Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Косухин, О скорости приближения замкнутых жордановых кривых, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 861–876

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:05:01

УДК 517.54

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ЖОРДАНОВЫХ КРИВЫХ ЛЕМНИСКАТАМИ

О. Н. Косухин

Принципиальная возможность сколь угодно хорошего приближения произвольной замкнутой жордановой кривой Γ на комплексной плоскости $\{z\}$ в метрике Хаусдорфа посредством лемнискат, порожденных многочленами $P(z)$, доказана Гильбертом. В настоящей работе получены количественные оценки сверху для наименьших уклонений $H_n(\Gamma)$ от кривой Γ (в этой метрике) лемнискат, порожденных многочленами заданной степени n , в терминах модулей непрерывности конформного отображения внешности Γ на внешность единичной окружности, обратного к нему отображения и функции Грина с полюсом на бесконечности для внешности Γ . В случае аналитичности Γ доказано, что $H_n(\Gamma) = O(q^n)$, $0 \leq q = q(\Gamma) < 1$, $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 6 названий.

Введение. В работе даются оценки сверху наименьших уклонений в метрике Хаусдорфа заданного замкнутого жорданова контура Γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ от лемнискат, порожденных многочленами $P(z)$ заданной степени n , в зависимости от метрических свойств этого контура. При этом предполагается, что приближающие лемнискаты являются замкнутыми жордановыми кривыми, содержащими Γ внутри себя. Принципиальная возможность сколь угодно хорошего приближения жордановых контуров такими лемнисками в этой метрике доказана Гильбертом в 1897 г. (см. [1]). Естественно возникает вопрос о количественной оценке такого приближения. Этот вопрос неоднократно ставил Е. П. Долженко.

В силу теорем Римана и Каратеодори существует единственное конформное и однолистное отображение $w = \psi(z)$ внешности G_Γ кривой Γ на внешность G_C единичной окружности $C := \{w : |w| = 1\}$ со свойствами: $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) > 0$; отображение $w = \psi(z)$ продолжается до гомеоморфизма замыканий $\overline{G}_\Gamma$ и $\overline{G}_C$ областей G_Γ и G_C . Положим

$$\varphi(w) := \psi^{-1}(w), \quad w \in \overline{G}_C, \quad f(\theta) := \varphi(e^{i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть A и B – компакты на $\mathbb{C}$, $\rho_H(A, B)$ – хаусдорфово расстояние между ними: $\rho_H(A, B) := \inf\{\varepsilon\}$, где инфимум берется по всем таким $\varepsilon > 0$, что множества A и B находятся в евклидовых ε -окрестностях друг друга. Через $\rho(A, B)$ обозначим обычное (евклидово) расстояние между A и B :

$$\rho(A, B) := \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in A, z_2 \in B\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00913, и программы “Ведущие научные школы” Президента РФ, грант № НШ-1892.2003.1.

Пусть $P_n(z)$ – многочлен степени n переменного z , $r = \text{const} > 0$,

$$L(P_n, r) := \{z : |P_n(z)| = r\}$$

– r -я лемниската, порожденная многочленом P_n , (т.е. его r -я линия уровня),

$$H_n(\Gamma) := \inf\{\rho_H(\Gamma, L(P_n, r)) : P_n, r\},$$

где P_n пробегает все многочлены степени n , а r пробегает все положительные числа, причем учитываются только те P_n и r , для которых $L(P_n, r)$ является замкнутой жордановой кривой, содержащей Γ внутри себя.

Пусть $g(z, \zeta)$ – функция Грина для области G_Γ с полюсом $\zeta \in \bar{G}_\Gamma$. Как известно, $g(z, \infty) = \log |\psi(z)| =: g(z)$. Ниже

$$\omega(F, E; \delta) := \sup\{|F(z') - F(z'')| : z', z'' \in E, |z' - z''| \leq \delta\}$$

– модуль непрерывности функции $F(z)$ на множестве $E \subset \mathbb{C}$, $\delta \geq 0$. Если множество E есть вся область определения функции $F(z)$, положим $\omega(F; \delta) = \omega(F, E; \delta)$.

1. Для любого числа $\lambda \geq 0$ определим кривую

$$\Gamma_\lambda := \{z : g(z) = \lambda\}.$$

Оценим величину

$$M_n(\Gamma) := \inf\{\max\{g(z) : z \in L(P_n, r)\} : P_n, r\},$$

где P_n и r пробегают те же множества, что и выше при определении $H_n(\Gamma)$.

ЛЕММА. Для произвольной замкнутой жордановой кривой Γ и любого натурального числа n выполнены неравенства

$$H_n(\Gamma) \leq \omega(\varphi; e^{M_n(\Gamma)} - 1), \quad M_n(\Gamma) \leq \omega(g; H_n(\Gamma)). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и ранее, многочлен P_n и число $r > 0$ таковы, что лемниската $L(P_n, r)$ является замкнутой жордановой аналитической кривой, содержащей Γ внутри себя. Для произвольных таких P_n и r положим

$$\lambda = \lambda(P_n, r) := \max\{g(z) : z \in L(P_n, r)\}.$$

Тогда

$$\rho_H(\Gamma, L(P_n, r)) \leq \rho_H(\Gamma, \Gamma_\lambda) \leq \max\{|\varphi(e^{\lambda+i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| : \theta \in \mathbb{R}\} \leq \omega(\varphi; e^\lambda - 1).$$

Переходя теперь в этом неравенстве к инфимуму (сначала слева, а затем справа) по всем допустимым P_n и r , получаем первое из неравенств (1).

