Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Линке, О конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 886–902

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:08:31

УДК 513.83+517.98

О КОНУСЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СНИЗУ ФУНКЦИЙ

Ю.Э. Линке

Доказано, что конус ограниченных полунепрерывных снизу функций, определенных на тихоновском пространстве X , алгебраически и структурно изоморфен и изометричен некоторому выпуклому конусу, содержащемуся в конусе всех ограниченных полунепрерывных снизу функций, определенных на стоун-чеховской компактификации βX , тогда и только тогда, когда пространство X нормально. Эта теорема применяется для изучения связей между одним классом многозначных отображений и сублинейными операторами. Даны приложения этих результатов для получения новых доказательств теорем о непрерывных селекторах.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Постановка задачи. Пусть X – любое топологическое пространство. Через $BC(X)$ обозначим вещественное банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций, заданных на X , с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа, со стандартной структурой частичного порядка, когда

$$f_1 \geq f_2 \iff f_1(x) \geq f_2(x) \quad \text{для всех } x \in X,$$

и чебышевской $\sup$ -нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Если X – компакт, т.е. хаусдорфово компактное топологическое пространство, то вместо $BC(X)$ пишем $C(X)$. Через $BC(X)_\sim$ обозначим конус всех ограниченных полунепрерывных снизу функций, заданных на X , с теми же, что и в $BC(X)$, операциями, структурой и топологией равномерной сходимости на X , т.е. $BC(X)_\sim$ рассматривается как выпуклый конус в банаховом пространстве $B(X)$ всех ограниченных на X функций. Из фундаментальной теоремы М. Г. Крейна, С. Г. Крейна и С. Какутани (см. [1, теорема VII.5.1]), называемой в дальнейшем теоремой Крейнов–Какутани, следует, что для каждого топологического пространства X существует зависящий от X компакт Q_X , для которого $BC(X)$ алгебраически и структурно изоморфно и изометрично $C(Q_X)$. Алгебраический изоморфизм здесь означает, что существует взаимно однозначный линейный и непрерывный оператор $g: BC(X) \rightarrow C(Q_X)$, структурный изоморфизм означает, что $g(f) \geq 0 \iff f \geq 0$, а изометричность – что нормы соответствующих друг другу элементов из $BC(X)$ и $C(Q_X)$ равны. Аналогичными свойствами обладает и обратный к g оператор g^{-1} .

Известно также [2, гл. 5, § 3], что если X – тихоновское пространство, т.е. оно вполне регулярно и удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 (все одноточечные множества замкнуты), то в качестве компакта Q_X можно взять его стоун-чеховскую компактификацию βX (наибольший элемент среди всех хаусдорфовых компактификаций).

Банахово пространство $BC(X)$, особенно когда X – компакт, изучалось с многих точек зрения: теория компактных расширений Стоуна–Чеха, теорема Банаха–Стоуна, теорема Стоуна–Вейерштрасса [2, гл. 5, § 3], теорема Крейнов–Какутани [1, гл. 7, § 5], теорема Гельфанда об общем виде линейного оператора [3] (см. также [4, теорема VI.7.1]).

Выпуклый конус $BC(X)_\sim$ до сих пор мало изучен несмотря на то, что он является естественной областью определения или областью значений сублинейных операторов. В связи с теоремой Крейнов–Какутани и в связи с исследованиями сублинейных операторов и многозначных отображений возникает естественный вопрос об алгебраическом и структурном изоморфизме, изометрии выпуклых конусов $BC(X)_\sim$ и $BC(\beta X)_\sim$, если пространства X тихоновские.

Пусть X – компакт, тогда $\beta X = X$ (с точностью до гомеоморфизма). Поэтому можно считать, что $BC(X)_\sim = BC(\beta X)_\sim$, и тождественный оператор реализует требуемый изоморфизм. К сожалению, это единственный случай, как мы увидим далее, когда выпуклые конусы $BC(X)_\sim$ и $BC(\beta X)_\sim$ алгебраически и структурно изоморфны и изометричны. Однако верна

ТЕОРЕМА 1. *Следующие условия для тихоновского пространства X равносильны:*

- 1) *топологическое пространство X нормально;*
- 2) *в $BC(\beta X)_\sim$ существует выпуклый конус H , содержащий $C(\beta X)$, такой, что конус $BC(X)_\sim$ алгебраически и структурно изоморфен и изометричен выпуклому конусу H .*

При этом выпуклый конус $H = BC(\beta X)_\sim$ тогда и только тогда, когда X – компакт. Выпуклый конус H , а также изоморфизм и изометрия определяются в условии 2) однозначно.

В этой теореме алгебраический изоморфизм означает, что существует взаимно однозначное и непрерывное отображение $G: BC(X)_\sim \rightarrow H$, которое аддитивно и положительно однородно, т.е. для всех $f_1, f_2, f \in BC(X)_\sim$ и чисел $\lambda \geq 0$ верны равенства

$$G(f_1 + f_2) = G(f_1) + G(f_2), \quad G(\lambda f) = \lambda G(f);$$

структурный изоморфизм означает, что

$$G(f_1) \geq G(f_2) \iff f_1 \geq f_2,$$

а изометричность – что нормы соответствующих друг другу элементов из $BC(X)_\sim$ и H равны. Аналогичными свойствами обладает и обратный к G оператор $G^{-1}: H \rightarrow BC(X)_\sim$.

Основная цель данной работы – доказать теорему 1. Помимо этого мы стремимся увязать изучаемый вопрос с исследованиями сублинейных операторов и их связей с многозначными отображениями.

Импликацию 1) $\implies$ 2) теоремы 1 докажем чисто топологическими методами. Для этого в явной форме укажем оператор $G: BC(X)_\sim \rightarrow BC(\beta X)_\sim$ и докажем, что для нормальных пространств X он является требуемым изоморфизмом и изометрией, если считать, что $H := G(BC(X)_\sim)$ – образ $BC(X)_\sim$ для отображения G .

Относительно доказательства импликации 2) $\implies$ 1) следует признать, что автору пока, к сожалению, не известно ее топологическое доказательство. Но нет худа без

добра. Напомним, что теорема 1 появилась в результате исследований автора сублинейных операторов и их связей с многозначными отображениями. Поэтому мы рассмотрим приложения импликации $1) \Rightarrow 2)$ теоремы 1 к сублинейным операторам (теорема 2), на основе которых получим новые доказательства теорем о непрерывных селекторах многозначных отображений (теоремы 3 и 4). Эти приложения позволят нам завершить доказательство теоремы 1 и, в частности, доказать импликацию $2) \Rightarrow 1)$.

