Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Джордж, Х. Д. Икрамов, О свойствах аккретивно-диссипативных матриц, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 832–843

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:15:22

УДК 512

О СВОЙСТВАХ АККРЕТИВНО-ДИССИПАТИВНЫХ МАТРИЦ

А. Джордж, Х. Д. Икрамов

Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица и $A = B + iC$, $B = B^*$, $C = C^*$, – ее теплицево разложение. Говорят, что матрица A (строго) аккретивна, если $B > 0$, и (строго) диссипативна, если $C > 0$. Мы изучаем свойства матриц, которые удовлетворяют обоим этим условиям, иначе говоря, свойства аккретивно-диссипативных матриц. Во многих отношениях эти матрицы ведут себя как комплексные числа из первого квадранта. Некоторые другие их свойства являются естественными обобщениями соответствующих свойств эрмитовых положительно определенных матриц.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Хорошо известны аналогии между некоторыми подмножествами комплексной плоскости и соответствующими специальными классами комплексных квадратных матриц. Например, эрмитовы матрицы во многих отношениях ведут себя как вещественные числа, тогда как унитарные матрицы схожи с числами, по модулю равными единице.

В настоящей работе мы изучаем свойства еще одного класса специальных матриц, которые можно сопоставить с комплексными числами из первого квадранта. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ – множество комплексных $(n \times n)$ -матриц. На протяжении всей статьи мы используем так называемое *теплицево разложение* (иногда называемое также *эрмитовым разложением*) матрицы A :

$$A = B + iC, \quad (1)$$

где

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*). \quad (2)$$

Говорят, что A – *аккретивная* матрица, если ее вещественная часть B положительно полуопределена (см. [1, с. 279]), и *строго аккретивная*, если B положительно определена. Аналогично, A называют *диссипативной* (*строго диссипативной*) матрицей, если ее мнимая часть C положительно полуопределена (соответственно положительно определена) [2, с. 451].

Работа второго автора выполнена при поддержке Канадского совета по исследованиям в области естественных и технических наук, грант № OGP0008111.

В этой терминологии матрицы, изучаемые в нашей статье, являются *строго аккретивно-диссипативными*, т.е. они удовлетворяют обоим условиям

$$B > 0 \quad \text{и} \quad C > 0. \quad (3)$$

Мы обозначаем множество таких матриц порядка n через M_n^{++} .

Нередко символ M_n^{++} будет использоваться и для обозначения более широкого множества *аккретивно-диссипативных* матриц, определяемых условиями

$$B > 0 \quad \text{и} \quad C \geq 0.$$

Это позволит нам рассматривать эрмитовы положительно определенные матрицы как подмножество в M_n^{++} . Мы увидим, что многие свойства матриц из M_n^{++} суть естественные обобщения соответствующих свойств положительно определенных матриц.

Продолжая разговор о терминологии, отметим, что имеется более короткий термин, который можно было бы применить к аккретивно-диссипативным матрицам. Согласно [3] (см. также [1, с. 280]) матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *секторной*, если ее числовая область

$$F(A) = \{p^* A p : p \in \mathbb{C}^n, p^* p = 1\} \quad (4)$$

принадлежит при некотором $\alpha \in [0, \pi/2)$ сектору

$$\{z : |\arg z| \leq \alpha\}. \quad (5)$$

Несложно показать, что всякая строго аккретивно-диссипативная матрица является секторной для α , определяемого собственными значениями матричного пучка $\lambda B + \mu C$. Однако трактовка аккретивно-диссипативных матриц как секторных имеет два недостатка: во-первых, не существует универсального значения α , которое обслуживало бы весь класс M_n^{++} ; во-вторых, при такой интерпретации нам не нужна нижняя половина сектора (5).

Насколько известно авторам, аккретивно-диссипативные матрицы впервые были рассмотрены в [4] в специальном случае, когда в (1) обе матрицы B и C вещественные симметричные; в этом случае A – комплексная симметричная матрица. Оказалось, что такие матрицы обладают замечательными свойствами по отношению к гауссову исключению, чрезвычайно напоминающими свойства обычных положительно определенных матриц [4] (см. также [5], [6]). Неравенства типа Адамара–Фишера для аккретивно-диссипативных матриц были получены в [7]. Наконец, как уже было упомянуто, секторные матрицы исследовались в [3]. Однако авторы этой работы были заинтересованы скорее в выводе критериев секторности, чем в свойствах данного матричного класса.

