Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, О структуре фазового портрета одного эндоморфизма плоскости в момент бифуркации его диагонального аттрактора, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 230–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:26:46

УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ОДНОГО ЭНДОМОРФИЗМА ПЛОСКОСТИ В МОМЕНТ БИФУРКАЦИИ ЕГО ДИАГОНАЛЬНОГО АТТРАКТОРА

В. А. Добрынский

Изучены явления, происходящие в момент существенно двумерной бифуркации неподвижной точки, вложенной в диагональный аттрактор двумерного отображения, построенного сцеплением пары идентичных одномерных унимодальных кусочно-линейных отображений.

Библиография: 12 названий.

Одним из наиболее изученных классов одномерных систем является семейство кусочно-линейных отображений вида $\tau \rightarrow 1 - a|\tau|$. Это связано с тем, что, обладая по сути дела столь же сложной динамикой, как и гладкие отображения, кусочно-линейные намного проще и легче поддаются изучению аналитическими методами.

В последнее время в литературе широко обсуждаются эффекты, возникающие при сцеплении ряда идентичных одномерных отображений.

Пусть $f_a: \tau \rightarrow f_a(\tau)$ – однопараметрическое семейство отображений прямой $\mathbb{R}^1$ в себя. Сцепление пары таких отображений может быть произведено различными способами. Чаще всего рассматриваются отображения вида

$$(x, y) \rightarrow (f_a(x) + \zeta(f_a(y) - f_a(x)), f_a(y) + \zeta(f_a(x) - f_a(y))), \quad (1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, они обладают свойством симметрии (относительно замен $x \rightarrow y, y \rightarrow x$), вследствие чего они при любых значениях параметров a и ζ имеют одномерное инвариантное многообразие в виде главной диагонали $x = y$, на которой они совпадают с f_a . Ниже исследуются отображения (1) с $f_a(\tau) = 1 - a|\tau|$, т.е. рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-линейных эндоморфизмов плоскости вида

$$\Phi: (x, y) \rightarrow (1 - a(1 - \zeta)|x| - a\zeta|y|, 1 - a(1 - \zeta)|y| - a\zeta|x|), \quad (2)$$

где a и ζ – параметры такие, что $0 < a < 2$ и $0 < \zeta < 1$.

Очевидно, $T = (1/(1+a), 1/(1+a))$ – неподвижная точка эндоморфизма Φ . Через нее проходит прямая $y = 2/(1+a) - x$, отрезок $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2/(1+a), y = 2/(1+a) - x\}$ которой является инвариантным множеством для Φ . В самом деле, так как $x \geq 0$ и $2/(1+a) - x \geq 0$ при $0 \leq x \leq 2/(1+a)$, то

$$\Phi: \left(\begin{array}{c} x \\ \frac{2}{1+a} - x \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 - a(1 - 2\zeta)x - 2\zeta \frac{a}{1+a} \\ 1 + a(1 - 2\zeta)x - 2(1 - \zeta) \frac{a}{1+a} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{array} \right).$$

Откуда $\tilde{y} = 2/(1+a) - \tilde{x}$.

При $a(1-2\zeta) = 1$ выполнено $\tilde{y} = x$, а $\tilde{x} = y$. В этом случае данный отрезок целиком состоит из периодических периода 2 точек эндоморфизма Φ . Обозначим через

$$T_{\pm}^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{1+a} \mp \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{1+a} \pm \frac{\alpha}{2} \right)$$

периодические периода 2 точки, принадлежащие прямым $y = x \pm \alpha$.