Остановимся кратко на содержании статьи, состоящей из восьми пунктов. В п. 2 для удобства читателя собраны основные определения из общей топологии, необходимые для введения двух операторов: оператора G , определенного на конусе $BC(X)_\sim$, и оператора G^{-1} , определенного на конусе $BC(\beta X)_\sim$. В п. 3 изучены их простейшие свойства, справедливые для всех тихоновских пространств X . В п. 4 для нормальных пространств X доказано основное свойство оператора G – его аддитивность, которое затем в п. 5 используется для доказательства импликации $1) \Rightarrow 2)$ теоремы 1. В п. 6 дано приложение этой импликации к построению двойственного отображения одного класса многозначных отображений в некоторый класс сублинейных операторов. В п. 7 двойственные отображения использованы для доказательства двух селекционных теорем. Опираясь на одну из них, в п. 8 завершено доказательство импликации $2) \Rightarrow 1)$ теоремы 1 и всей теоремы в целом. В частности, обоснована единственность изоморфизма и изометрии, а также доказано, что оператор G может быть аддитивным тогда и только тогда, когда топологическое пространство X является нормальным.

2. Основные определения. Операторы G и G^{-1} . Напомним определение основного объекта нашего исследования – полунепрерывной снизу (сверху) функции [5], [6].

Числовая функция f на топологическом пространстве X называется *полунепрерывной снизу* (соответственно *сверху*) в точке $x_0 \in X$, если для любого $k < f(x_0)$ (соответственно $k > f(x_0)$) существует окрестность O точки x_0 такая, что $k < f(x)$ (соответственно $k > f(x)$), какова бы ни была точка $x \in O$. Числовая функция f называется *полунепрерывной снизу* (соответственно *сверху*) на X , если она полунепрерывна снизу (соответственно сверху) в каждой точке из X .

Теперь напомним определения основных классов топологических пространств, используемых в статье.

Топологическое пространство X называется *вполне регулярным*, если для всякой точки $x_0 \in X$ и ее окрестности O существует непрерывная функция на X со значениями в $[0, 1]$, равная 1 в точке $x_0 \in X$ и 0 на дополнении $X \setminus O$. Как известно, класс вполне регулярных пространств совпадает с введенным А. Вейлем классом равномеризируемых пространств [5, теорема IX.5.2].

Топологическое пространство X называется *нормальным*, если для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B из X существует непрерывная функция на X , равная 0 на A и 1 на B .

Подчеркнем, что всюду в статье компактные топологические пространства (кратко, компакты) и локально выпуклые пространства предполагаются хаусдорфовыми, а в определение нормальных и вполне регулярных пространств включена аксиома отделимости T_1 , т.е. одноточечные множества замкнуты. Часто такие вполне регулярные пространства называют *тихоновскими*. Термин *конус* далее всегда означает выпуклый конус H в смысле Н. Бурбаки: $H + H \subseteq H$, $\lambda H = H$ для $\lambda \geq 0$. Символ Id_Z обозначает тождественный на Z оператор.

Пусть Γ – непустое множество непрерывных функций из $BC(X)$, где X – пока любое

топологическое пространство. *Верхней огибающей* $\sup \Gamma$ этого множества называется определенная на X числовая функция, значение которой в каждой точке $x \in X$ равно (возможно и $+\infty$)

$$\sup\{h(x) : h \in \Gamma\}.$$

Известно [6, гл. 4, § 5, следствие теоремы 4], что верхняя огибающая множества непрерывных функций на топологическом пространстве X есть полунепрерывная снизу функция. В равномеризируемом пространстве имеет место, кроме того, обратное утверждение, которое также верно и во вполне регулярном и в тихоновском пространстве. А именно, выполнено

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [5, предложение IX.6.5]. *Для того, чтобы всякая полунепрерывная снизу числовая (конечная или нет) функция f на топологическом пространстве X была верхней огибающей непрерывных числовых (конечных или нет) функций на X , необходимо и достаточно, чтобы X было равномеризируемо.*

Анализ доказательства этого утверждения позволяет заключить следующее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Ограниченные полунепрерывные снизу функции являются верхними огибающими ограниченных непрерывных функций.*

Введем для каждой функции $f \in BC(X)_{\sim}$, где X – любое топологическое пространство, следующее важное для дальнейших построений множество

$$\Gamma_f = \{h \in BC(X) : h \leq f\}.$$

Отметим, что множество Γ_f является непустым в силу ограниченности функции f . Для тихоновских пространств, кроме того, множество Γ_f , как это следует из утверждений 1 и 2, является верхней огибающей для f и при этом оно максимально (по включению) среди всех множеств с таким свойством.

Далее X , если не оговорено особо, всюду – тихоновское и некомпактное пространство. Без ограничения общности можно считать, что оно топологически содержится в βX как подпространство. Поэтому, используя свойства стоун-чеховской компактификации [2], [7], считаем, что оператор g , осуществляющий алгебраический и структурный изоморфизм и изометрию $BC(X)$ и $C(\beta X)$, есть оператор продолжения на βX ограниченных непрерывных функций, которые определены на X . Обратный к нему оператор g^{-1} есть оператор сужения на X непрерывных функций, определенных на βX (см. [2, гл. 5, § 3], где утверждается алгебраический изоморфизм $BC(X)$ и $C(\beta X)$, но на самом деле установлен и структурный изоморфизм). Фиксируем на протяжении всей статьи обозначения для этих операторов как g и g^{-1} .

Теперь все подготовлено для определения нужных для доказательства теоремы 1 операторов G и G^{-1} .

Определим для тихоновских пространств X оператор $G: BC(X)_{\sim} \rightarrow BC(\beta X)_{\sim}$, действующий согласно формуле

$$G(f) = \sup\{g(h) : h \in \Gamma_f\}, \quad (1)$$

где g – оператор, осуществляющий алгебраический и структурный изоморфизм и изометрию $BC(X)$ и $BC(\beta X)$. Другими словами, $G(f)$ является верхней огибающей множества функций $g(\Gamma_f)$.

Оператор $G^{-1}: BC(\beta X)_{\sim} \rightarrow BC(X)_{\sim}$ по определению есть оператор сужения ограниченных полунепрерывных снизу функций с βX на X , т.е. он определен формулой

$$G^{-1}: f \mapsto f|_X. \quad (2)$$

3. Вспомогательные результаты. Свойства операторов G и G^{-1} , если X – тихоновское пространство, изучают следующие три простые леммы. Напомним еще раз, что всюду далее предполагается, что пространство X тихоновское и не является компактным. Уточним также определения, которые ранее не упоминались. Будем говорить, что оператор G *нестрого возрастает*, если $f_1 < f_2 \implies G(f_1) \leq G(f_2)$; *сохраняет точные верхние грани*, если из выполнения условия существования точной верхней грани $\sup E = f$ в пространстве $BC(X)_{\sim}$, где E есть множество из $BC(X)_{\sim}$, следует $\sup G(E) = G(f)$. Здесь строгое неравенство между функциями означает, что хотя бы в одной точке из X между их числовыми значениями выполнено строгое неравенство. Аналогичные определения нетрудно сформулировать и для оператора G^{-1} .