Очевидно, что $g(z) \leq \omega(g; \rho(z, \Gamma))$. Поэтому имеем

$$\max\{g(z) : z \in L(P_n, r)\} \leq \omega(g; \max\{\rho(z, \Gamma) : z \in L(P_n, r)\}) \leq \omega(g; \rho_H(\Gamma, L(P_n, r))).$$

Переходя в этом неравенстве к инфимуму по всем допустимым P_n и r , получаем второе из неравенств (1). Лемма доказана полностью.

Для кривой Γ и любого натурального n введем в рассмотрение многочлены $Q_n(z)$ и $\Phi_n(z)$. Положим

$$Q_n(z) := c^{-n}(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n),$$

где $c = c(\Gamma)$ – гармоническая емкость кривой Γ (см. [2, гл. 7, § 3]),

$$a_k := \varphi \left(\exp \left\{ \frac{(2k+1)\pi i}{n} \right\} \right).$$

Через $\Phi_n(z)$ обозначим многочлен Фабера n -й степени, т.е. такой полином, что $\Phi_n(z) - \psi^n(z) = O(1/z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см., например, [3, т. 2, гл. 5, п. 4.5]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая, $g(z) = g(z, \infty)$ – функция Грина с полюсом на бесконечности для внешности кривой Γ . Тогда для любого натурального n найдутся такие положительные числа $r_1 = r_1(n)$ и $r_2 = r_2(n)$, что лемнискаты $L(Q_n, r_1)$ и $L(\Phi_n, r_2)$ являются замкнутыми аналитическими жордановыми кривыми, содержащими Γ внутри себя, и неравенство

$$\max\{g(z) : z \in L(Q_n, r_1)\} \leq \omega(g; d) + 2\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt \quad (2)$$

справедливо для любого $d \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$, а неравенство

$$\max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} \leq \omega(g; d) + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt \quad (3)$$

справедливо для таких $d \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$, что второе слагаемое справа в этом неравенстве не превосходит первого. Отсюда при таких же d имеем

$$M_n(\Gamma) \leq \omega(g; d) + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Указанные в теореме 1 условия справедливости неравенств (2)–(4) не существенны при их практическом применении, поскольку наилучшие по порядку величин оценки получаются при d , определяемых из условия равенства между собой двух слагаемых справа в этих неравенствах – так как при $d \searrow 0$ первое слагаемое справа убывает к нулю, второе возрастает к $+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для функции $g(z)$ известно интегральное представление (см., например, [2, гл. 7, § 3]):

$$g(z) = \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |z - \zeta| d \operatorname{Arg} \psi(\zeta),$$

где $\gamma = \gamma(\Gamma) = -\log c(\Gamma)$ – постоянная Робэна для кривой Γ , функция $\operatorname{Arg} \psi(z) = \operatorname{Im} \operatorname{Log} \psi(z)$ является гармонически сопряженной к $g(z)$ (каждая ее локально непрерывная ветвь на Γ строго возрастает и получает приращение 2π при однократном обходе Γ в положительном направлении). Отсюда при $f(\theta) = \varphi(e^{i\theta})$ получаем представление

$$g(z) = \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - f(\theta)| d\theta. \quad (5)$$

Для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$ положим

$$\theta_k := \frac{(2k+1)\pi}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi(k+1)}{n} \right).$$

Тогда $e^{i\theta_k} \in C$, $f(\theta_k) \in \Gamma$. При любом $z \in G_\Gamma$ имеем для

$$S := \left| g(z) - \left(\gamma + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log |z - f(\theta_k)| \right) \right|$$

следующее выражение:

$$\begin{aligned} S &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - f(\theta)| d\theta - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{n} \log |z - f(\theta_k)| \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Для любых наперед заданных положительных чисел r_0 и r по формуле Тейлора для функции $\log r$ с остаточным членом в форме Лагранжа получаем равенство

$$\log r = \log r_0 + \frac{(r - r_0)}{r^*},$$

где $r^* > 0$ заключено между числами r_0 и r . Полагая $r = |z - f(\theta)|$, $r_0 = |z - f(\theta_k)|$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{||z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)||}{|z - f(\theta_k^*)|} d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{|f(\theta) - f(\theta_k)|}{|z - f(\theta_k^*)|} d\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\theta_k^* = \theta_k^*(\theta)$ – такое число, лежащее между θ и θ_k , что $r^* = r^*(k, \theta) = |z - f(\theta_k^*)|$.