Численными методами свойства отображения (1) и ему подобных исследовались во многих работах (см., например, [1]–[3]), но аналитических результатов известно мало. В частности, в [4] и независимо в [5] доказано, что для любого $(1 + \sqrt{5})/2 < a < 2$ существует $\zeta_a > 0$ такое, что при любом $\zeta \in (0, \zeta_a)$ отображение Φ имеет хаотический аттрактор Λ , на котором Φ является топологически перемешивающим отображением. Кроме того, в [5] установлено, что этот аттрактор Λ представляет собой четырехугольник (ромбоид), стороны которого образованы парами отрезков двух первых образов критического множества отображения Φ . (Напомним, что *критическим* для отображения Ψ называется множество K_{Ψ} точек, в которых якобиан D_{Ψ} обращается в нуль или же вообще не существует [6], [7]). С другой стороны, почти очевидно, что при $\zeta < 1/2$ достаточно близких к $1/2$ упомянутый выше аттрактор Λ принадлежит диагонали $x = y$, совпадая с отрезком $[\Phi^2(O), \Phi(O)]$, где $O = (0, 0)$ – начало системы координат.

ТЕОРЕМА 1. Если $a \in (1, 2)$ и $\zeta \in ((a-1)/(2a), 1/2)$, то $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} [\Phi^2(O), \Phi(O)]$ – асимптотически устойчивое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $\alpha > 0$. Вычисляя, нетрудно убедиться в наличии следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Phi(\{(x, y) : y = x + \alpha, x \geq 0\}) &= \{(x, y) : y = x - a(1-2\zeta)\alpha, x \leq 1 - a\zeta\alpha\}, \\ \Phi(\{(x, y) : y = x + \alpha, x \leq -\alpha\}) &= \{(x, y) : y = x + a(1-2\zeta)\alpha, x \leq 1 - a(1-\zeta)\alpha\}, \\ \Phi(\{(x, y) : y = x + \alpha, -\alpha < x < 0\}) &= \{(x, y) : y = 2 - x - a\alpha, \\ &\quad 1 - a(1-\zeta)\alpha < x < 1 - a\zeta\alpha\}, \\ \Phi(\{(x, y) : y = x - \alpha, x \geq \alpha\}) &= \{(x, y) : y = x + a(1-2\zeta)\alpha, x \leq 1 - a(1-\zeta)\alpha\}, \\ \Phi(\{(x, y) : y = x - \alpha, x \leq 0\}) &= \{(x, y) : y = x - a(1-2\zeta)\alpha, x \leq 1 - a\zeta\alpha\}, \\ \Phi(\{(x, y) : y = x - \alpha, 0 < x < \alpha\}) &= \{(x, y) : y = 2 - x - a\alpha, \\ &\quad 1 - a(1-\zeta)\alpha < x < 1 - a\zeta\alpha\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, при $\zeta \in ((a-1)/(2a), 1/2)$, т.е. когда $a(1-2\zeta) < 1$, эндоморфизм Φ отображает полосу $\{(x, y) : x - \alpha \leq y \leq x + \alpha, -\infty < x < +\infty\}$ на часть полосы $\{(x, y) : x - a(1-2\zeta)\alpha \leq y \leq x + a(1-2\zeta)\alpha, -\infty < x < +\infty\}$, которая, в свою очередь, располагается внутри первой полосы. И, поскольку при $j \rightarrow \infty$ $a^j(1-2\zeta)^j \rightarrow 0$, то

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(\{(x, y) : x - \alpha \leq y \leq x + \alpha, -\infty < x < +\infty\}) \subset \{(x, y) : x = y, -\infty < x < +\infty\}.$$

Как известно [2],

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = \left\{ (x, y) : 1 + \frac{1-\zeta}{\zeta}(x-1) \leq y \leq 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), x \leq 1 \right\}.$$

Обозначим

$$\Delta_\alpha = \{(x, y) : x - \alpha \leq y \leq x + \alpha, -\infty < x < +\infty\} \cap BDEF,$$

где $BDEF$ – ромб с вершинами $B = (1, 1)$, $D = (1 - 2\zeta, -1 + 2\zeta)$, $E = (-1, -1)$, $F = (-1 + 2\zeta, 1 - 2\zeta)$, сторонами которого служат отрезки прямых