ЛЕММА 1. Пусть пространство X является тихоновским. Тогда оператор G^{-1} аддитивен, положительно однороден, нестрого возрастает, сохраняет точные верхние грани. Кроме того, он непрерывен и его сужение на $C(\beta X)$ совпадает с g^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство, очевидно, следует из формулы (2) вычисления оператора G^{-1} . Объясним только, почему оператор G^{-1} нестрого возрастает. Возьмем любую функцию $f_2 \in BC(\beta X)_{\sim}$ и точку $x_0 \in \beta X \setminus X$ из нароста (непустота нароста следует из некомпактности X). В качестве f_1 возьмем функцию, совпадающую с f_2 во всех точках из βX , кроме точки x_0 , а в точке x_0 пусть $f_1(x_0) = f_2(x_0) - 1$. Тогда $f_1 \in BC(\beta X)_{\sim}$ и $f_1 < f_2$, но $G^{-1}(f_1) = G^{-1}(f_2)$.

Прежде чем формулировать следующую лемму, напомним еще одно определение. Оператор G называется *супераддитивным*, если для всех $f_1, f_2 \in BC(X)_{\sim}$ выполнено неравенство

$$G(f_1 + f_2) \geq G(f_1) + G(f_2). \quad (3)$$

ЛЕММА 2. Пусть X – тихоновское пространство. Тогда оператор G супераддитивен, положительно однороден, нестрого возрастает, сохраняет точные верхние грани. Кроме того, его сужение на $BC(X)$ совпадает с оператором g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО свойств оператора G следует из формулы (1) его вычисления. Например, заметим, что суперлинейность оператора G вытекает из очевидного включения $\Gamma_{f_1+f_2} \supseteq \Gamma_{f_1} + \Gamma_{f_2}$ и формулы (1).

Взаимоотношения операторов G и G^{-1} устанавливает

ЛЕММА 3. Пусть X – тихоновское пространство. Тогда оператор G^{-1} является левым обратным оператора G , т.е.

$$G^{-1}G = \text{Id}_{BC(X)_{\sim}}. \quad (4)$$

Оператор G^{-1} не является правым обратным оператора G , однако верно неравенство

$$GG^{-1} \geq \text{Id}_{BC(\beta X)_{\sim}}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (1), получим, что сужение

$$G(f)|_X = \sup\{h : h \in \Gamma_f\} = f.$$

Теперь из (2) следует равенство (4). Для обоснования справедливости формулы (5) заметим, что для всех $f \in BC(\beta X)_\sim$ верно включение $\Gamma_f \subset g(\Gamma_{f|_X})$. Следовательно,

$$G(G^{-1}f) = G(f|_X) = \sup\{g(h) : h \in \Gamma_{f|_X}\} \geq \sup\{h : h \in \Gamma_f\} = f.$$

Если неравенство (5) было бы равенством, то G^{-1} был бы инъективным оператором, но, как уже отмечалось в лемме 1, это не так. Значит, оператор G^{-1} не является правым обратным к G .

4. Аддитивность G . Как показывают леммы 1–3 конусы $BC(X)_\sim$ и $BC(\beta X)_\sim$ алгебраически и структурно не изоморфны. Однако начиная с нормальных пространств X , некоторый изоморфизм и изометрию можно найти. Одним из претендентов на эту роль является, очевидно, оператор G , свойства которого изучены в леммах 1–3. Для доказательства аддитивности на нормальных пространствах X этого суперлинейного оператора потребуются следующее топологическое утверждение, которое, возможно, представляет и самостоятельный интерес. Отметим, что верхний и нижний предел в этой лемме вычисляется по фильтру окрестностей точки (см. подробнее определения верхних и нижних пределов и их свойства для полунепрерывных функций в [6, IV.5.6, IV.6.2]). Впрочем, эти определения и свойства в общей ситуации не отличаются от соответствующих определений и свойств для функций действительного переменного.

ЛЕММА 4. Пусть топологическое пространство X содержится в некотором объемлющем его топологическом пространстве X_0 и точка $x_0 \in X_0$ является предельной для X . Тогда для любых ограниченных полунепрерывных снизу функций $f_1, f_2 \in BC(X)_\sim$ и для любого числа $\delta > 0$ в X найдется зависящее от δ замкнутое в X множество F_δ , для которого точка x_0 является также предельной точкой, и при этом для каждой функции верхний предел не превышает нижнего предела на величину, меньшую чем δ , т.е.

$$\limsup_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_1(x) - \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in F} f_1(x) < \delta, \quad \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_2(x) - \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_2(x) < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения замкнутого множества F_δ из X , удовлетворяющего перечисленным выше условиям, вначале вычислим конечный нижний предел функции f_1 и обозначим его через a :

$$\liminf_{x \rightarrow x_0, x \in X} f_1(x) = a.$$

Теперь рассмотрим множество

$$F_\delta^1 = \left\{ x \in X : f_1(x) \leq a + \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Оно замкнуто в X в силу полунепрерывности снизу функции f_1 . Очевидно также, что оно не является пустым и точка x_0 будет для него предельной точкой, так как для любой

открытой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 имеем соотношение $F_\delta^1 \cap O(x_0) \neq \emptyset$ в силу того, что число a является нижним пределом.

Заметим, что нижний предел функции f_1 , вычисленный по более узкому, чем X , множеству F_δ^1 , больше или равен a , а верхний предел по этому же множеству, очевидно, не превосходит числа $a + \delta/2$.

Заменив в предыдущих рассуждениях функцию f_1 на f_2 , а топологическое пространство X на его замкнутое подмножество F_δ^1 , завершаем доказательство, если в качестве искомого замкнутого множества F_δ рассмотрим следующее множество

$$F_\delta := \left\{ x \in F_\delta^1 : f_2(x) \leq b + \frac{\delta}{2} \right\},$$

где

$$b = \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta^1} f_2(x).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 4 является подготовительной и необходима для доказательства следующей леммы 5 – центральной в доказательстве импликации 1) $\implies$ 2) теоремы 1. Для доказательства этой леммы потребуются ввести топологию Вьеториса в пространство 2^X всех непустых замкнутых подмножеств любого топологического пространства X [7, 2.7.20 (a)]. Напомним, что базу ее открытых множеств $\mathcal{B}$ определяют следующие множества:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(U_1, U_2, \dots, U_k) = \left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ и } B \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, k \right\}, \quad (6)$$

где $U_1, U_2, \dots, U_k$ – последовательность открытых множеств пространства X .