Пусть далее при рассматриваемом n точка $z \in \overline{G}_\Gamma \setminus \{\infty\}$ удовлетворяет условию $d^* := \rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Тогда

$$|z - f(\theta)| \leq |z - f(\theta_k^*)| + |f(\theta_k^*) - f(\theta)| \leq |z - f(\theta_k^*)| + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \leq 2|z - f(\theta_k^*)|$$

и, следовательно, $1/|z - f(\theta^*)| \leq 2/|z - f(\theta)|$. Поэтому из (7) получаем

$$S \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{|f(\theta) - f(\theta_k)|}{|z - f(\theta)|} d\theta \leq \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|}. \quad (8)$$

Пусть $m(t) := \sup\{\text{mes}\{\psi(B_t \cap \Gamma)\}\}$, где супремум берется по всем замкнутым кругам B_t радиуса t , центры которых лежат в области G_Γ , а mes – линейная мера на окружности C . Оценим интеграл в правой части неравенства (8):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|} &= \int_0^\infty \frac{1}{t} d\text{mes}\{\theta : |z - f(\theta)| \leq t\} = \int_{d^*}^\infty \frac{1}{t} d\text{mes}\{\theta : |z - f(\theta)| \leq t\} \\ &= -\frac{\text{mes}\{\theta : |z - f(\theta)| \leq d^*\}}{d^*} + \int_{d^*}^\infty \frac{\text{mes}\{\theta : |z - f(\theta)| \leq t\}}{t^2} dt \\ &\leq \int_{d^*}^\infty \frac{\text{mes}\{\theta : |z - f(\theta)| \leq t\}}{t^2} dt \leq \int_{d^*}^\infty \frac{m(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (8) получаем

$$S = \left| g(z) - \left(\gamma + \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \log |z - f(\theta_k)| \right) \right| \leq \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{\pi} \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt \quad (9)$$

для любых таких $z \in \overline{G}_\Gamma \setminus \{\infty\}$, что $d^* = \rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Напомним, что $Q_n(z) := c^{-n}(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$, где $c = c(\Gamma) = e^{-\gamma}$ – гармоническая емкость кривой Γ , $a_k := f(\theta_{k-1}) = \varphi(e^{i\theta_{k-1}})$, $k = 1, 2, \dots, n$. Домножая обе части неравенства (9) на n и потенцируя, получаем

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{n}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right) &\leq \frac{\exp\{ng(z)\}}{|Q_n(z)|} = \frac{|\psi^n(z)|}{|Q_n(z)|} \\ &\leq \exp\left(\frac{n}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Возьмем $\lambda > 0$ таким, чтобы было

$$d^{**} = d^{**}(\lambda) := \rho(\Gamma, \Gamma_\lambda) = \min\{d^* = \rho(z, \Gamma) : z \in \Gamma_\lambda\} \geq \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)$$

(так что при $z \in \overline{G}_{\Gamma_\lambda}$ выполняется принятое выше условие $\rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$), и положим $r_1 = \max\{|Q_n(z)| : z \in \Gamma_\lambda\}$. Напомним, что $\Gamma_\lambda := \{z : g(z) = \lambda\}$, $\rho(\Gamma, \Gamma_\lambda)$ – обычное (евклидово) расстояние между Γ и Γ_λ . Тогда по левому из неравенств (10) имеем при $z \in \Gamma_\lambda$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{n}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^{**}}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right) &\leq \frac{\exp\{n\lambda\}}{|Q_n(z)|}, \\ r_1 = \max\{|Q_n(z)| : z \in \Gamma_\lambda\} &\leq \exp\left(n\left(\lambda + \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{\pi} \int_{d^{**}}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right)\right). \end{aligned}$$

Используя это неравенство, из правого неравенства в (10) аналогично получаем при $z \in L(Q_n, r_1)$:

$$\begin{aligned} \exp\{ng(z)\} &\leq |Q_n(z)| \exp\left(\frac{n}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right) \\ &= r_1 \exp\left(\frac{n}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right) \\ &\leq \exp\left(n\left(\lambda + \frac{2\omega(\varphi, C; \pi/n)}{\pi} \int_{d^{**}}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right)\right), \\ \max\{g(z) : z \in L(Q_n, r_1)\} &\leq \lambda + \frac{2\omega(\varphi, C; \pi/n)}{\pi} \int_{d^{**}}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Иными словами, лемниската $L = L(Q_n, r_1)$ заключена между аналитическими контурами Γ_λ и $\Gamma_{\lambda+\varepsilon}$, где

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi}\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{d^{**}}^{2\pi} \frac{m(t)}{t^2} dt.$$

Так как все нули $\{a_k\}$ многочлена $Q_n(z)$ лежат на кривой Γ , то они лежат в одной и той же компоненте связности дополнения к лемнискате L . Поэтому L является замкнутой жордановой аналитической кривой. Возьмем какое-нибудь число $d \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$ и положим $\lambda = \omega(g; d)$. Тогда $\omega(g; d) = \lambda \leq \omega(g; \rho(\Gamma, \Gamma_\lambda)) = \omega(g; d^{**}(\lambda))$ и, следовательно, $d \leq d^{**}$ (таким образом, при $z \in \overline{G}_{\Gamma_\lambda}$ выполнены условия, наложенные выше на z). Для завершения доказательства неравенства (2) заметим, что для любого $t > 0$ имеем $m(t) \leq \min\{\pi\omega(\psi; t), 2\pi\}$.