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), & y &= -1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}(x+1), \\ y &= 1 + \frac{1-\zeta}{\zeta}(x-1), & y &= -1 + \frac{1-\zeta}{\zeta}(x+1). \end{aligned}$$

Так как при $1 < a < 2$ выполнено $\Phi(E) = \Phi(B) = \Phi^2(0) = (1 - a, 1 - a) \in \text{Int}(EO)$ и $\Phi(O) = B$, то (ввиду непрерывности Φ) из сказанного вытекает существование достаточных малых α и $\beta > 0$ таких, что $\Phi(\text{Cl}(U_\beta(\Delta_\alpha))) \subset U_\beta(\Delta_\alpha)$. (Здесь и ниже $U_\beta(\cdot)$, $\text{Int}(\cdot)$ и $\text{Cl}(\cdot)$ обозначают соответственно β -окрестность, внутренность и замыкание некоторого множества.) В силу сходимости $a^j(1 - 2\zeta)^j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ последнее означает, что

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(\text{Cl } U_\beta(\Delta_\alpha)) = [\Phi^2(O), \Phi(O)] = \Lambda.$$

Следовательно, Λ – асимптотически устойчивое множество (при $1 < a < 2$ и $(a-1)/(2a) < \zeta < 1/2$).

Пусть теперь $\zeta = (a-1)/(2a)$, т.е. $a(1-2\zeta) = 1$. В этом случае Φ каждую прямую $y = x + \alpha$ отображает в ломаную L_α , звеньями которой являются лучи

$$\begin{aligned} L_\alpha^- &= \left\{ (x, y) : y = x - \alpha, x \leq 1 - (a-1)\frac{\alpha}{2} \right\}, \\ L_\alpha^+ &= \left\{ (x, y) : y = x + \alpha, x \leq 1 - (a+1)\frac{\alpha}{2} \right\}, \end{aligned}$$

соединенные воедино отрезком

$$L_\alpha^* = \left\{ (x, y) : y = 2 - x - a\alpha, 1 - (a+1)\frac{\alpha}{2} < x < 1 - (a-1)\frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Поскольку ниже рассматриваются те (и только те) участки ломаной L_α , которые лежат внутри ромба $BDEF$, они обозначаются так же, как и участки ломаной, которой они принадлежат. Введем на L_α порядок следующим образом: если $P = (x_P, y_P) \in L_\alpha^-$, $Q = (x_Q, y_Q) \in L_\alpha^*$, $R = (x_R, y_R) \in L_\alpha^+$, то $P \propto Q \propto R$; если $P, Q \in L_\alpha^-$, то $P \propto Q$ тогда и только тогда, когда $x_P < x_Q$; если $P, Q \in L_\alpha^*$, то $P \propto Q$ тогда и только тогда, когда $y_P < y_Q$; если $P, Q \in L_\alpha^+$, то $P \propto Q$ тогда и только тогда, когда $x_P > x_Q$. Обозначим

$$\begin{aligned} A_0 &= ED \cap L_\alpha^-, & A_1 &= \{(x, y) : x = 0\} \cap L_\alpha^-, & A_2 &= \{(x, y) : y = 0\} \cap L_\alpha^-, \\ A_3 &= BD \cap L_\alpha^-, & A_4 &= FB \cap L_\alpha^+, & A_5 &= \{(x, y) : x = 0\} \cap L_\alpha^+, \\ A_6 &= \{(x, y) : y = 0\} \cap L_\alpha^+, & A_7 &= EF \cap L_\alpha^+ \end{aligned}$$

и будем считать A_0 началом L_α , а A_7 концом его.

