Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Хабибуллин, Асимптотический ряд для многочленов
Бесселя, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 948–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:33:20

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕССЕЛЯ

Р. Ф. Хабибуллин

1. Постановка задачи. Многочлены Бесселя $B_n(z)$, $\deg B_n \leq n-1$, $B_n \neq 0$, определяются как многочлены, ортогональные относительно комплексной весовой функции $\exp[1/z]$, на (произвольной) замкнутой, жордановой, спрямляемой кривой F , содержащей внутри точку 0, т.е.

$$\int_F B_n(z) z^k e^{1/z} dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Здесь мы будем рассматривать “сжатые” многочлены: $B_n^*(z) := B_n(z/(an))$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Многочлены B_n^* ортогональны относительно “переменного” (т.е. зависящего от номера многочлена) веса:

$$\int_F B_n^*(z) z^k e^{an/z} dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1)$$

Асимптотика (при $n \rightarrow \infty$) многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса, изучалась Гончаром, Рахмановым [1] и Аптекаревым [2] в связи с задачами о скорости аппроксимации аналитических функций рациональными. В частном случае сжатых многочленов Бесселя, общие теоремы работ [1], [2] могут быть детализированы и существенно уточнены. В настоящей заметке приводится теорема о полном асимптотическом ряде по степеням $1/n$ для многочленов Бесселя B_n^* .

2. Равновесная мера. 1. Важную роль в общих асимптотических теоремах работ [1] и [2] играет (единственная) экстремальная мера λ , обеспечивающая равновесие логарифмического потенциала

$$V_\lambda(z) := \int_F \ln \frac{1}{|t-z|} d\lambda(t)$$

во внешнем поле $f \in \text{Harm}(\Omega)$, $F \Subset \Omega$:

$$\begin{aligned} V_\lambda + f &= \gamma_\Delta \quad \text{на } \Delta := \text{Supp}(\lambda) \subseteq F, \\ V_\lambda + f &\geq \gamma_\Delta \quad \text{на } F. \end{aligned} \quad (2)$$

Если гладкая кривая F и равновесная мера λ удовлетворяют условию “симметрии”:

$$\frac{\partial(V_\lambda + f)}{\partial n_+} = \frac{\partial(V_\lambda + f)}{\partial n_-} \quad \text{на } \Delta, \quad (3)$$

то говорят, что пара (F, f) обладает S -свойством; этот факт будем обозначать $(F, f) \in S$.

2. В случае внешнего поля $f(z) = \text{Re}(-a/(2z))$, соответствующего соотношениям ортогональности (1), задача равновесия (2) при условии (3) может быть решена в явном виде. Это можно сделать воспользовавшись интегральным представлением для сжатых многочленов:

$$B_n^*(z) = e^{-an/z} \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{\zeta^{2n} e^{an/\zeta} d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (4)$$

где контур δ – круговой контур вокруг точки z , ориентированный так же, как и F . Для простоты записи будем рассматривать здесь значение параметра a , равное 2. Из формулы (4) можно заключить, что комплексный потенциал равновесной меры имеет вид

$$\mathcal{V}_\lambda(z) = \frac{1}{z} + \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z} - 1 - 2\ln(z + 1 + \sqrt{z^2 + 1}) + \ln(1 + \sqrt{z^2 + 1}), \quad (5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 03-516637, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1551.2003.1.

носитель Δ равновесной меры λ является дугой (с концами в точках $-i, i$) трансцендентной кривой, задаваемой уравнением

$$\log |x + \sqrt{x^2 + 1}| = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

а производная $\lambda' = d\lambda/dx$ этой меры равна

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}.$$

Из (5) вытекает следующее соотношение для комплексного потенциала на дуге Δ :

$$(\mathcal{V}_\lambda)_+(x) + (\mathcal{V}_\lambda)_-(x) = \frac{2}{x} + 2\Gamma, \quad x \in \Delta,$$

где

$$\Gamma = -1 - \ln(2x) + \ln(-x), \quad x \in \Delta.$$

Подставив в последнюю формулу значение $x = -i$, получим, что так называемая константа равновесия $\gamma_\Delta = \operatorname{Re} \Gamma$ равна

$$\gamma_\Delta = -1 - \ln 2.$$

Как известно [1], [2], главный член асимптотики вне носителя Δ равновесной меры λ многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса, выражается следующей функцией:

$$\varphi_n(z) = \exp(\Gamma - \mathcal{V}_\lambda(z)) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(z + 1 + \sqrt{z^2 + 1})^{2n}}{(1 + \sqrt{z^2 + 1})^n} \exp\left(-n \frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right). \quad (6)$$