Перейдем теперь к доказательству второго неравенства. Легко показать (см., например, [3, т. 2, гл. 5, п. 4.5]), что для любого $\varepsilon > 0$ и всех $z \in G_{\Gamma_\varepsilon}$ имеет место равенство

$$\Phi_n(z) - \psi^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (11)$$

Пусть $\log(\zeta - z)$ – некоторая аналитическая на кривой Γ_ε ветвь функции $\text{Log}(\zeta - z)$. Пусть $\theta \in [0, 2\pi]$, тогда равенство $\theta = \varphi(e^{\varepsilon+i\theta})$ определяет параметризацию кривой Γ_ε . Имеем $\psi^n(\zeta) = e^{n(\varepsilon+i\theta)}$. Преобразуя интеграл в правой части равенства (11), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) - \psi^n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi^n(\zeta) d\log(\zeta - z) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \log(\zeta - z) d\psi^n(\zeta) = -\frac{e^{n\varepsilon}}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{\varepsilon+i\theta}) - z) de^{in\theta} \\ &= -\frac{ne^{n\varepsilon}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{\varepsilon+i\theta}) - z) e^{in\theta} d\theta \\ &= \frac{ne^{n\varepsilon}}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\log(\varphi(e^{\varepsilon+i(\theta+\pi/n)}) - z) - \log(\varphi(e^{\varepsilon+i\theta}) - z)) e^{in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что для всех $z \in G_\Gamma$ имеет место равенство

$$\Phi_n(z) - \psi^n(z) = \frac{n}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\log(f(\theta + \pi/n) - z) - \log(f(\theta) - z)) e^{in\theta} d\theta. \quad (12)$$

При $d^* = \rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$ аналогично рассуждениям, предшествующим неравенствам (8), получаем оценку сверху

$$\left| \log\left(f\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) - z\right) - \log(f(\theta) - z) \right| \leq 2 \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{|z - f(\theta)|}.$$

Отсюда следует

$$|\Phi_n(z) - \psi^n(z)| \leq \frac{n\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|z - f(\theta)|} d\theta \leq \frac{n\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \int_{d^*}^\infty \frac{m(t)}{t^2} dt.$$

Имеем

$$|\log|\Phi_n(z)| - \log|\psi^n(z)|| \leq \frac{|\Phi_n(z) - \psi^n(z)|}{\min\{|\Phi_n(z)|, |\psi^n(z)|\}} \leq \frac{|\Phi_n(z) - \psi^n(z)|}{(|\psi^n(z)| - |\Phi_n(z) - \psi^n(z)|)}.$$

Пусть $|\psi(z)| = e^\lambda$. Тогда при

$$\lambda \geq \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \cdot \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt$$

справедливы неравенства

$$|\psi^n(z)| - |\Phi_n(z) - \psi^n(z)| \geq 1 + n\lambda - \frac{n\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt \geq 1.$$

Поэтому при указанных условиях на λ имеем $|\log |\psi^n(z)| - \log |\Phi_n(z)|| \leq |\psi^n(z) - \Phi_n(z)|$. То есть

$$\exp\left(-n \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right) \leq \frac{|\psi^n(z)|}{|\Phi_n(z)|} \leq \exp\left(n \frac{\omega(\varphi, C; \pi/n)}{2\pi} \int_{d^*}^{\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt\right).$$

Повторяя рассуждения из первой части доказательства теоремы, следующие за неравенствами (10), уже для многочлена $\Phi_n(z)$ получаем, что

$$\max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} \leq \omega(g; d) + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_d^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt$$

для некоторого положительного числа $r_2 = r_2(n)$ и для любого $d \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$, при котором второе слагаемое справа в этом неравенстве не превосходит первого (тогда для $\lambda = \omega(g; d)$ выполнены налагаемые на него выше условия), причем лемниската $L(\Phi_n, r_2)$ является замкнутой аналитической жордановой кривой, содержащей Γ внутри себя. Теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой замкнутой жордановой кривой Γ имеет место равенство

$$M_n(\Gamma) = O\left(\sqrt[3]{\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\omega(g; d) = O(\sqrt{d})$ при $d \rightarrow 0$, $d > 0$. Это следует, например, из теоремы 3 работы Тамразова [4]. Далее, $\omega(\psi; t) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$, $t > 0$, и, следовательно,

$$\int_d^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt = o\left(\frac{1}{d}\right) \quad \text{при } d \rightarrow 0, \quad d > 0.$$

Положим $d = \sqrt[3]{\omega^2(\varphi, C; \pi/n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega(g; d) &= O\left(\sqrt[3]{\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)}\right), \\ \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \cdot \int_d^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt &= O\left(\sqrt[3]{\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)}\right). \end{aligned}$$

По теореме 1 получаем требуемое равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из следствия 1 вытекает, что для любой замкнутой жордановой кривой Γ имеем $M_n(\Gamma) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По лемме получаем, что $H_n(\Gamma) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом и состоит упомянутый выше результат Гильберта.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Γ — замкнутая жорданова кривая, функция ψ удовлетворяет в $\overline{G}_\Gamma$ условию $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$:

$$|\psi(z') - \psi(z'')| \leq M|z' - z''|^\alpha$$

для любых z', z'' из $\overline{G}_\Gamma$, $M = \text{const} > 0$. Тогда при $0 < \alpha < 1$ выполнено соотношение

$$M_n(\Gamma) = O\left(\omega^\beta\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\beta = \max\{\alpha, 1/(3-2\alpha)\}$, а при $\alpha = 1$

$$M_n(\Gamma) = O\left(\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \log\left(\frac{1}{\omega(\varphi, C; \pi/n)}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $0 < \alpha < 1$. Заметим, что если функция $\psi(z)$ удовлетворяет в $\overline{G}_\Gamma$ условию $\text{Lip } \alpha$, то и функция $g(z)$ удовлетворяет в $\overline{G}_\Gamma$ этому условию:

$$\begin{aligned} |g(z') - g(z'')| &= |\log |\psi(z')| - \log |\psi(z'')|| \leq ||\psi(z')| - |\psi(z'')|| \\ &\leq |\psi(z') - \psi(z'')| \leq M|z' - z''|^\alpha \end{aligned}$$