Рис. 1

Обозначим через $s(A)$ расстояние вдоль L_α от A_0 до $A \in L_\alpha$, и пусть $s_j = s(A_j)$, $s_\Phi(j) = s(\Phi(A_j))$, $j = \overline{0, 7}$. Очевидно, $s_0 = 0$, $s_2 - s_1 = s_4 - s_3 = s_6 - s_5 = \alpha\sqrt{2}$. Так как

$$A_0 = \left(-1 + (a+1)\frac{\alpha}{2}, -1 + (a-1)\frac{\alpha}{2}\right), \quad \Phi(A_0) = \left(1 - a + (a^2+1)\frac{\alpha}{2}, 1 - a - \alpha + (a^2+1)\frac{\alpha}{2}\right),$$

то $s_\Phi(0) = (2 - a + a(a-1)\alpha/2)\sqrt{2}$ и, значит, $s_\Phi(0) > 0$ при $0 < \alpha < 1/2$ и $1 < a < 2$. Учитывая, что $s_2 = [1 - (a-1)\alpha/2]\sqrt{2}$ и $2 - a + a(a-1)\alpha/2 < 1 - (a-1)\alpha/2$ при $0 < \alpha < 1/2$ и $1 < a < 2$, видим, что при данных a и α $\Phi(A_0) \in \text{Int}(A_0A_2)$. В силу симметрии то же самое справедливо для $\Phi(A_7)$ (т.е. $\Phi(A_7) \in \text{Int}(A_5A_7)$). Следовательно, $\Phi(L_\alpha^+) \subset L_\alpha$ и $\Phi(L_\alpha^-) \subset L_\alpha$ при таких a и α . Вследствие этого Φ порождает разрывное кусочно-линейное монотонное отображение

$$\varphi: L_\alpha^+ \cup L_\alpha^- \rightarrow L_\alpha$$

такое, что

$$\begin{aligned} \varphi(A_0A_1) &= \varphi(A_4A_5) = \varphi(A_0)A_3 \subset L_\alpha^-, \\ \varphi(A_2A_3) &= \varphi(A_6A_7) = A_4\varphi(A_7) \subset L_\alpha^+, \\ \varphi(A_1A_2) &= \varphi(A_5A_6) = A_3A_4 = L_\alpha^*. \end{aligned}$$

Обозначим $S = \varphi(s)$ функцию, задающую отображение φ . Ее график изображен на рис. 2 и состоит из двух параллельных ломаных, каждая из которых включает в себя три отрезка прямых, из которых крайние наклонены под одинаковым углом к оси s , а средний параллелен диагонали $S = s$. Ломаные разделены интервалом (длины $\alpha\sqrt{2}$), на котором отображение φ не определено. Обозначим через γ тангенс угла наклона

Рис. 2

крайних сегментов ломаных к оси s . Очевидно, что $\gamma = (s_\Phi(1) - s_\Phi(0))/s_1$. Поскольку $s_\Phi(1) - s_\Phi(0) = s_3 - s_\Phi(0) = 2s_1 + \alpha\sqrt{2} - s_\Phi(0)$, то $\gamma = 2 + (\alpha\sqrt{2} - s_\Phi(0))/s_1$. Учитывая, что $s_1 = [1 - (a+1)\alpha/2]\sqrt{2}$ и что $s_\Phi(0) = (2 - a + a(a-1)\alpha/2)\sqrt{2}$, отсюда находим, что $\gamma = a$ (< 2 для $1 < a < 2$).

ТЕОРЕМА 2. Если $a \in (1, 2)$ и $\zeta = (a-1)/(2a)$, то существуют $\alpha \in (0, 1/2)$ такие, что на $L_\alpha \setminus L_\alpha^*$ найдется нигде не плотное, непустое, замкнутое, инвариантное относительно Φ множество $C_{a\alpha} \neq T_+^{(\alpha)} \cup T_-^{(\alpha)}$. Более того, если $a > \sqrt{2}$, то среди наборов a и α имеются такие пары значений, что соответствующие им $C_{a\alpha}$ – несчетные множества, хаотичные в смысле Ли и Йорка [8], а действие Φ топологически перемешивает каждое из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приступим к построению $C_{a\alpha}$. Поскольку

$$\Phi(\Phi(A_0)A_3) = \Phi^2(A_0)\Phi(A_7) \quad \text{и} \quad \Phi(A_4\Phi(A_7)) = \Phi(A_0)\Phi^2(A_7),$$