ЛЕММА 5. Пусть пространство X нормально. Тогда оператор G является аддитивным и непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые две функции $f_1, f_2 \in BC(X)_\sim$. По определению операторов G, g и формулы (1) справедливо равенство

$$G(f_1 + f_2)(x) = Gf_1(x) + Gf_2(x) \quad (7)$$

для $x \in X$. Поэтому для доказательства аддитивности G осталось показать, что при $x \in \beta X \setminus X$ также верно равенство (7). Выберем любую точку $x_0 \in \beta X \setminus X$. В силу леммы 2 оператор G является супераддитивным, поэтому неравенство (3) влечет в точке x_0 соответствующее неравенство:

$$G(f_1 + f_2)(x_0) \geq Gf_1(x_0) + Gf_2(x_0). \quad (8)$$

Пусть его левая часть удовлетворяет неравенствам $G(f_1 + f_2)(x_0) > c^0 > c^1$. Покажем, что тогда его правая часть $Gf_1(x_0) + Gf_2(x_0) > c^1$, каковы бы ни были выбраны числа c^0 и c^1 . Если этот факт будет доказан, то неравенство (8) не может быть строгим и аддитивность оператора G будет установлена. Для доказательства последнего

неравенства достаточно выбрать функции h_1 и h_2 из Γ_{f_1} и Γ_{f_2} соответственно такими, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$gh_1(x_0) + gh_2(x_0) > c^1, \quad (9)$$

где оператор g осуществляет алгебраический и структурный изоморфизм и изометрию $BC(X)$ и $C(\beta X)$ и является, напомним, оператором продолжения на βX ограниченных непрерывных функций, которые определены на X .

Построение этих функций h_1 и h_2 из Γ_{f_1} и Γ_{f_2} основано на лемме 4. Действительно, опираясь на этот результат, найдем требуемые функции, удовлетворяющие неравенству (9). Для этого в качестве X_0 рассмотрим βX . Положим $\delta = (c^0 - c^1)/4$ и найдем соответствующее ему замкнутое множество F_δ . Для удобства введем обозначения для верхних и нижних пределов:

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_1(x) &= \beta_1, & \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_1(x) &= \alpha_1, \\ \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_2(x) &= \beta_2, & \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in F_\delta} f_2(x) &= \alpha_2. \end{aligned}$$

В этих обозначениях лемма 4 гарантирует выполнение двух неравенств:

$$\beta_1 - \alpha_1 < \delta, \quad \beta_2 - \alpha_2 < \delta.$$

Далее рассмотрим пространство 2^{F_δ} всех непустых замкнутых подмножеств из F_δ с топологией Вьеториса. Тогда одноточечное множество $\{x_0\}$, рассматриваемое в пространстве βX , является предельной точкой 2^{F_δ} . Поэтому в 2^{F_δ} найдется направленность (F_γ) , сходящаяся к $\{x_0\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что эта направленность состоит из вложенных множеств, т.е. $F_{\gamma_1} \subseteq F_{\gamma_2}$ при $\gamma_1 \geq \gamma_2$. В самом деле, возьмем любую направленность точек (x_γ) из F_δ , сходящуюся к точке x_0 . Положим $F_\gamma := \overline{\{x_{\gamma'} : \gamma' \geq \gamma\}}$. Здесь и далее черта над множеством означает замыкание в пространстве X . Так как замкнутые окрестности в βX точки x_0 образуют базу окрестностей этой точки, то направленность (F_γ) является искомой.

Функция $G(f_1 + f_2)$ полунепрерывна снизу на βX и $G(f_1 + f_2)(x_0) > c^0$, поэтому по определению существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 в βX такая, что $G(f_1 + f_2)(x) > c^0$ для всех точек $x \in O(x_0)$. Без ограничения общности можно считать, что направленность (F_γ) содержится в $O(x_0)$. Таким образом, из равенства (6) для всех $x \in O(x_0)$ и $x \in X$ получаем соотношения

$$f_1(x) + f_2(x) > c^0 > c^1.$$

Используя свойства верхнего предела, выводим неравенства

$$\beta_2 + \beta_1 \geq c^0 > c^1. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь числовые направленности:

$$\begin{aligned} \beta_\gamma^1 &:= \sup f_1(F_\gamma), & \alpha_\gamma^1 &:= \inf f_1(F_\gamma), \\ \beta_\gamma^2 &:= \sup f_2(F_\gamma), & \alpha_\gamma^2 &:= \inf f_2(F_\gamma). \end{aligned}$$

Они монотонны: $\beta_\gamma^1 \downarrow$, $\beta_\gamma^2 \downarrow$, $\alpha_\gamma^1 \uparrow$, $\alpha_\gamma^2 \uparrow$ и имеют в силу свойств верхнего и нижнего предела следующие пределы:

$$\beta_\gamma^1 \rightarrow \beta_1, \quad \alpha_\gamma^1 \rightarrow \alpha_1, \quad \beta_\gamma^2 \rightarrow \beta_2, \quad \alpha_\gamma^2 \rightarrow \alpha_2.$$

Найдем теперь γ_0 такой, что одновременно $\alpha_{\gamma_0}^1 > \alpha_1 - \varepsilon$ и $\alpha_{\gamma_0}^2 > \alpha_2 - \varepsilon$, где $\varepsilon = \delta$. Используя лемму Урысона для нормальных пространств или ее “селекционный аналог” в [8], укажем функции h_1 и $h_2 \in BC(X)$ такие, что $h_1 \in \Gamma_{f_1}$ и $h_2 \in \Gamma_{f_2}$ и на замкнутом множестве F_{γ_0} справедливы тождества $h_1(F_{\gamma_0}) \equiv \alpha_1 - \varepsilon$ и $h_2(F_{\gamma_0}) \equiv \alpha_2 - \varepsilon$. Выберем далее любые точки $x_\gamma \in F_\gamma$. Направленность (x_γ) сходится к точке x_0 и, начиная с γ_0 , содержится в F_{γ_0} . Поэтому

$$gh_1(x_0) + gh_2(x_0) = \lim_\gamma gh_1(x_\gamma) + \lim_\gamma gh_2(x_\gamma) = \lim_\gamma h_1(x_\gamma) + \lim_\gamma h_2(x_\gamma) = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\varepsilon.$$

Далее из неравенств $\alpha_1 > \beta_1 - \delta$, $\alpha_2 > \beta_2 - \delta$ и неравенств (10) следует, что

$$gh_1(x_0) + gh_2(x_0) = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\varepsilon > \beta_1 + \beta_2 - 2\delta - 2\varepsilon \geq \beta_1 + \beta_2 - 4\delta \geq c^1.$$

Таким образом, неравенство (9) установлено и аддитивность оператора G доказана.

Аддитивность оператора G и другие свойства, установленные в лемме 2, влекут его непрерывность. Лемма 5 полностью доказана.

5. Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Теперь все подготовлено для доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы 1. Определим множество H в $BC(\beta X)_\sim$ так: $H := G(BC(X)_\sim)$. В силу свойств оператора G , установленных в лемме 5, множество H – конус. Оператор G устанавливает алгебраический и структурный изоморфизм и изометрию $BC(X)_\sim$ и H . Докажем, что он инъективен. Пусть $f_1 \neq f_2$ в $BC(X)_\sim$ и $Gf_1 = Gf_2$. Тогда, используя равенство (4), приходим к противоречию:

$$f_1 = G^{-1}Gf_1 = G^{-1}Gf_2 = f_2.$$

Следовательно, $Gf_1 \neq Gf_2$, если $f_1 \neq f_2$ (отметим, что аддитивность G и нормальность X в доказательстве инъективности не использованы).

Оператор $G^{-1}|_H$ является обратным к G оператором. В самом деле, пусть $f_2 = Gf_1$, тогда $G^{-1}|_H(f_2) = G^{-1}Gf_1 = f_1$. Более того, верна формула

$$GG^{-1}|_H = \text{Id}_H, \quad (11)$$

так как для любого $f \in BC(X)_\sim$ имеем равенство $GG^{-1}Gf = Gf$. Из (11) также следует инъективность оператора $G^{-1}|_H$ и, следовательно, его строгое возрастание на H . Опираясь теперь на леммы 1–3 и 5, заключаем, что $BC(X)_\sim$ и H алгебраически и структурно изоморфны и изометричны. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если конусы $BC(X)_\sim$ и $BC(\beta X)_\sim$ заменить на конусы полунепрерывных сверху функций, то с естественными изменениями справедливы утверждения лемм 1–5 и импликация 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы 1.

Первеем пока доказательство теоремы 1 и вернемся к нему в п. 8, а сейчас в п. 6 и п. 7 займемся приложением импликации 1) $\Rightarrow$ 2) к многозначным отображениям и к сублинейным операторам. Используя эти приложения, мы завершим доказательство теоремы 1 в п. 8. Разумеется, возможно доказать теорему 1 и без использования этих приложений, но такой путь, как нам кажется, будет довольно трудоемким.

6. Приложения. Пусть $\mathcal{M}$ – класс многозначных отображений, а $\mathcal{P}$ – класс сублинейных операторов. Далее вводятся и рассматриваются отображения $\mathcal{M}$ в $\mathcal{P}$ и отображения $\mathcal{P}$ в $\mathcal{M}$. В зависимости от намерений исследователя к таким отображениям предъявляются дополнительные требования. В данной статье нас будут интересовать отображения, обладающие следующим свойством: *многозначное отображение имеет непрерывный селектор тогда и только тогда, когда соответствующий ему сублинейный оператор субдифференцируем*. Поэтому эти отображения мы назовем *двойственными отображениями*, так как они приводят в двойственность две задачи: задачу из общей топологии о существовании непрерывного селектора и задачу функционального анализа об субдифференцировании сублинейного оператора.

Прежде всего, приведем необходимые определения. Пусть X и Y – топологические пространства. *Многозначным отображением* $F: X \rightarrow Y$ называется отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие непустое подмножество $F(x)$ из Y . Однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *селектором* (*селекцией* или *сечением*), если $f(x) \in F(x)$ для всех $x \in X$. Селекция f называется *непрерывной*, если f – непрерывное отображение. Основной вопрос здесь (задача о непрерывных селекторах) заключается в следующем. Какие условия на топологические пространства X и Y , семейство подмножеств пространства Y , в котором лежат значения многозначного отображения $F: X \rightarrow Y$, и на тип непрерывности самого многозначного отображения F гарантируют наличие у F непрерывного селектора? Основы теории непрерывных селекций заложены в работах Э. Майкла (см. подробнее обзор [9]).

В статье изучена задача о непрерывных селекторах, когда Y является компактным подпространством локально выпуклого пространства Z . Известно, что необходимым условием существования непрерывного селектора, проходящего через фиксированную точку графика многозначного отображения, является условие полунепрерывности снизу многозначного отображения. Напомним три типа непрерывности и введем необходимый в дальнейшем класс многозначных отображений [8], [9].

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным снизу*, если для всякого непустого открытого в Y множества U в пространстве X будет открытым множество $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным сверху*, если для всякого открытого в Y множества U в пространстве X будет открытым множество $\{x \in X : F(x) \subset U\}$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху.

Заметим, что все три типа непрерывности многозначных отображений имеют топологический характер и являются непрерывными отображениями в некоторой топологии. Действительно, если в формуле (6) для базы открытых множеств топологии Вьеториса рассматривать только одно условие из двух используемых условий, то получим две различные топологии. Поэтому, если учесть только первое из них, то тогда полунепрерывность сверху многозначного отображения есть непрерывность в одной из топологий, а если – второе условие, то тогда полунепрерывность снизу многозначного отображения есть непрерывность в другой топологии. Ясно, что непрерывность многозначного отображения есть непрерывность в топологии Вьеториса.

Рассмотрим в качестве класса $\mathcal{M}$ класс полунепрерывных снизу многозначных отображений, действующих из нормальных пространств X в Y и принимающих в Y в ка-

честве значений выпуклые компактные подмножества. Напомним, что Y является компактным подпространством локально выпуклого пространства Z .

Переходим к определению необходимого класса сублинейных операторов. Начнем с определений. Пусть V – банахово пространство, а W – полуупорядоченное пространство или даже конус в нем, например, конус $BC(X)_\sim$ в банаховом пространстве $B(X)$. Отображение $P: V \rightarrow W$ называется *сублинейным оператором*, если оно субаддитивно и положительно однородно, т.е.

$$P(v_1 + v_2) \leq P v_1 + P v_2, \quad P(\lambda v_1) = \lambda P v_1, \quad v_1, v_2 \in V, \quad \lambda > 0.$$

Пусть W_0 – линейное подпространство в W , например, $W_0 := BC(X)$. Через $L = L(V, W_0)$ обозначим пространство всех непрерывных линейных отображений $u: V \rightarrow W_0$. Линейный непрерывный оператор $u: V \rightarrow W_0$ называется *опорным* к сублинейному оператору P , если $uv \leq P v$ при всех $v \in V$. Совокупность всех опорных операторов из L называется *субдифференциалом*, точнее, *субдифференциалом в нуле* сублинейного оператора P и обозначается символом ∂_L или кратко ∂ , если ясно о каком подпространстве идет речь. Сублинейный оператор называется *субдифференцируемым*, если его субдифференциал есть непустое множество, и *несубдифференцируемым* в противном случае.

В качестве класса $\mathcal{P}$ рассмотрим все непрерывные сублинейные операторы, действующие из банаховых пространств V в конус $BC(X)_\sim$, где X – топологическое пространство. Прежде чем вводить необходимое отображение этого класса, обозначим через V^* топологически сопряженное к банахову пространству V , которое рассматривается в $*$ -слабой топологии, определяемой двойственностью между V и V^* . Введем следующее отображение, введенное и изученное для случая компакта X в [10].