для любых z' и z'' из $\overline{G}_\Gamma$. Следовательно, для любого числа $d > 0$ получаем неравенство $\omega(g; d) \leq Md^\alpha$. Имеем также $\omega(\psi; t)/t^2 \leq Mt^{\alpha-2}$ для любого $t > 0$. Поэтому

$$\int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt = O(d^{\alpha-1}).$$

Положим $d = \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Тогда по теореме 1 получаем, что

$$\begin{aligned} M_n(\Gamma) &\leq M\omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)^\alpha + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) O\left(\omega^{\alpha-1}\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)\right) \\ &= O\left(\omega^\alpha\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что $\beta = \alpha$ при $1/2 < \alpha < 1$ и $\beta = 1/(3-2\alpha)$ при $0 < \alpha \leq 1/2$. В первом случае требуемое соотношение доказано. Рассмотрим случай $0 < \alpha \leq 1/2$. Тогда $2/(3-2\alpha) \leq 1$. Как уже было отмечено выше, для любой кривой Γ имеем $\omega(g; d) = O(\sqrt{d})$ при $d \rightarrow 0$, $d > 0$. То есть существует такая постоянная $k = k(\Gamma)$, что при достаточно малых $d > 0$ справедливо неравенство $\omega(g; d) \leq k\sqrt{d}$. Положим $d = \omega^{2/(3-2\alpha)}(\varphi, C; \pi/n)$. Тогда

$$\int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt = O(d^{\alpha-1}) = O\left(\omega^{2(\alpha-1)/(3-2\alpha)}\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Легко видеть, что $1 + 2(\alpha - 1)/(3 - 2\alpha) = 1/(3 - 2\alpha)$. По теореме 1 получаем $M_n(\Gamma) \leq O(\omega^{1/(3-2\alpha)}(\varphi, C; \pi/n))$.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Тогда $\omega(g; d) \leq Md$, $\omega(\psi; d) \leq Md$ для любого $d > 0$. Поэтому

$$\int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; t), 2\}}{t^2} dt = O(-\log d) \quad \text{при } d \rightarrow 0.$$

Полагая $d = \omega(\varphi, C; \pi/n)$, по теореме 1 получаем требуемое соотношение.

Для того чтобы получить оценку величин $H_n(\Gamma)$ и $M_n(\Gamma)$ непосредственно в терминах метрических свойств кривой Γ , можно воспользоваться результатами работы Долженко [5], в которой дается оценка сверху на модули непрерывности функций $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$ — соответственно однолистного конформного отображения внутренности замкнутой жордановой кривой $\hat{\Gamma}$ на внутренность единичного круга и обратного к нему отображения в метрических терминах кривой $\hat{\Gamma}$, если определить $\hat{\Gamma}$ как образ кривой Γ при отображении $\hat{z} = 1/(z - a)$, где a — некоторая точка, лежащая внутри кривой Γ .

2. ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ — гладкая замкнутая жорданова кривая, причем функции $\psi(z)$ и $\varphi(w)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}_\Gamma$ и $\overline{G}_C$ соответственно; кроме того,

$$\omega(\arg f', \mathbb{R}; \delta) = O\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right), \quad \omega(f', \mathbb{R}; \delta) = O\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad \delta > 0.$$

Тогда существуют такие числа $r_1 = r_1(n) > 0$ и $r_2 = r_2(n) > 0$, что при $n \rightarrow \infty$ имеют место равенства

$$\max\{g(z) : z \in L(Q_n, r_1)\} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так что (см. лемму)

$$H_n(\Gamma) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad M_n(\Gamma) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и ранее, $\theta_k := (2k + 1)\pi/n$ для любого $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Пусть также $z \in G_\Gamma$ и $\rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Для любых наперед заданных положительных чисел r_0 и r имеет место формула Тейлора для функции $\log r$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\log r = \log r_0 + \frac{(r - r_0)}{r_0} - \frac{(r - r_0)^2}{2r^{*2}},$$

где $r^* > 0$ заключено между числами r_0 и r . Применим эту формулу к подинтегральным функциям в сумме

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right|,$$

полагая в k -м ее члене $r_0 = |z - f(\theta_k)|$, $r = |z - f(\theta)|$ при всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \left(\frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)}{|z - f(\theta_k)|} - \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)^2}{2|z - f(\theta_k^*(\theta))|^2} \right) d\theta \right|, \end{aligned}$$

где $\theta_k^* = \theta_k^*(\theta)$ – некоторое вещественное число, заключенное между θ_k и θ . Опеним k -й член полученной суммы:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \left(\frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)}{|z - f(\theta_k)|} - \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)^2}{2|z - f(\theta_k^*(\theta))|^2} \right) d\theta \right| \\ & \leq \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)}{|z - f(\theta_k)|} d\theta \right| \\ & \quad + \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)^2}{2|z - f(\theta_k^*(\theta))|^2} d\theta \right|. \end{aligned}$$

Для функции $|z - f(\theta)|$ переменного θ имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$|z - f(\theta)| = |z - f(\theta_k)| + |f'(\hat{\theta}_k)| \cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k))(\theta - \theta_k),$$