то $\Phi(\Phi(A_0)A_3 \cup A_4\Phi(A_7)) = \Phi(A_0)\Phi(A_7) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}_\alpha \subset L_\alpha$ и, значит,

$$\Phi(\hat{L}_\alpha \setminus \text{Int}(A_3A_4)) = \hat{L}_\alpha.$$

Обозначим через $\hat{\Phi}$ ограничение Φ на $\hat{L}_\alpha \setminus L_\alpha^*$ и рассмотрим

$$C_{a\alpha} = \hat{L}_\alpha \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \hat{\Phi}^{-j}(\text{Int}(A_3A_4)).$$

Очевидно, что $C_{a\alpha}$ – замкнутое инвариантное относительно Φ множество. Очевидно, $T_{\pm}^{(\alpha)} \in C_{a\alpha}$. Покажем, что $C_{a\alpha} \neq T_{-}^{(\alpha)} \cup T_{+}^{(\alpha)}$. Заметим, прежде всего, что поскольку $\widehat{\Phi} \equiv \varphi$, то имеется взаимно-однозначное соответствие между $C_{a\alpha}$ и множеством, которое образуется на отрезке $[s_{\Phi}(0), s_{\Phi}(7)]$ в процессе последовательного удаления прообразов интервала (s_3, s_4) . Последнее для простоты мы будем называть тоже $C_{a\alpha}$. Этот процесс (на рис. 2 изображены его первые три этапа) по форме напоминает процесс построения множества Кантора. При этом левая ломаная определяет положение прообразов (s_3, s_4) , удаляемых из $[s_{\Phi}(0), s_3]$, а правая ломаная – положение прообразов (s_3, s_4) , удаляемых из $[s_4, s_{\Phi}(7)]$. Очевидно, что прообразы j -го и $(j+k)$ -го порядка отрезка (s_3, s_4) , где k – произвольное натуральное число, не пересекаются. (В самом деле, допустим противное, т.е. существует интервал $\emptyset \neq \Delta = (\bar{s}_j, \bar{s}_j) \cap (\bar{s}_{j+k}, \bar{s}_{j+k})$, где $(\bar{s}_m, \bar{s}_m) \in \varphi^{-m}((s_3, s_4))$, $m = j, j+k$. Тогда, с одной стороны, $\varphi^j(\Delta) \subset (s_3, s_4)$, а с другой, $\varphi^j(\Delta) \subset \varphi^{-k}((s_3, s_4)) \subset [s_{\Phi}(0), s_3] \cup [s_4, s_{\Phi}(7)]$, что невозможно.)

Покажем, что при любом $1 < a < 2$ выполнено $C_{a\alpha} \neq T_{-}^{(\alpha)} \cup T_{+}^{(\alpha)}$ по крайней мере для некоторых $0 < \alpha < 1/2$.

ЛЕММА 1. *Для каждого $a \in (1, 2)$ существует как минимум два натуральных $N > 1$ таких, что для каждого из них найдется $\alpha_{a,N} \in (0, 1/2)$ такое, что отображение Φ на $L_{\alpha_{a,N}}$ имеет цикл периода $2N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии ясно, что если $\Phi^{n+1}(A_0) = A_1$, то $\Phi^{n+1}(A_7) = A_6$, и наоборот. Будем искать цикл вида

$$\begin{aligned} \Phi(A_0) &\xrightarrow{\Phi^n} \Phi^{n+1}(A_0) = A_1 \xrightarrow{\Phi} A_3 \xrightarrow{\Phi} \Phi(A_7) \xrightarrow{\Phi^n} \Phi^{n+1}(A_7) \\ &= \Phi(A_6) \xrightarrow{\Phi} A_4 \xrightarrow{\Phi} \Phi(A_0), \end{aligned}$$