В разделе 2 мы приводим список свойств аккретивно-диссипативных матриц. Доказательства этих свойств и комментарии к ним даны в разделе 3.

Существуют еще три класса матриц, чьи свойства практически совпадают со свойствами матриц из M_n^{++} . Это классы M_n^{+-} , M_n^{-+} и M_n^{--} , где M_n^{+-} есть множество матриц (1) с положительно определенной вещественной частью B и отрицательно определенной мнимой частью C ; аналогичным образом определяются два других класса. Иногда нам придется привлекать и эти классы, хотя основным нашим объектом является множество M_n^{++} .

Ниже мы используем следующие обозначения: $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ суть сингулярные числа матрицы $A \in M_n^{++}$, а $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ и $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n$ – собственные значения соответственно ее вещественной и мнимой частей. Соотношение $B_2 > B_1$ ($B_2 \geq B_1$) между эрмитовыми матрицами B_1 и B_2 означает, что матрица $B_2 - B_1$ положительно (полу)определена. Множество положительно определенных $(n \times n)$ -матриц обозначается через P_n .

Для спектральной нормы комплексных матриц используется символ $\|\cdot\|$, а для евклидовой (которая в зарубежной литературе обычно называется нормой Фробениуса) – символ $\|\cdot\|_F$.

Для удобства читателя приведем определения некоторых (возможно, не общеизвестных) терминов из теории матриц и вычислительной линейной алгебры. Поэлементное произведение $C = (a_{ij}b_{ij})$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется *адамаровым произведением* (или *произведением Шура*) и обозначается $C = A \circ B$. Если $(m \times n)$ -матрица A представлена в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} – квадратная невырожденная подматрица, то матрица

$$A/A_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

называется *дополнением Шура подматрицы A_{11}* .

Квадратная $(n \times n)$ -матрица A с ненулевыми ведущими главными минорами порядков $1, 2, \dots, n-1$ допускает представление

$$A = LU,$$

где L и U – треугольные матрицы, соответственно левая и правая. Это представление называется *LU-разложением* матрицы A .

2. Свойства аккретивно-диссипативных матриц

Удобно разбить обсуждаемые свойства на несколько групп. Соответственно мы разбиваем на пункты настоящий раздел.

2.1. Множество M_n^{++} .

Свойство 1. Если $A \in M_n^{++}$, то имеют место следующие утверждения:

- (а) $A^T \in M_n^{++}$;
- (б) $\bar{A} \in M_n^{+-}$;
- (в) $A^{-1} \in M_n^{+-}$.

Верны также обращения утверждений (б) и (в). Например, если $F \in M_n^{+-}$, то $F^{-1} \in M_n^{++}$.

Свойство 2. Пусть $A \in M_n^{++}$. Тогда существует единственный квадратный корень R из матрицы A , принадлежащий классу M_n^{++} . Если

$$R = S + iT \tag{6}$$

есть *теплицево разложение* матрицы R , то

$$0 < T < S. \tag{7}$$

СВОЙСТВО 3. Пусть $A \in M_n^{++}$, а Q – произвольная невырожденная матрица из $M_n(\mathbb{C})$. Тогда $Q^*AQ \in M_n^{++}$. В частности, всякая матрица $\tilde{A}$, полученная из A симметричным перепорядочением строк и столбцов, принадлежит классу M_n^{++} .

СВОЙСТВО 4. Если $A_1, A_2 \in M_n^{++}$, а λ_1, λ_2 – произвольные положительные числа, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in M_n^{++}$. Другими словами, M_n^{++} есть выпуклый конус.

2.2. Элементы, подматрицы, числовая область, собственные значения и сингулярные числа.

СВОЙСТВО 5. Диагональные элементы матрицы $A \in M_n^{++}$ суть комплексные числа вида $\beta + i\gamma$, где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Более общо, всякая главная подматрица порядка k , $1 \leq k < n$, в A принадлежит классу M_k^{++} .

СВОЙСТВО 6. Пусть $A \in M_n^{++}$ и A_k есть ведущая главная подматрица порядка k в A . Тогда дополнение Шура A/A_k подматрицы A_k принадлежит классу M_{n-k}^{++} .

