльмахера [3].

В случае $K = 2$ указанные в примере деформации (и более общие) использовались в работах [15], [16] для осуществления изогуйгенсовых деформаций линейных дифференциальных операторов в частных производных высоких порядков.

ПРИМЕР 2 (оператор Лапласа на плоскости). Этот пример приводится для иллюстрации совместного использования теорем 1' и 2. Окончательный результат, полученный другими средствами, содержится в [1], [2], [5], [6].

Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \equiv \mathcal{R}_{0,0}$$

– оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим деформацию оператора Лапласа

$$\mathcal{R}_{n,m} = \Delta + \mathcal{U}_{n,m}(x_1, x_2)$$

при помощи потенциала, зависящего от двух переменных и двух параметров $n, m \in \mathbb{Z}_+$, с начальным условием

$$\mathcal{U}_{0,0}(x_1, x_2) = 0.$$

Согласно теореме 1', потребовав выполнения равенства

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{0,m}, \mathcal{R}_{0,m-1}}^{1+1} f_2 = 0,$$

получим

$$\mathcal{U}_{0,m}(x_1, x_2) = -\frac{m(m+1)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2 x_1 + b_2 x_2)^2}.$$

Теперь потребуем выполнение равенства

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{n,m}, \mathcal{R}_{n-1,m}}^{1+1} f_1 = 0$$

с начальным условием, задаваемым $\mathcal{U}_{0,m}(x_1, x_2)$.

В результате получаем потенциал $\mathcal{U}_{n,m}(x_1, x_2)$ и соответствующую изодеформацию

$$\mathcal{R}_{n,m} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{n(n+1)}{x_1^2} - \frac{m(m+1)}{x_2^2}$$

с точностью до элементарных преобразований, сохраняющих вид оператора Лапласа на плоскости. При этом имеет место следующая $(n+m)$ -калибровочная эквивалентность:

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{n,m}, \Delta}^{n+m+1} (f_1^n f_2^m) = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+, \quad f_1 = x_1, \quad f_2 = x_2.$$

Как известно, потенциалы

$$\mathcal{U}_{n,m}(x_1, x_2) = -\frac{n(n+1)}{x_1^2} - \frac{m(m+1)}{x_2^2}$$

суть в точности потенциалы Лагнеше–Штелльмахера [4] для оператора Лапласа на плоскости. Добавление этих потенциалов к волновому оператору на пространствах большой пространственной размерности позволяет получить некоторые изогюйгенсовы деформации волнового оператора [4], [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 8–78.
- [2] Berest Y. The problem of lacunas and analysis on root systems // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 8. P. 3743–3776.
- [3] Stellmacher K. L. Ein Beispiel einer Huygennschen Differentialgleichung // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1953. V. 10. P. 133–138.
- [4] Lagnese J. E., Stellmacher K. L. A method of generating classes of Huygens' operators // J. Math. Mech. 1967. V. 17. № 5. P. 461–472.
- [5] Berest Y., Molchanov Y. Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 8. P. 4324–4339.
- [6] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Проблема Адамара и группы Кокстера: новые примеры гюйгенсовых уравнений // Функцион. анализ и его прилож. 1994. V. 28. № 1. P. 3–15.
- [7] Berest Y. Hierarchies of Huygens' operators and Hadamard's conjecture // Acta Appl. Math. 1998. V. 53. P. 125–185.
- [8] Бабиц В. М. Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 1–37.
- [9] Wilson G. Bispectral commutative ordinary differential operators // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 442. P. 177–204.
- [10] Berest Y. Y., Loutsenko I. M. Huygens' principle in Minkowski spaces and soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation // Comm. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132.
- [11] Berest Y. Solution of a restricted Hadamard problem on Minkowski spaces // Comm. Pure. Appl. Math. 1997. V. 50. P. 1019–1052.
- [12] Khekalov S. The gauge relation of differential operators and Huygens' principle // Day on Diffraction. Saint-Petersburg, 2002. P. 32–34.
- [13] Хэкало С. П. Калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов в частных производных // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докл. Суздаль, 2002. С. 138–140.
- [14] Khekalov S. The gauge related differential operators // Day on Diffraction. Saint-Petersburg, 2003. P. 42–43.
- [15] Хэкало С. П. Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга три // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 927–940.
- [16] Хэкало С. П. Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли–Лапласа // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 2. С. 168–170.

Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: khekalov@pdmi.ras.ru

Поступило
 21.01.2004
 Исправленный вариант
 17.11.2004