Свяжем с сублинейным оператором P семейство (индексированное переменной $x \in X$) сублинейных функционалов p_x , определенных на V следующей формулой: $p_x v = P v(x)$. В качестве двойственного отображения рассмотрим

$$\chi: P \mapsto (F: x \mapsto \partial p_x), \quad x \in X.$$

Как и в [10], доказывается, что многозначное отображение F полунепрерывно снизу относительно $*$ -слабой топологии сопряженного пространства V^* действует в шар, радиус которого равен норме оператора P , этого пространства и принимает в этом шаре в качестве значений выпуклые и компактные подмножества. Таким образом, χ отображает $\mathcal{P}$ в $\mathcal{M}$. Предъявленное выше требование к двойственным отображениям несложно получить из известной теоремы Гельфанда об общем виде линейного оператора, действующего из банахова пространства в банахово пространство непрерывных функций [3] (см. также [4, теорема VI.7.1]). Действительно, согласно этой теореме любой непрерывный линейный оператор $u: V \rightarrow BC(X)$ отождествляется с непрерывным отображением $\varphi: X \rightarrow V^*$ с соотношением

$$uv(x) = \langle v, \varphi(x) \rangle, \quad x \in X, \quad v \in V.$$

Отметим, что отображение χ обратимо и обратное к нему отображение $\chi^{-1}(F) = P$ действует по формуле

$$P v(x) = \sup\{\langle v, v^* \rangle : v^* \in F(x)\}, \quad x \in X, \quad v \in V.$$

Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между V и V^* .

Переходим теперь к конструированию двойственного отображения, описанного выше класса $\mathcal{M}$. Напомним, что $\mathcal{M}$ — это класс полунепрерывных снизу многозначных отображений, действующих из нормальных пространств X в Y и принимающих в Y в качестве значений выпуклые компактные подмножества.

Возьмем компакт Y в локально выпуклом пространстве Z и через $\text{conv}(Y)$ обозначим совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств Y , которая есть пространство значений изучаемого класса многозначных отображений. Рассмотрим $\text{conv}(Y)$ как подпространство с индуцированной топологией в пространстве 2^Y всех непустых замкнутых подмножеств из Y с топологией Вьеториса. Из теоремы Вьеториса о том, что 2^Y — компакт, если Y — компакт [7], [3, 12.26 (a)], немедленно следует

ЛЕММА 6. *Топологическое пространство $\text{conv}(Y)$ является компактом. Если Y — выпуклый компакт, то $\text{conv}(Y)$ — также выпуклый компакт.*

Отождествляя точки из Y с одноточечными множествами в $\text{conv}(Y)$, заключаем, что $Y \subseteq \text{conv}(Y)$. Не умаляя общности, можно считать, что $\text{conv}(Y)$ содержится в том же локально выпуклом пространстве Z , в котором находится Y . Действительно, достаточно ввести конус $\text{conv}(Z)$ всех непустых выпуклых и компактных подмножеств из Z с операциями Минковского сложения и умножения на неотрицательные вещественные числа в нем и с топологией Вьеториса [7]. Дальнейшие построения искомого локально выпуклого пространства вполне аналогичны погружению полугруппы в группу или, точнее, топологической полугруппы $(\text{conv}(Z), +)$ в топологическую группу. Поэтому в дальнейшем полагаем, что

$$Y \subseteq \text{conv}(Y) \subset Z. \quad (12)$$

Следующая лемма 7 является ключевой для построения двойственного отображения $\mathcal{M}$; для выпуклых компактов она была анонсирована в [11].

Для ее формулировки потребуются два определения. Вещественная функция h , определенная на выпуклом множестве C , называется *аффинной*, если

$$h(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda h(y_1) + (1 - \lambda)h(y_2)$$

для любых $y_1, y_2 \in C$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Аналогично определяется *аффинное отображение*, если вместо вещественной прямой взять любое линейное пространство. Пусть теперь Y — компакт в Z , а Y_1 — компакт в Z_1 , где Z и Z_1 — локально выпуклые пространства. Говорят, что два компакта Y и Y_1 *аффинно гомеоморфны*, если они гомеоморфны и сужение гомеоморфизма на любое выпуклое подмножество аффинно.

ЛЕММА 7. *Любой компакт Y локально выпуклого пространства Z аффинно гомеоморфен компакту Y_1 в сопряженном пространстве V^* некоторого банахова пространства V , рассматриваемым со $*$ -слабой топологией.*

Кроме того, компакты $\text{conv}(Y)$ и $\text{conv}(Y_1)$ также аффинно гомеоморфны. Более того, этот гомеоморфизм $\tilde{h}$ вместе с обратным можно выбрать монотонным по включению. Если, дополнительно, компакт Y метризуем, то банахово пространство V можно считать сепарабельным, а компакт Y_1 — метризуемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства лежит соглашение (12). Рассуждения напоминают известное “погружение” произвольного компакта в пространство состояний (см., например, [12]). В качестве V рассмотрим банахово пространство $A(Y)$ всех непрерывных функций, заданных на Y , следы которых на выпуклых подмножествах из Y аффинны, с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа, и чебышевской нормой – супремумом модуля функции. Так как $A(Y)$, как линейное подпространство, содержится в $C(Y)$, то условимся меры Дирака ε_y , где $y \in Y$, рассматривать на этом подпространстве. Напомним еще, что мера Дирака на $C(Y)$ есть непрерывный линейный функционал следующего вида: $\varepsilon_y(f) := f(y)$. В качестве компакта Y_1 возьмем $\{\varepsilon_y : y \in Y\}$ в локально выпуклом пространстве $Z_1 = V^*$. Искомым аффинным гомеоморфизмом компактов Y и Y_1 является отображение $\tilde{h}: y \mapsto \varepsilon_y$. Аффинный гомеоморфизм $\text{conv}(Y)$ и $\text{conv}(Y_1)$ определяется теперь естественным способом как образы выпуклых компактов при аффинном гомеоморфизме $\tilde{h}$. Сохраним за этим гомеоморфизмом прежний символ $\tilde{h}$. Монотонность и непрерывность $\tilde{h}$ и $\tilde{h}^{-1}$ очевидны.

Наконец, последнее утверждение леммы о сепарабельности банахова пространства V , если компакт Y метризуем, вытекает из следующих рассуждений. Во-первых, $C(Y)$ сепарабельно, так как компакт Y метризуем [4]. Во-вторых, $V = A(Y)$ сепарабельно, как подпространство сепарабельного банахова пространства [4]. В-третьих, сепарабельность банахова пространства V влечет метризуемость $*$ -слабой топологии в любом шаре сопряженного пространства V^* [4]. Поскольку компакт Y_1 содержится в шаре единичного радиуса, то он метризуем. Лемма 7 доказана.