СВОЙСТВО 7. Если $A \in M_n^{++}$, то

$$\max_{i \neq j} |a_{ij}| \leq \sqrt{2} \max_{1 \leq l \leq n} |a_{ll}|. \quad (8)$$

СВОЙСТВО 8. Для любой матрицы $A \in M_n^{++}$ ее числовая область $F(A)$ принадлежит первому квадранту комплексной плоскости.

СВОЙСТВО 9. Собственные значения произвольной матрицы $A \in M_n^{++}$ суть комплексные числа вида $\beta + i\gamma$, где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$.

СВОЙСТВО 10. Для матрицы $A \in M_n^{++}$ найдется невырожденная матрица Q такая, что $D = Q^*AQ$ есть диагональная матрица с диагональными элементами вида $\beta + i\gamma$, где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$.

СВОЙСТВО 11. Пусть $A \in M_n^{++}$. Тогда n -вектор $\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2\}$ мажорируется n -вектором $\{\alpha_1^2 + \beta_1^2, \alpha_2^2 + \beta_2^2, \dots, \alpha_n^2 + \beta_n^2\}$, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k s_j^2 &\leq \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^k \beta_j^2, & 1 \leq k \leq n-1, \\ \sum_{j=1}^n s_j^2 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j^2. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, $s_1^2 \leq \alpha_1^2 + \beta_1^2$, что можно записать в виде

$$\|A\|^2 \leq \|B\|^2 + \|C\|^2. \quad (10)$$

Равенство (9) также можно переписать как

$$\|A\|_F^2 = \|B\|_F^2 + \|C\|_F^2. \quad (11)$$

2.3. Операции над аккретивно-диссипативными матрицами.

Свойство 12. Пусть $A \in M_n^{++}$, а $S \in P_n$. Тогда собственные значения матриц AS и SA суть комплексные числа вида $\beta + i\gamma$, где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$.

Свойство 13. Пусть $A \in M_n^{++}$, а $S \in P_n$. Тогда адамарово произведение $A \circ S$ принадлежит классу M_n^{++} .

Множество $M_n(\mathbb{C})$ можно рассматривать как евклидово пространство размерности $2n$, в котором скалярное произведение задано как

$$(A_1, A_2) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A_1 A_2^*).$$

В таком пространстве угол α между ненулевыми матрицами A_1 и A_2 определяется формулой

$$\cos \alpha = \frac{(A_1, A_2)}{\|A_1\|_F \|A_2\|_F}, \quad \alpha \in [0, \pi]. \quad (12)$$

Свойство 14. Для любых двух матриц $A_1, A_2 \in M_n^{++}$ угол α между A_1 и A_2 острый.

2.4. Свойства, связанные с гауссовым исключением. Известно, какую важность имеет проблема выбора главных элементов гауссова исключения в задачах вычислительной линейной алгебры. Если, например, для разреженной матрицы приемлем любой порядок исключения, то выбор главных элементов можно подчинить только соображениям сохранения разреженности. Это замечание позволяет оценить значение следующего свойства.

Свойство 15. Пусть $A \in M_n^{++}$. Тогда гауссово исключение может быть применено к A без какого-либо выбора главных элементов.

Пусть $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ – матрица, полученная в результате применения к A первых k шагов гауссова исключения. Главная подматрица порядка $n - k$, расположенная в правом нижнем углу матрицы $A^{(k)}$, называется *активной подматрицей* на шаге $k + 1$ гауссова исключения.

Свойство 16. Пусть $A \in M_n^{++}$. Тогда активная подматрица шага k , где $2 \leq k \leq n$, принадлежит классу M_{n-k+1}^{++} . Другими словами, свойство быть аккретивно-диссипативной матрицей наследственно относительно гауссова исключения.

Величина $\rho_n(A)$, определяемая формулой

$$\rho_n(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}, \quad (13)$$

называется *коэффициентом роста* матрицы A (в гауссовом исключении).