где $n = N - 2$. Так как $\gamma = a$ и $s_{\Phi}(0) = (2 - a + a(a - 1)\alpha/2)\sqrt{2}$, то

$$s_{\Phi^{n+1}}(0) = a^n(2 - a + a(a - 1)\alpha/2)\sqrt{2}.$$

Тогда из условия $\Phi^{n+1}(A_0) = A_1$ получаем следующее уравнение для определения значения $\alpha_{a,n+2}$:

$$a^n \left[2 - a + \frac{a(a - 1)}{2} \alpha_{a,n+2} \right] \sqrt{2} = \left[1 - \frac{a + 1}{2} \alpha_{a,n+2} \right] \sqrt{2}.$$

Решая его, находим, что

$$\alpha_{a,n+2} = \frac{2[1 - a^n(2 - a)]}{a^{n+1}(a - 1) + a + 1}.$$

Подставляя сюда $n = 0$ и 1 , имеем

$$\alpha_{a,2} = 2 \frac{a - 1}{a^2 + 1}, \quad \alpha_{a,3} = \frac{(a - 1)^2}{a^2(a - 1) + (a + 1)}.$$

Нетрудно убедиться, что с ростом a значения $\alpha_{a,2}$, $\alpha_{a,3}$ растут и $0 < \alpha_{a,2} < 2/5$, $0 < \alpha_{a,3} < 2/7$, когда $1 < a < 2$.

Заметим, что, поскольку с ростом a и n значения выражения $a^{n+1}(a - 1) + a + 1$ растут, а $\lim_{a \rightarrow 2-} [1 - a^n(2 - a)] = 0$ для любого (фиксированного) n , то при $a \rightarrow 2-$ количество пар N , $\alpha_{a,N}$, удовлетворяющих условиям леммы, неограниченно растёт.

ЛЕММА 2. Множество $C_{a\alpha}$ нигде не плотно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. что существует $[\bar{s}, \bar{s}] \subset C_{a\alpha}$, $s_\Phi(0) < \bar{s} < \bar{s} < s_\Phi(7)$. Поскольку $\varphi: C_{a\alpha} \rightarrow C_{a\alpha}$, то для любого j $\varphi^j([\bar{s}, \bar{s}]) \subset C_{a\alpha}$. А так как φ растягивает произвольный отрезок в $\gamma > 1$ раз, то длина $\varphi^j([\bar{s}, \bar{s}])$, равная $\gamma^j|\bar{s} - \bar{s}| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Но это значит, что найдется J такое, что $\varphi^J([\bar{s}, \bar{s}]) = [s_\Phi(0), s_\Phi(7)]$. Последнее невозможно, поскольку по построению $C_{a\alpha} \neq [s_\Phi(0), s_\Phi(7)]$.

ЛЕММА 3. Если a и α таковы, что $\Phi^{J+1}(A_0) = T_-^{(\alpha)}$ ($\Phi^{J+1}(A_7) = T_+^{(\alpha)}$), то Φ – отображение, топологически перемешивающее $C_{a\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{s} \in C_{a\alpha}$, $\xi > 0$ – произвольно малая константа и $\hat{U}_\xi(s) \stackrel{\text{def}}{=} U_\xi(\hat{s}) \cap C_{a\alpha} - \xi$ -окрестность $\hat{s}$ в $C_{a\alpha}$. Ввиду нигде не плотности $C_{a\alpha}$ из алгоритма построения $C_{a\alpha}$ вытекает, что для данного ξ найдется натуральное $M = M(\xi)$ такое, что $\varphi^{-M}(s_4) \cap \hat{U}_\xi(s) \neq \emptyset$. Поскольку $\varphi(s_4) = s_\Phi(0)$ и $\varphi^J(s_\Phi(0)) = s(T_-^{(\alpha)})$, это значит, что существует $\eta > 0$ такое, что

$$\hat{U}_\eta(s(T_-^{(\alpha)})) \subset \varphi^{M+J+1}(U_\xi(\hat{s})).$$

А так как

$$\varphi^2(C_{a\alpha} \cap ([0, s_1] \cup [s_2, s_3])) = C_{a\alpha} \cap ([0, s_1] \cup [s_2, s_3])$$