где $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(\theta)$ – некоторое число, лежащее между θ и θ_k . Обозначим через $\log(z - \zeta)$ некоторую однозначную аналитическую по переменной ζ в окрестности кривой Γ ветвь функции $\text{Log}(z - \zeta)$. Положим $\|f'\| := \max\{|f'(\theta)| : \theta \in \mathbb{R}\}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|z - f(\theta_k)|} \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{|z - f(\theta_k)|} \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} |f'(\hat{\theta}_k)| \cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k))(\theta - \theta_k) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{|z - f(\theta_k)|} \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} |f'(\theta_k)| \cos(\arg(f(\theta_k) - z) - \arg f'(\theta_k))(\theta - \theta_k) d\theta \right. \\ & \quad + \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (|f'(\hat{\theta}_k)| \cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k)) \\ & \quad \left. - |f'(\theta_k)| \cos(\arg(f(\theta_k) - z) - \arg f'(\theta_k)))(\theta - \theta_k) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{|z - f(\theta_k)|} \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (|f'(\hat{\theta}_k)| \cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k)) \right. \\ & \quad \left. - |f'(\theta_k)| \cos(\arg(f(\theta_k) - z) - \arg f'(\theta_k)))(\theta - \theta_k) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - f(\theta_k)|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} ||f'(\hat{\theta}_k)| \cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k)) \\ & \quad - |f'(\theta_k)| \cos(\arg(f(\theta_k) - z) - \arg f'(\theta_k))||\theta - \theta_k| d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\pi \|f'\|}{n|z - f(\theta_k)|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} |\cos(\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg f'(\hat{\theta}_k)) - \\
&\quad - \cos(\arg(f(\theta_k) - z) - \arg f'(\theta_k))| d\theta + \frac{2\omega(f', \mathbb{R}; \pi/n)\pi^2}{n^2|z - f(\theta_k)|} \\
&\leq \frac{\pi \|f'\|}{n|z - f(\theta_k)|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} |\arg(f(\hat{\theta}_k) - z) - \arg(f(\theta_k) - z)| \\
&\quad + |\arg f'(\hat{\theta}_k) - \arg f'(\theta_k)| d\theta + \frac{2\omega(f', \mathbb{R}; \pi/n)\pi^2}{n^2|z - f(\theta_k)|} \\
&\leq \frac{\pi \|f'\|}{n|z - f(\theta_k)|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} |\log(z - f(\hat{\theta}_k)) - \log(z - f(\theta_k))| d\theta \\
&\quad + \frac{2\pi^2(\|f'\|\omega(\arg f', \mathbb{R}; \pi/n) + \omega(f', \mathbb{R}; \pi/n))}{n^2|z - f(\theta_k)|} \\
&\leq \frac{\pi \|f'\|}{n|z - f(\theta_k)|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \int_{\theta_k}^{\hat{\theta}_k} \frac{|f'(\hat{\theta})|}{|z - f(\hat{\theta})|} d\hat{\theta} d\theta \\
&\quad + \frac{2\pi^2(\|f'\|\omega(\arg f', \mathbb{R}; \pi/n) + \omega(f', \mathbb{R}; \pi/n))}{n^2|z - f(\theta_k)|} \\
&\leq \frac{\pi^2 \|f'\|^2}{n^2|(z - f(\bar{\theta}_k))(z - f(\theta_k))|} \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} 1 d\theta \\
&\quad + \frac{\pi^2(\|f'\|\omega(\arg f', \mathbb{R}; \pi/n) + \omega(f', \mathbb{R}; \pi/n))}{n^2|z - f(\theta_k)|}.
\end{aligned}$$

Здесь $\bar{\theta}_k = \bar{\theta}_k(\hat{\theta}_k, \theta_k)$ – некоторое число, лежащее между θ_k и $\hat{\theta}_k$.

Пусть некоторое θ^* принадлежит отрезку с концами θ_k и θ , где $\theta \in [2\pi k/n, 2\pi(k+1)/n]$. Тогда из наложенного нами ограничения $\rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$ следует, что $|z - f(\theta^*)| \geq |z - f(\theta)|/2$, а следовательно, $1/|z - f(\theta^*)| \leq 2/|z - f(\theta)|$. Применим эти неравенства, полагая последовательно $\theta^* = \theta_k$, $\theta^* = \theta_k^*$ и $\theta^* = \bar{\theta}_k$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{n|z - f(\theta_k)|} &= \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta_k)|} \leq 2 \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|}, \\
\int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta_k^*)|^2} &\leq 4 \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2}, \\
\int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|(z - f(\bar{\theta}_k))(z - f(\theta_k))|} &\leq 4 \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2}.
\end{aligned}$$

Наконец заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)}{|z - f(\theta_k)|} d\theta \right| \leq 4\|f'\|^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2} \\
&\quad + \frac{2\pi}{n} \left(\|f'\|\omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|}.
\end{aligned}$$

Имеем также

$$\left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{(|z - f(\theta)| - |z - f(\theta_k)|)^2}{2|z - f(\theta_k^*(\theta))|^2} d\theta \right| \leq 2\omega^2\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right| \\ & \leq 2 \left(2\|f'\|^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \omega^2\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2} \\ & \quad + \frac{2\pi}{n} \left(\|f'\| \omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|}. \end{aligned}$$