Свойство 17. Пусть $A \in M_n^{++}$. Тогда

$$\rho_n(A) < 3\sqrt{2}. \quad (14)$$

СВОЙСТВО 18. Всякая матрица $A \in M_n^{++}$ допускает LU -разложение

$$A = LU$$

со следующими свойствами:

(а) диагональные элементы матриц L и U удовлетворяют равенству

$$l_{ii} = u_{ii}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (15)$$

кроме того, все l_{ii} суть комплексные числа вида $\beta + i\gamma$, где $0 < \gamma < \beta$;

(б) для внедиагональных элементов матрицы L выполнена оценка

$$|l_{ij}| \leq \sqrt{6} \max_l |a_{ll}|^{1/2}, \quad i \neq j; \quad (16)$$

(в) для внедиагональных элементов матрицы U выполнена оценка

$$|u_{ij}| \leq \sqrt{6} \max_l |a_{ll}|^{1/2}, \quad i \neq j. \quad (17)$$

Заметим, что из неравенств (б) и (в) вытекают соотношения

$$\max\{\|L\|_F^2, \|U\|_F^2\} \leq (3n^2 - 2)\|A\|_F \quad (18)$$

и

$$\max\{\text{cond}_F(L), \text{cond}_F(U)\} \leq (3n^2 - 2) \text{cond}_F^{1/2}(A). \quad (19)$$

Разложение, описываемое свойством 18, мы называем *уравновешенным LU -разложением* матрицы A . Если (как это сделано нами) потребовать, чтобы все l_{ii} принадлежали первому квадранту, то уравновешенное разложение определяется соотношениями (15) единственным образом.

2.5. Разное.

СВОЙСТВО 19. Пусть $A \in M_n^{++}$ и

$$A = HU \quad (20)$$

есть полярное разложение матрицы A с унитарным сомножителем U . Тогда $U \in M_n^{++}$.

СВОЙСТВО 20. Пусть матрицы $A_1 = B_1 + iC_1$ и $A_2 = B_2 + iC_2$ принадлежат классу M_n^{++} . Если

$$B_2 \geq B_1 \quad \text{и} \quad C_2 \geq C_1,$$

то

$$|\det A_2| \geq |\det A_1|. \quad (21)$$

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{z - i}{z + i} \quad (22)$$

отображает первый квадрант $x \geq 0, y \geq 0$ на единичный нижний полукруг

$$|w| \leq 1, \quad v = \text{Im } w \leq 0. \quad (23)$$

Соответствующее свойство аккретивно-диссипативных матриц формулируется следующим образом.

СВОЙСТВО 21. Пусть $A \in M_n^{++}$ и

$$W = (A - iI)(A + iI)^{-1} \quad (24)$$

есть образ Кэли матрицы A . Тогда числовая область $F(W)$ матрицы W принадлежит полукругу (23).

3. Доказательства и комментарии

Свойства 1 (а) и 1 (б) очевидны. Обращаясь к свойству 1 (в), положим

$$A^{-1} = E + iF, \quad E = E^*, \quad F = F^*. \quad (25)$$

Тогда согласно [8]

$$E = (B + CB^{-1}C)^{-1}. \quad (26)$$

Отметим, что для справедливости формулы (26) достаточно строгой аккретивности матрицы A . Аналогичным образом можно показать, что для строго диссипативной матрицы A матрица F в равенстве (25) выражается формулой

$$F = -(C + BC^{-1}B)^{-1}. \quad (27)$$

Равенства (26) и (27) доказывают утверждение 1 (в). Таким же образом доказывается обратное утверждение.

Первое утверждение в свойстве 2 хорошо известно [1, с. 281] (см. также [9] или [10, теорема 7]). Используя (1) и (6), выводим из соотношения $R^2 = A$ равенство

$$S^2 - T^2 = B.$$

Следовательно, $S^2 > T^2$. Поскольку S и T положительно определены, отсюда вытекает (7).

Свойства 3 и 4 так же, как и свойство 5, очевидны.

Матрица, обратная к дополнению Шура A/A_k , есть главная подматрица порядка $n - k$, расположенная в правом нижнем углу матрицы A^{-1} . Следовательно, эта обратная матрица принадлежит классу M_{n-k}^+ . Теперь свойство 6 вытекает из свойства 1.

Доказательство свойства 7 читатель может найти в [6, лемма 2.2]. В действительности, неравенство (8) есть следствие доказанного там более точного соотношения

$$|a_{ij}|^2 \leq 2|a_{ii}||a_{jj}| \quad \forall i, j. \quad (28)$$

Свойство 8 немедленно следует из соотношения

$$(Ap, p) = (Bp, p) + i(Cp, p),$$

где (Bp, p) и (Cp, p) суть положительные числа, если $p \neq 0$.