Переходим теперь непосредственно к определению двойственного отображения. Рассмотрим в качестве него отображение π класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{P}$:

$$\pi: F \mapsto G \circ \chi^{-1}(\tilde{h} \circ F), \quad F \in \mathcal{M}. \quad (13)$$

Здесь G – алгебраический и структурный изоморфизм, установленный в импликации 1) $\implies$ 2) теоремы 1, χ^{-1} – обратное отображение к описанному выше двойственному отображению χ класса сублинейных операторов $\mathcal{P}$, а $\tilde{h}$ – аффинный гомеоморфизм, установленный в лемме 7. Заметим, что формула (13) корректна. Для этого достаточно убедиться, что многозначное отображение $\tilde{h} \circ F$ полунепрерывно снизу. Напомним, что полунепрерывность снизу, полунепрерывность сверху и непрерывность многозначного отображения есть непрерывность в соответствующей топологии. Теперь требуемый факт следует из непрерывности суперпозиции непрерывных отображений.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение π является двойственным отображением. Оно обратимо на $\pi(\mathcal{M})$, и $\pi^{-1}(P) = \tilde{h}^{-1} \circ \chi(G^{-1} \circ P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве подпространства L , по которому субдифференцируются сублинейные операторы из класса $\mathcal{P}$, рассмотрим пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих из банахова пространства в пространство ограниченных непрерывных функций. Из теоремы Гельфанда [3] (см. также [4, теорема VI.7.1]) следует, что сублинейный оператор P из $\mathcal{P}$ субдифференцируем тогда и только тогда, когда его двойственное отображение χP имеет непрерывную селекцию. Используя этот факт и свойства всех входящих в π отображений, доказываем, что многозначное отображение F имеет непрерывную селекцию тогда и только тогда, когда сублинейный оператор πF субдифференцируем. Формула для π^{-1} следует из обратимости всех отображений, входящих в двойственное отображение π . Теорема 2 доказана.

В следующем пункте рассмотрим приложение этой теоремы для доказательства одной селекционной теоремы.

7. Теоремы о селекциях. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Следующие свойства для T_1 -пространств X равносильны:

- 1) X нормально;
- 2) всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение X в $[0, 1]$, значения которого – непустые выпуклые и компактные подмножества в $[0, 1]$, имеет непрерывную селекцию;
- 3) всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение X в метризуемый выпуклый компакт Y , содержащий хотя бы две точки, значения которого – непустые выпуклые и компактные подмножества в Y , имеет непрерывную селекцию;
- 4) если Y – метризуемый выпуклый компакт, то всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение X в Y , значения которого – непустые выпуклые и компактные подмножества в Y , имеет непрерывную селекцию;
- 5) если Y – метризуемый компакт, то всякое полунепрерывное снизу многозначное отображение X в Y , значения которого – непустые выпуклые и компактные подмножества в Y , имеет непрерывную селекцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим импликации: $1) \Rightarrow 5), 5) \Rightarrow 4), 4) \Rightarrow 3), 3) \Rightarrow 2), 2) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 5)$. Обозначим через $\mathcal{M}_0$ подкласс в классе $\mathcal{M}$, состоящий из многозначных отображений $F: X \rightarrow Y$, где X нормально, а компакт Y метризуем. В силу теоремы 2 достаточно показать, что подкласс сублинейных операторов $\mathcal{P}_0 := \pi(\mathcal{M}_0)$ состоит из субдифференцируемых операторов. В [10] доказано, что каждый непрерывный сублинейный оператор, действующий из сепарабельного пространства в конус ограниченных полунепрерывных снизу функций, заданных на компакте, субдифференцируем. Из леммы 7, вида двойственного отображения π и свойств входящих в него отображений (см. формулу (13)) следует, что $\mathcal{P}_0$ содержится в указанном классе субдифференцируемых сублинейных операторов. Импликация $1) \Rightarrow 5)$ доказана.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть X – T_1 -пространство, для которого верно 2). Для доказательства нормальности X достаточно показать, что для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B из X существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$. Рассмотрим многозначное отображение $F: X \rightarrow [0, 1]$ следующего вида:

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } x \in A, \\ \{1\}, & \text{если } x \in B, \\ [0, 1], & \text{если } x \in X \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

Ясно, что F полунепрерывно снизу и его непрерывная селекция является искомой функцией f . Импликация $2) \Rightarrow 1)$ доказана. Так как все остальные импликации очевидны, то теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Импликация $1) \implies 5)$, насколько известно автору, ранее не приводилась. Она может быть доказана в конечном счете комбинацией доказательств известных селекционных теорем, так как используемые в ее доказательстве теоремы о субдифференцировании сублинейных операторов получены в [10] с применением селекционных теорем. Такое доказательство достаточно трудоемко. Наш подход к доказательству этой импликации проще и фактически сводит общий случай нормальных пространств к доказательству частного компактного случая. Отметим также, что в данной работе дано новое доказательство эквивалентности $1) \iff 4)$, отличное от доказательства в [13], опирающееся на так называемые выпуклые структуры.

Приведем еще одну селекционную теорему, полученную с помощью субдифференциалов сублинейных операторов. Ее принципиальное отличие от предыдущей теоремы заключается в том, что субдифференцируемость используемых в доказательстве этой теоремы сублинейных операторов доказана средствами функционального анализа.

Напомним, что топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если в нем замыкание всякого открытого множества открыто.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X экстремально несвязно, а Y – любой компакт в любом локально выпуклом пространстве Z . Тогда всякое непрерывное многозначное отображение X в Y , значения которого – непустые выпуклые компактные подмножества в Y , имеет непрерывную селекцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим сейчас через $\mathcal{M}$ класс многозначных отображений $F: X \rightarrow Y$, где X экстремально несвязно. Рассмотрим отображение ρ этого класса, определенное формулой $\rho(F) = \chi^{-1}(\tilde{h} \circ F)$. Здесь $\tilde{h}$ – аффинный гомеоморфизм, установленный в лемме 7, а χ – двойственное отображение класса сублинейных операторов $\mathcal{P}$. Как и в теореме 2, доказывается, что ρ является двойственным отображением. То есть многозначное отображение F из $\mathcal{M}$ имеет непрерывную селекцию тогда и только тогда, когда его отображение $\rho(F)$ – сублинейный оператор субдифференцируем. Таким образом, достаточно установить, что подкласс сублинейных операторов $\mathcal{P}_0 := \rho(\mathcal{M})$ из класса $\mathcal{P}$ состоит из субдифференцируемых сублинейных операторов. Нетрудно видеть, что сублинейные операторы из $\mathcal{P}_0$ действуют из банахова пространства в упорядоченное банахово пространство $BC(X)$. Так как X экстремально несвязно, то оно является K -пространством [1], [14], т.е. в нем любое ограниченное множество функций имеет точную верхнюю грань. Поэтому в силу теоремы Хана–Банаха–Канторовича [14] все сублинейные операторы из $\mathcal{P}_0$ субдифференцируемы. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 4 тесно соприкасается с [15], где доказана селекционная теорема для полунепрерывных сверху многозначных отображений хаусдорфовых экстремально несвязных пространств. Для хаусдорфовых пространств X теорема 4 следует из [15] даже в более сильной формулировке, когда многозначное отображение полунепрерывно сверху, а его значения только компактны и не обязательно выпуклы.

