Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, О несуществовании инвариантной меры при качении неоднородного эллипсоида по плоскости, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 930–932

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:36:17

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ПРИ КАЧЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА ПО ПЛОСКОСТИ

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В заметке получены новые условия несуществования инвариантной меры при качении неоднородного эллипсоида со специальным распределением масс по абсолютно шероховатой плоскости. Они дополняют более ранние результаты об отсутствии меры при качении кельтского камня.

1. Общие условия существования у динамической системы гладкой инвариантной меры получены в [1], [2]. Пусть имеется фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и гладкое векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на нем. Соответствующий фазовый поток задается системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n). \quad (1)$$

Рассмотрим, следуя [1], задачу о существовании у системы (1) интегрального инварианта

$$m(D) = \int_D f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

с гладкой положительной плотностью $f(\mathbf{x})$. Эта задача содержательна, например, в окрестности положения равновесия. Для функции f справедливо уравнение Лиувилля $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = 0$, которое с помощью замены $\omega = -\ln f$ можно переписать в форме

$$\dot{\omega} = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3)$$

где точкой обозначена производная вдоль поля $\mathbf{v}$. Разрешимость системы (3) вблизи особой точки (1) проанализирована в [1], [2].

Полагая, что особая точка находится в начале координат $\mathbf{x} = 0$, разложим векторное поле в ряд

$$v_s(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^n \lambda_s^r x_r + \dots, \quad s = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Для гладкой функции ω имеем разложение

$$\omega = \omega_0 + (\mathbf{a}, \mathbf{x}) + \dots, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n). \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (3), несложно получить условие разрешимости уравнения Лиувилля

$$\operatorname{tr} \Lambda = \operatorname{tr} \|\lambda_s^T\| = 0. \quad (6)$$

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-36.2003.1, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-05-64367, и фонда CRDF, грант № RU-M1-2583-MO-04.

В работах [1], [2] показано, что это условие не выполняется, например, в динамике кельтского камня. Под такой задачей мы понимаем динамическую систему, описывающую качение без проскальзывания по горизонтальной плоскости несимметричного твердого тела, для которого характерно несовпадение в точке контакта главных геометрических и динамических осей. При этом отсутствие меры устанавливается вблизи перманентных вертикальных вращений, которые являются положениями равновесия приведенной системы. Отсутствие инвариантной меры в динамике кельтских камней обуславливает их странное и загадочное поведение, описанное во многих работах (см. [3], [4]). В частности, в [3] показано, что в фазовом пространстве таких систем при определенных энергиях возникают странные аттракторы, типичные для диссипативных систем.

2. Уравнения движения эллипсоида по плоскости. Вертикальные вращения.

Рассмотрим трехосный эллипсоид, катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости в поле тяжести. Его уравнения движения удобно записать в подвижной системе координат, жестко связанной с эллипсоидом, оси которой проходят через его центр вдоль главных геометрических осей. В этих координатах (x_1, x_2, x_3) уравнение эллипсоида можно записать в виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}) = 1, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3), \quad b_i = \text{const}, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad (7)$$

а уравнения движения – в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = I_Q^{-1}(\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный орт вертикали, перпендикулярный горизонтальной плоскости, $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$, mg – вес тела. В уравнениях (8)

$$\mathbf{I}_Q = \mathbf{I} + (m\mathbf{r}^2 - m\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{I}_Q\boldsymbol{\omega}, \quad (9)$$

т.е. $\mathbf{I}_Q$ и $\mathbf{M}$ – тензор инерции и кинетический момент относительно точки контакта Q . Мы также полагаем, что геометрические и динамические оси эллипсоида совпадают, т.е. $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. При доказательстве отсутствия инвариантной меры это самая сложная ситуация, поскольку при этом имеются некоторые частные случаи, когда мера существует [5].

Оказывается, что при дополнительном условии

$$I_1(b_2 - b_3) + I_2(b_3 - b_1) + I_3(b_1 - b_2) = 0, \quad \text{т.е. } I_i = \alpha + \beta b_i, \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (10)$$

уравнения (8) имеют двухпараметрическое семейство частных решений – вертикальных вращений [4] вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi} = \text{const}, \quad \boldsymbol{\omega} = k\boldsymbol{\xi}, \quad \text{где } k^2 = \frac{mg}{(\beta - m)\sqrt{(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}\boldsymbol{\xi})}}, \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 1. \quad (11)$$

Проведя довольно громоздкие вычисления, можно получить явную формулу для следа матрицы линейной части системы (8) вблизи решения (11):

$$\text{tr } \Lambda = \sqrt{\frac{mg(\beta - m)}{\sqrt{(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}\boldsymbol{\xi})}}} \beta m \xi_1 \xi_2 \xi_3 (b_1 - b_2)(b_2 - b_3)(b_3 - b_1) \frac{\sum_{i,j,k} b_i(b_j + b_k) \xi_i^2}{A}, \quad (12)$$

где

$$A = (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{I}\mathbf{B}\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}) - (\beta - m) \sum_{i < j} b_i b_j (b_i - b_j)^2 (\alpha(\beta - m) + \beta^2 b_k) \xi_i^2 \xi_j^2, \\ \mathbf{B}_2 = \text{diag}((\alpha + mb_1 + \beta b_2)(\alpha + mb_1 + \beta b_3), \\ (\alpha + mb_2 + \beta b_1)(\alpha + mb_2 + \beta b_3), (\alpha + mb_3 + \beta b_1)(\alpha + mb_3 + \beta b_3)).$$

Анализируя это выражение, можно видеть, что если $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1$, то условие $\text{tr } \Lambda = 0$ выполняется только в двух случаях: $\beta = 0$ и $\beta = m$. В случае $\beta = 0$ (произвольный трехосный эллипсоид с шаровым центральным тензором инерции) инвариантная мера указана в [5] (Ярошук). Для случая $\beta = m$ она указана в [6] (также Ярошук), хотя следует иметь ввиду, что он соответствует $k \rightarrow \infty$ в (11) и эти стационарные вращения исчезают. Отметим также, что обобщение меры [6] на случай качения эллипсоида по сфере указано в [7].

В заключение отметим, что нами доказано отсутствие инвариантной меры только при выполнении дополнительного условия (10). Кажется естественным, что если оно не выполняется, то меры тем более не существует. Но вследствие того, что в этом случае пропадает семейство частных решений (11), анализ вблизи обычных вертикальных вращений вокруг главных осей эллипсоида инерции ни к каким ограничениям на существование инвариантных мер не приводит.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В. // Успехи механики. 1985. Т. 8. №3. С. 85–107.
2. Козлов В. В. // ПММ. 1987. Т. 51. №4. С. 538–545.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. // УФН. 2003. Т. 173. №4. С. 407–418.
4. Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
5. Ярошук В. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. №6. С. 30–34.
6. Ярошук В. А. // Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела. 1995. №2. С. 54–57.
7. Mamaev I. S. // Reg. Chaot. Dyn. 2003. V. 8. №3. P. 331–336.