Свойство 9 вытекает из предыдущего в силу общего факта, называемого в [11, с. 10] спектральным включением, а именно

$$\sigma(A) \subset F(A),$$

где $\sigma(A)$ есть спектр матрицы A .

Утверждение о существовании матрицы Q в свойстве 10 есть всего лишь иная формулировка следующего хорошо известного факта (см., например, [12, § 7.6]). Если $B \in P_n$, а C – эрмитова матрица, то существует невырожденная матрица Q такая, что обе матрицы Q^*BQ и Q^*CQ диагональные.

Если $A \in M_n^{++}$, то и Q^*BQ , и Q^*CQ – положительно определенные матрицы. Отсюда следует, что диагональные элементы матрицы Q^*AQ суть числа вида $\beta + i\gamma$ с положительными β и γ .

Свойство 11 было доказано в недавней статье [13]. Неравенство (10) принадлежит Мирману [14] (см. также [15, задача I.6.18]); оно теряет силу для незнакоопределенных B и C . Напротив, равенство (11) справедливо для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$, что легко следует из соотношений

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2}, \quad c_{ij} = \frac{a_{ij} - \bar{a}_{ji}}{2i} \quad \forall i, j.$$

Переходя к свойству 12, заметим прежде всего, что матрицы AS и SA имеют одни и те же собственные значения. Обозначим через R (единственный) положительно определенный квадратный корень из матрицы S . Тогда AS подобна матрице

$$R(AS)R^{-1} = RAR = RBR + iRCR,$$

которая, очевидно, принадлежит классу M_n^{++} . Теперь нужное утверждение вытекает из свойства 9.

Поскольку

$$A \circ S = B \circ S + i(C \circ S),$$

свойство 13 есть немедленное следствие теоремы о произведении Шура (см. [12, теорема 7.5.3]).

Пусть матрицы A_1 и A_2 из свойства 14 имеют теплицевы разложения

$$A_1 = B_1 + iC_1 \quad \text{и} \quad A_2 = B_2 + iC_2.$$

Тогда

$$A_1 A_2^* = B_1 B_2 + C_1 C_2 + i(C_1 B_2 - B_1 C_2).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A_1 A_2^*) = \operatorname{tr}(B_1 B_2 + C_1 C_2).$$

Согласно еще одной хорошо известной матричной теореме (см., например, [12, теорема 6.6.3]) все собственные значения произведения двух эрмитовых положительно определенных матриц положительны. Поэтому

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A_1 A_2^*) > 0$$

и, значит, угол α , определяемый формулой (12), является острым.

Хорошо известно, что гауссово исключение без выбора главных элементов осуществимо для матрицы A в том и только том случае, когда A сильно невырождена, т.е. все ее ведущие главные миноры отличны от нуля. Очевидно, что это свойство сильной невырожденности имеет место для матрицы $A \in M_n^{++}$ (см. свойство 5). Более того, справедливо неравенство

$$|\det A| \geq \det B + \det C > 0$$

(см. [12, задача 7.8.7]). Соответствующие неравенства выполняются для главных миноров.

При применении к A гауссова исключения активная подматрица шага $k + 1$ есть не что иное, как дополнение Шура A/A_k ведущей главной подматрицы A_k . Таким образом, свойство 16 является всего лишь иной формулировкой свойства 6.

Доказательство неравенства (14) читатель может найти в [6]. Отметим, что, в действительности, там получен более сильный результат, а именно

$$|a_{jj}^{(k)}| < 3|a_{jj}|, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (29)$$

Применяя к матрице $A \in M_n^{++}$ стандартное гауссово исключение, мы получим треугольное разложение

$$A = L_1 U_1 \quad (30)$$

с нижней унитреугольной матрицей L_1 . Диагональные элементы верхнетреугольной матрицы $U_1 = (u_{ij}^{(1)})$ – это главные элементы последовательных шагов исключения; они являются, следовательно, числами вида $\beta + i\gamma$ с положительными β и γ (см. свойства 5 и 16). Внедиагональный элемент $u_{ij}^{(1)}$ матрицы U_1 есть в то же время внедиагональный элемент активной подматрицы шага i . Согласно (28) имеем

$$|u_{ij}^{(1)}|^2 \leq 2|a_{ii}^{(i-1)}| |a_{jj}^{(i-1)}|. \quad (31)$$

Определим теперь матрицу

$$D = \text{diag}(u_{11}^{(1)}, u_{22}^{(1)}, \dots, u_{nn}^{(1)}) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)})$$