При $z \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_n(z) \sim (-1)^n (2/e)^n z^n$; тем самым, $C_n \varphi_n(z) \sim z^n$, где мы положили

$$C_n := (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^n. \quad (7)$$

3. Основной результат. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, в которой дается полное асимптотическое (при $n \rightarrow \infty$) разложение для полиномов B_n^* вне дуги Δ носителя равновесной меры λ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B_n^*(z)$ – последовательность сжатых полиномов Бесселя с единичным старшим коэффициентом, функции φ_n определены в (6), а константы C_n – в (7). Тогда для $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ отношение $B_n^*(z)/(C_n \varphi_n(z))$ имеет следующее асимптотическое разложение по степеням $1/n$:

$$\frac{B_n^*(z)}{C_n \varphi_n(z)} \sim \frac{1}{2}(\beta(z) + \beta^{-1}(z)) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pi_k(z)}{n^k} \right] \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $\beta = ((z - i)/(z + i))^{1/4}$. Разложение (8) справедливо равномерно на компактах в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Функции Π_k голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ и могут быть найдены явно.

Коэффициент при $1/n$ в разложении (8) имеет следующий вид:

$$\Pi_1(z) = \frac{\pi i z (3z^2 - 7)}{24(z^2 + 1)^2} + (z - \sqrt{z^2 + 1}) \frac{5\pi i z^2}{12(z^2 + 1)^2}. \quad (9)$$

Подставляя (6), (7) и (9) в (8), получаем, что для многочленов Бесселя B_n^* равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus \Delta$ справедливо следующее асимптотическое представление при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} B_n^*(z) &= e^n \frac{(z + 1 + \sqrt{z^2 + 1})^{2n}}{(1 + \sqrt{z^2 + 1})^n} \exp\left(-n \frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{z - i} + \sqrt{z + i}}{2(z^2 + 1)^{1/4}}\right) \\ &\times \left(1 + \left[\frac{\pi i z (3z^2 - 7)}{24(z^2 + 1)^2} + (z - \sqrt{z^2 + 1}) \frac{5\pi i z^2}{12(z^2 + 1)^2}\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

4. Заключение. Теорема 1 была получена методом, основанным на исследовании некоторой матричной задачи Римана, предложенной Фокасом, Итсом и Китаевым (см. [3]). Асимптотика решения этой матричной задачи ищется методом перевала для матричных задач Римана, предложенным и разработанным Дейфтом и соавторами (см., например, [4]–[7]). Этот метод получил в последнее время широкое применение при исследовании асимптотических свойств ортогональных полиномов. Среди работ в этом направлении отметим [8], где были получены асимптотические представления для полиномов, ортогональных на вещественной оси относительно вещественнозначного переменного веса вида $h_n(x) = e^{-2nQ(x)}$, Q – фиксированный многочлен, а также [9], где были исследованы обобщенные полиномы Якоби.

Автор выражает признательность А. И. Аптекареву за полезные советы и помощь в подготовке этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончар А. А., Рахманов Е. А. // Матем. сб. 1987. Т. 134. № 3. С. 306–352.
2. Аптекарев А. И. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 1. С. 3–72.
3. Fokas A., Its A., Kitaev A. // Comm. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 395–430.
4. Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach. Reprint of the 1998 original. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.
5. Deift P. et al. // Intern. Math. Res. Notes. 1997. V. 16. P. 759–782.
6. Deift P. et al. // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. № 11. P. 1335–1425.
7. Deift P. et al. // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 1491–1552.
8. Ercolani N. M., McLaughlin K. D. T.-R. Asymptotics of the partition function for random matrices via Riemann–Hilbert techniques, and application to graphical enumeration // IMRM no. 14. 2003.
9. Vanlessen M. The Riemann–Hilbert Approach to Obtain Strong Asymptotics for Orthogonal Polynomials and Universality in Random Matrix Theory. Ph.D. thesis. Leuven, 2003.