Суммирование по $k = 0, 1, \dots, n-1$ дает оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right| \\ & \leq 2 \left(2\|f'\|^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \omega^2\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2} \\ & \quad + \frac{2\pi}{n} \left(\|f'\| \omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|}. \end{aligned}$$

Положим $d^* := \rho(z, \Gamma)$. Как было показано при доказательстве теоремы 1,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|} \leq \pi \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr.$$

Аналогично показывается, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - f(\theta)|^2} \leq 2\pi \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right| \\ & \leq 2 \left(2\|f'\|^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \omega^2\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr \\ & \quad + \frac{\pi}{n} \left(\|f'\| \omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Как и ранее, рассмотрим многочлен $Q_n(z) = (\prod_{k=1}^n (z - a_k)) / c^n(\Gamma)$, где $c(\Gamma) = e^{-\gamma}$ ($\gamma = \gamma(\Gamma)$ — постоянная Робэна), $a_k = f(\theta_k)$. Тогда

$$\left| \frac{1}{n} \log |Q_n(z)| - g(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left| \int_{2\pi k/n}^{2\pi(k+1)/n} (\log |z - f(\theta)| - \log |z - f(\theta_k)|) d\theta \right|.$$

Повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что

$$\begin{aligned} & \max\{|g(z)| : z \in L(Q_n, r_1)\} \\ & \leq \omega(g; d) + 4 \left(2\|f'\|^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \omega\left(\varphi, C; \frac{\pi}{n}\right)^2 \right) \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr \\ & \quad + 2 \left(\|f'\| \omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \left(\frac{\pi}{n}\right) \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr \end{aligned}$$

для любого $d \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Напомним, что это ограничение на параметр d возникло из условия $\rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$ на те $z \in G_\Gamma$, для которых справедливы изложенные выше рассуждения.

Из условия теоремы следует, что существуют такие абсолютные положительные постоянные C_1, C_2, C_3 , что $\omega(g; r) \leq C_1 r$, $\omega(\psi; r) \leq C_2 r$, $\omega(\varphi, C; r) \leq C_3 r$ для любого $r > 0$. Тогда

$$\int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr = O\left(\frac{1}{d}\right), \quad \int_d^\infty \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr = O(-\log d),$$

$\omega(g; d) = O(d)$ при $d \rightarrow 0$, $\omega(\varphi, C; \pi/n) = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $d = \omega(\varphi, C; \pi/n)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \max\{|g(z)| : z \in L(Q_n, r_1)\} \\ & = O\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\|f'\| \omega\left(\arg f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) \right) \cdot O\left(\frac{\log n}{n}\right). \end{aligned}$$

Используя теперь условия, наложенные на производную f' функции f , получим

$$\max\{|g(z)| : z \in L(Q_n, r_1)\} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Докажем, что существует набор чисел $r_2 = r_2(n) > 0$ таких, что $\max\{|g(z)| : z \in L(\Phi_n, r_2)\} = O(1/n)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z) - \psi^n(z)| &= \frac{n}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \log(f(\theta) - z) e^{in\theta} d\theta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta)}{f(\theta) - z} e^{in\theta} d\theta \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta) - z} - \frac{f'(\theta - \pi/n)}{f(\theta - \pi/n) - z} \right) e^{in\theta} d\theta \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left(f'(\theta) \left(\frac{1}{f(\theta) - z} - \frac{1}{f(\theta - \pi/n) - z} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{f(\theta - \pi/n) - z} \left(f'(\theta) - f'\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \right) \right) e^{in\theta} d\theta \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left(f'(\theta) \frac{-f'(\theta^*)\pi}{n(f(\theta^*) - z)^2} + \frac{f'(\theta) - f'(\theta - \pi/n)}{f(\theta - \pi/n) - z} \right) e^{in\theta} d\theta \right|, \end{aligned}$$

где $\theta^* = \theta^*(\theta) \in [\theta - \pi/n, \theta]$. Считаем $d^* = \rho(z, \Gamma) \geq \omega(\varphi, C; \pi/n)$, тогда $1/|f(\theta^*) - z| \leq 2/|f(\theta) - z|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z) - \psi^n(z)| &\leq \frac{\|f'\|^2(\pi/n)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f(\theta) - z|^2} + \frac{\omega(f', \mathbb{R}; \pi/n)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f(\theta) - z|} \\ &\leq 2\|f'\|^2 \frac{\pi}{n} \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr + \frac{\omega(f', \mathbb{R}; \pi/n)}{2} \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Повторя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} &\leq \omega(g; d^*) + \frac{4\pi\|f'\|^2}{n^2} \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^3} dr \\ &\quad + \frac{\omega(f', \mathbb{R}; \pi/n)}{n} \int_{d^*}^{\infty} \frac{\min\{\omega(\psi; r), 2\}}{r^2} dr \end{aligned}$$

при $d^* = \omega(\varphi, C; \pi/n)$ и некотором положительном $r_2 = r_2(n)$. Кроме того, лемниската $L(\Phi_n, r_2)$ будет замкнутой жордановой кривой, содержащей Γ внутри себя. Следовательно,

$$\max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} = O\left(\frac{1}{n}\right) + 4\pi\|f'\|^2 O\left(\frac{1}{n}\right) + \omega\left(f', \mathbb{R}; \frac{\pi}{n}\right) O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$. То есть в условиях теоремы 2 получаем

$$\max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r_2)\} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