и положим

$$L = L_1 D^{1/2}, \quad U = D^{-1/2} U_1, \quad (32)$$

выбрав для каждого диагонального элемента матрицы D значение квадратного корня, принадлежащее первому квадранту. Это однозначно определяет матрицы $D^{1/2}$, L и U ; при этом равенства (15) выполняются. Далее, используя (31) и (29), получаем

$$|u_{ij}| = \frac{|u_{ij}^{(1)}|}{|u_{ii}^{(i-1)}|^{1/2}} \leq \sqrt{2} |a_{jj}^{(i-1)}|^{1/2} \leq \sqrt{6} |a_{jj}|^{1/2} \leq \sqrt{6} \max_l |a_{ll}|^{1/2}.$$

Тем самым, неравенство (17) доказано.

Разложение

$$A = LU \quad (33)$$

имеет следствием разложение

$$A^* = U^* L^*.$$

Таким образом, L^* есть правый треугольный множитель в уравновешенном LU -разложении матрицы A^* , что доказывает (16).

Неравенство (18) есть простое следствие соотношений (16) и (17), а также оценки

$$|l_{ii}|^2 = |u_{ii}|^2 = |a_{ii}^{(i-1)}| < 3|a_{ii}|, \quad i = 2, \dots, n.$$

Остается доказать неравенство (19). С этой целью заметим, что для матрицы $\tilde{A} \in M_n^{+-}$ имеет место аналог свойства 18. Единственное различие состоит в том, что диагональные элементы $l_{ii} = u_{ii}$ принадлежат четвертому квадранту. Определим матрицу

$$\pi_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Из разложения (33) теперь следует, что

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}, \quad \pi_n A^{-1} \pi_n = (\pi_n U^{-1} \pi_n)(\pi_n L^{-1} \pi_n).$$

Последнее равенство есть уравновешенное LU -разложение матрицы $\pi_n A^{-1} \pi_n \in M_n^{+-}$. Согласно (18)

$$\max\{\|\pi_n U^{-1} \pi_n\|_F^2, \|\pi_n L^{-1} \pi_n\|_F^2\} \leq (3n^2 - 2)\|\pi_n A^{-1} \pi_n\|_F,$$

или

$$\max\{\|U^{-1}\|_F^2, \|L^{-1}\|_F^2\} \leq (3n^2 - 2)\|A^{-1}\|_F.$$

В сочетании с (18) это дает неравенство (19).

Чтобы правильно оценить значение свойства 18, сравним его с разложением Холецкого

$$A = LL^* \tag{34}$$

эрмитовой положительно определенной матрицы A . Разложение (34) обладает следующими свойствами:

(а) для элементов матрицы L выполнена оценка

$$|l_{ij}| \leq a_{ii}^{1/2}, \quad j = 1, \dots, i, \quad i = 1, \dots, n; \tag{35}$$

(б) для нормы матрицы L выполнена оценка

$$\|L\|_F^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii} \leq \sqrt{n} \|A\|_F; \tag{36}$$

(в) имеет место оценка

$$\text{cond}_F(L) \leq \sqrt{n} \text{cond}_F^{1/2}(A). \tag{37}$$

Таким образом, соотношения (16)–(19) можно рассматривать как обобщение и некоторое ослабление соотношений (35)–(37).

Для доказательства свойства 19 заметим, что все собственные значения матрицы

$$U = H^{-1}A$$

принадлежат первому квадранту (см. свойство 12). Поскольку числовая область унитарной (или, более общо, нормальной) матрицы представляет собой выпуклую оболочку ее собственных значений, отсюда следует, что $U \in M_n^{++}$.