8. Доказательство импликации $2) \implies 1)$ и теоремы 1 в целом. Проведем доказательство импликации методом от противного. Пусть свойство 2) верно для некоторого тихоновского пространства X и G – алгебраический и структурный изоморфизм и изометрия конуса $BC(X)_\sim$ и некоторого конуса H в $BC(\beta X)_\sim$. Вообще говоря, оператор G не обязан совпадать с оператором, определенным формулой (1). Однако форма представления оператора G нигде в двойственном отображении (см. формулу (13)) класса многозначных отображений $\mathcal{M}$ не использована. Поэтому расширим этот класс

многозначных отображений и включим в него дополнительно многозначные отображения, заданные на тихоновском пространстве X . Построим теперь его двойственное отображение согласно формуле (13). Повторив доказательство импликации $1) \Rightarrow 5)$ теоремы 3, получим, что для X выполнено свойство 5) теоремы 3. Следовательно, в силу теоремы 3 топологическое пространство X нормально. Итак, импликация $2) \Rightarrow 1)$ теоремы 1 доказана.

Остальные утверждения теоремы 1 проверяются следующим образом. Единственность изоморфизма и изометрии устанавливаются тоже методом от противного. Пусть имеется некоторый изоморфизм и изометрия $G_1: BC(X)_\sim \rightarrow H_1$, где H_1 из $BC(\beta X)_\sim$ – некоторый конус, содержащий банахово пространство $BC(\beta X)$. Тогда его сужение

$$G_1|_{BC(X)} := g_1$$

на $BC(X)$ есть изоморфизм и изометрия, устанавливаемые между $BC(X)$ и $BC(\beta X)$, поэтому $g \equiv g_1$. Известно [1, п. I.7.1], что если G_1 – изоморфизм между частично упорядоченными множествами, в частности, между $BC(X)$ и $BC(\beta X)$, то он сохраняет точные верхние грани. Для оператора G это свойство было доказано в лемме 2. Теперь возьмем любой элемент $f \in BC(X)_\sim$ и рассмотрим множество

$$\Gamma_f = \{h \in BC(X) : h \leq f\}.$$

Так как X – пространство нормальное и, следовательно, тихоновское, то множество Γ_f непусто и является верхней огибающей для f . Учитывая определение верхней огибающей, приведенное в п. 2, и частичный порядок в $BC(X)$, имеем равенство $\sup \Gamma_f = f$. Поэтому в итоге получаем цепочку равенств

$$G_1(f) = \sup G_1(\Gamma_f) = \sup\{G_1 h : h \in \Gamma_f\} = \sup\{gh : h \in \Gamma_f\} = G(f)$$

в силу формулы (1). Следовательно, $G_1 \equiv G$.

Единственность H является следствием единственности изоморфизма и изометрии, так как этот конус по определению равен $H := G(BC(X)_\sim)$.

Утверждение теоремы о возможности совпадения $H = BC(\beta X)_\sim$ только для компактов X в одну сторону, когда X – компакт, очевидно и рассмотрено во введении (в п. 1). Пусть теперь $H = BC(\beta X)_\sim$, и допустим противное, что X не является компактом. Тогда множество $\beta X \setminus X$ является непустым. Выберем любую точку x_0 из него. Возьмем какую-нибудь функцию f_2 из H . В качестве f_1 берем функцию, совпадающую с f_2 во всех точках из βX , кроме точки x_0 , а в точке x_0 пусть $f_1(x_0) := f_2(x_0) - 1$. Тогда $f_1 \in BC(\beta X)_\sim = H$ и $f_1 < f_2$, но $G^{-1}(f_1) = G^{-1}(f_2)$. Полученное противоречие доказывает это утверждение. Итак, доказательство теоремы 1 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Анализ доказательств лемм 1–3 и 5 и доказательство теоремы 1 позволяет заключить, что теорему 1 можно дополнить еще одним равносильным условием:

3) оператор G , заданный формулой (1), аддитивен на конусе $BC(X)_\sim$, а леммы 2 и 5 сформулировать в следующих более сильных формулировках.

ЛЕММА 8. Пусть X – тихоновское пространство. Тогда оператор G супераддитивен, положительно однороден, строго возрастает, сохраняет точные верхние грани и инъективен. Кроме того, его сужение на $BC(X)$ совпадает с оператором g .

ЛЕММА 9. *Пространство X нормально тогда и только тогда, когда оператор G , определенный формулой (1), является аддитивным.*

В заключение отметим, что аналогичный теореме 1 результат верен для конуса ограниченных полунепрерывных сверху функций. Важный для приложений конус полунепрерывных снизу функций, не обязательно ограниченных, как в данной заметке, с различными топологиями, в том числе и поточечной сходимости, требует дальнейшего изучения.

Изоморфизм и изометрию $BC(X) \sim$, когда X – любое T_1 -пространство, можно будет также изучить предлагаемыми в статье методами, если вместо стоун-чеховской компактификации βX использовать расширение Волмэна ωX [7, п. 3.6] и если удастся распространить результаты о субдифференцировании сублинейных операторов из [10] на случай T_1 -компактов, а не хаусдорфовых компактов, как доказано в [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [2] Дэй М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Гельфанд И. М. Абстрактные функции и линейные операторы // Матем. сб. 1938. Т. 4. С. 235–286.
- [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [5] Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.
- [6] Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
- [7] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [8] Michael E. Continuous selections. 1 // Ann. of Math. 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.
- [9] Реповш Д., Семенов П. В. Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 151–190.
- [10] Линке Ю. Э. Применение теоремы Майкла и ее обращения к сублинейным операторам // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 67–75.
- [11] Линке Ю. Э. Метод сублинейных операторов и задачи о селекторах // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 4. С. 446–448.
- [12] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.
- [13] Van de Vel M. A selection theorem for topological convex structures // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. № 2. P. 463–496.
- [14] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Новосибирск: Наука, 1987.
- [15] Hasumi M. A continuous selections theorem for extremally disconnected spaces // Math. Ann. 1969. V. 179. № 2. P. 83–89.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск
E-mail: linke@icc.ru

Поступило
30.01.2004
Исправленный вариант
19.05.2004