а следовательно, и $M_n(\Gamma) = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. По лемме равенство $M_n(\Gamma) = O(1/n)$ эквивалентно $H_n(\Gamma) = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Γ – гладкая замкнутая жорданова кривая, угол наклона касательной $\theta(s)$ к которой как функция длины дуги s имеет модуль непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right) \quad (13)$$

при $\delta \rightarrow 0$, $\delta > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеют место равенства

$$H_n(\Gamma) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad M_n(\Gamma) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\|f'\| := \max\{|f'(\theta)| : \theta \in \mathbb{R}\}$ (напомним, что $f(\theta) := \varphi(e^{i\theta})$). Как показал Варшавский (см. [6, теорема 2]), условие $\int_0^\delta \omega(t)/t dt < \infty$ влечет за собой непрерывную дифференцируемость функций ψ и φ в $\overline{G}_\Gamma$ и $\overline{G}_C$ соответственно, при этом

$$\begin{aligned}\omega_0(\delta) &:= \omega(\arg f', \mathbb{R}; \delta) \leq \omega(\|f'\|\delta) + \delta, \\ \omega^*(\delta) &:= \omega(f', \mathbb{R}; \delta) \leq M \left(\int_0^\delta \frac{\omega_0(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega_0(t)}{t^2} dt \right)\end{aligned}$$

для некоторой абсолютной положительной константы M , $\delta > 0$.

Ясно, что

$$\omega_0(\delta) \log\left(\frac{1}{\delta}\right) = \omega_0(\delta) \int_\delta^1 \frac{dt}{t} \leq \int_\delta^1 \frac{\omega_0(t)}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{\omega_0(t)}{t} dt = A < \infty,$$

где $A > 0$ не зависит от $\delta > 0$. Следовательно, $\omega_0(\delta) = O(1/\log(1/\delta))$ при $\delta \rightarrow 0$, $\delta > 0$. Условие же $\omega^*(\delta) = O(1/\log(1/\delta))$ при $\delta \rightarrow 0$, очевидно, справедливо в силу оценки Варшавского и соотношения (13). По теореме 2 получаем $M_n = O(1/n)$ и $H_n = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

3. ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ – линия уровня функции Грина $g_K(z)$ для оператора Лапласа во внешности некоторого континуума $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением: $\Gamma = \{z : g_K(z) = \lambda\}$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{H_n(\Gamma)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(\Gamma)} \leq e^{-\lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что функция $w = \psi(z)$ конформно и однолистно отображает внешность кривой Γ на внешность единичной окружности C , $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) > 0$, $g(z)$ – функция Грина с полюсом в ∞ для внешности кривой Γ . В условиях теоремы функция $\psi(z)$ аналитически продолжается во внешность континуума K . Пусть ε – произвольное число из интервала $(0, \lambda)$, $l := \{z : g_K(z) = \varepsilon\}$. Очевидно, что $g_K(z) - \lambda \equiv g(z) = \log|\psi(z)|$ всюду во внешности континуума K . Поэтому при $z \in l$ справедливо равенство $|\psi(z)| = \exp\{-(\lambda - \varepsilon)\}$. Для всех $z \in \overline{G}_\Gamma \setminus \{\infty\}$ и некоторого числа $A = A(\varepsilon) > 0$ имеем

$$|\Phi_n(z) - \psi^n(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_l \frac{\psi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq A \cdot e^{-n(\lambda - \varepsilon)}.$$

Отсюда, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что

$$\max\{g(z) : z \in L(\Phi_n, r)\} \leq \frac{A}{n} e^{-n(\lambda - \varepsilon)}, \quad \text{где } r := \max\{|\Phi_n(z)| : z \in \Gamma\}.$$

Заметим, что кривая Γ лежит в замкнутой области, ограниченной лемнискатой $L = L(\Phi_n, r)$, которая при достаточно больших n является замкнутой аналитической жордановой кривой. Для всех таких n имеем $M_n(\Gamma) \leq (A/n)e^{-n(\lambda - \varepsilon)}$ и, следовательно, учитывая произвольность $\varepsilon \in (0, \lambda)$ и лемму, получаем соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{H_n(\Gamma)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(\Gamma)} \leq e^{-\lambda}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любой замкнутой аналитической жордановой кривой Γ справедливо неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{H_n(\Gamma)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(\Gamma)} < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Шварца об аналитическом продолжении через аналитическую кривую (см., например, [3, т. 2, гл. 8, п. 7.1]) функция $\psi(z)$ аналитически продолжается через Γ как однолистная аналитическая функция, конформно отображающая внешность некоторой аналитической жордановой кривой S , лежащей строго внутри Γ , на внешность некоторой окружности $\{z : |z| = R = \text{const} < 1\}$. Таким образом, кривая Γ является линией уровня функции Грина $g_S(z)$ для внешности S . Отсюда и из теоремы 3 вытекает требуемое.

В заключение хочу искренне поблагодарить профессора Е. П. Долженко за постановки задач и пристальное внимание к работе, а также доцента П. А. Бородина за ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hilbert D. Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe // Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1897. P. 63–70.
- [2] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968.
- [4] Тамразов П. М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1033–1043.
- [5] Долженко Е. П. О конформных отображениях жордановых областей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. № 4. С. 66–68.
- [6] Warschawski S. E. On differentiability at the boundary in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. № 4. P. 614–620.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kosukhin_oleg@mail.ru

Поступило
06.11.2003