Переходя к свойству 20, введем еще одну матрицу

$$A_3 = B_2 + iC_1.$$

Пусть R – положительно определенный квадратный корень из матрицы C_1 . Обозначим соответственно через

$$\beta_1^{(1)} \geq \beta_2^{(1)} \geq \dots \geq \beta_n^{(1)} \quad \text{и} \quad \beta_1^{(2)} \geq \beta_2^{(2)} \geq \dots \geq \beta_n^{(2)}$$

собственные значения матриц $R^{-1}B_1R^{-1}$ и $R^{-1}B_2R^{-1}$. Из равенства

$$A_1 = R(R^{-1}B_1R^{-1} + iI)R$$

закключаем, что

$$|\det A_1| = (\det R)^2 |\det(R^{-1}B_1R^{-1} + iI)| = \det C_1 \prod_{i=1}^n \sqrt{1 + (\beta_i^{(1)})^2}.$$

Аналогично,

$$|\det A_3| = \det C_1 \prod_{i=1}^n \sqrt{1 + (\beta_i^{(2)})^2}.$$

Поскольку $B_2 \geq B_1$, имеем

$$R^{-1}B_2R^{-1} \geq R^{-1}B_1R^{-1}$$

и

$$\beta_i^{(2)} \geq \beta_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом,

$$|\det A_3| \geq |\det A_1|. \quad (38)$$

Аналогичным образом показываем, что

$$|\det A_2| \geq |\det A_3|. \quad (39)$$

Для доказательства свойства 21 нам понадобится следующий хорошо известный факт: преобразование Кэли переводит диссипативную матрицу A в нестягивающую матрицу W , т.е. $\|W\| \leq 1$. Приведем его стандартный вывод. Из легко проверяемого соотношения

$$(A - iI)^*(A - iI) - (A + iI)^*(A + iI) = -4C$$

и отрицательной полуопределенности правой части вытекает неравенство

$$\|(A - iI)y\| \leq \|(A + iI)y\|$$

для любого вектора y , откуда $\|W\| \leq 1$.

Итак, $F(W)$ есть подмножество единичного круга. Заметим теперь, что числовая область матрицы $A + iI$, а потому (см. доказательство свойства 1 (в)) и числовая область матрицы $(A + iI)^{-1}$ принадлежат правой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. В силу равенства

$$W = I - 2i(A + iI)^{-1}$$

имеем

$$F(W) \subset \{z : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Это доказательство принадлежит рецензенту данной статьи и заменяет первоначальное, более длинное доказательство, предложенное авторами. Мы хотим поблагодарить рецензента за очень внимательное чтение статьи и ряд замечаний, способствовавших ее улучшению.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
- [3] Arlinskiĭ Yu. M., Popov A. B. On sectorial matrices // Linear Algebra Appl. 2003. V. 370. P. 133–146.
- [4] Higham N. J. Factorizing complex symmetric matrices with positive real and imaginary parts // Math. Comp. 1998. V. 67. P. 1591–1599.
- [5] Ikramov Kh. D., Kucherov A. B. Bounding the growth factor in Gaussian elimination for Bucley's class of complex symmetric matrices // Numer. Linear Algebra Appl. 2000. V. 7. P. 269–274.
- [6] George A., Ikramov Kh. D., Kucherov A. B. On the growth factor in Gaussian elimination for generalized Higham matrices // Numer. Linear Algebra Appl. 2002. V. 9. P. 107–114.
- [7] Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Неравенства типа Фишера и Адамара для аккретивно-диссипативных матриц // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 5. С. 585–586.
- [8] Mathias R. Matrices with positive definite Hermitian part: Inequalities and linear systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1992. V. 13. P. 640–654.
- [9] Masser D. W., Neumann M. On the square roots of strictly quasiaccretive complex matrices // Linear Algebra Appl. 1979. V. 28. P. 135–140.
- [10] Johnson C. R., Okubo K., Reams R. Uniqueness of matrix square roots and an application // Linear Algebra Appl. 2001. V. 323. P. 51–60.
- [11] Horn R. A., Johnson C. R. Topics in Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [12] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1990.
- [13] Bhatia R., Zhan X. Compact operators whose real and imaginary parts are positive // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 2277–2281.
- [14] Мирман Б. А. Хаусдорфово множество и норма линейного оператора // Воронежск. гос. ун-т. Труды семин. функц. анал. 1968. Т. 10. С. 51–55.
- [15] Bhatia R. Matrix Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

(А. Джордж) Университет г. Ватерлоо, Онтарио, Канада
(Х. Д. Икрамов) Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.02.2004
Исправленный вариант
13.09.2004