и φ – растягивающее на $C_{a\alpha}$ отображение, то найдется натуральное $I = I(\eta)$ такое, что $\varphi^{2I}(\hat{U}_\eta(s(T_-^{(\alpha)}))) = C_{a\alpha} \cap [0, s_3]$. Отсюда вытекает, что $\varphi^{M+J+2I+2}(\hat{U}_\xi(\hat{s})) \supset C_{a\alpha}$. Последнее означает, что φ топологически перемешивает $C_{a\alpha}$.

ЛЕММА 4. Для каждого $\sqrt{2} < a < 2$ найдутся целое $n \geq 0$ и $\alpha_{a,n+2} \in (0, 1/2)$ такие, что

$$\Phi^{n+2}(A_0) = T_-^{(\alpha)}, \quad \Phi^{n+3}(A_0) = T_+^{(\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В процессе доказательства леммы 1 установлено, что для каждого $1 < a < 2$ и $n = 0$ или 1 найдется $\alpha_{a,n+2} \in (0, 1/2)$ такое, что $\Phi^{n+1}(A_0) = A_1$, $\Phi^{n+2}(A_0) = A_3$. Пусть $n = 0$. Обозначим

$$t = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{1+a}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{1+a} \right)$$

– прообраз точки $T_-^{(\alpha)}$ на L_α^- , а $s_t = (1/(1+a) - \alpha/2)a\sqrt{2}$ – расстояние от A_0 до t . Заметим теперь, что так как в лемме 1 доказано существование $\alpha_{a,2}$ такого, что $\Phi(A_0) = A_1$, то в таком случае (т.е. при этом значении α) $s_\Phi(0) > s_t$. И поскольку $s_\Phi(0)$, s_t – функции непрерывные по α , лемма будет доказана, если мы сумеем показать, что $s_\Phi(0) < s_t$ при $\alpha = 0$. Нетрудно проверить, что это требование эквивалентно выполнению неравенства $a/(1+a) > 2 - a + \alpha a^2/2$ при $\alpha = 0$. Последнее справедливо, когда $a > \sqrt{2}$.

ЛЕММА 5. Для каждого $\sqrt{2} < a < 2$ существует по крайней мере одно $0 < \alpha < 1/2$ такое, что пара точек $T_-^{(\alpha)}$, $T_+^{(\alpha)}$ – репеллер с мгновенным возвратом [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предыдущей лемме мы показали существование для каждого $a \in (\sqrt{2}, 2)$ такого $\alpha \in (0, 1/2)$, что $\Phi^2(A_0) = T_-^{(\alpha)}$, $\Phi^3(A_0) = T_+^{(\alpha)}$. А так как коэффициент наклона графика отображения, обратного к ограничению Φ на L_α (которое, как не взаимно-однозначное, имеет, естественно, несколько ветвей), равен $1/a < 1$, то существует последовательность прообразов точки A_0 , которые сходятся к $T_-^{(\alpha)} \cup T_+^{(\alpha)}$. С учетом гиперболичности точек $T_-^{(\alpha)}$, $T_+^{(\alpha)}$ это значит, что они являются репеллером с мгновенным возвратом.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Первая часть утверждения теоремы – очевидное следствие лемм 1 и 2. Что же касается второй части, то с учетом результата Маротто (см., например, [9]–[12]) ее справедливость является прямым следствием лемм 3–5.

Из вышесказанного вытекает еще такое

СЛЕДСТВИЕ. Если $a \in (1, 2)$ и $\zeta = (a - 1)/(2a)$, то Λ – множество, устойчивое по Ляпунову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Phys. A. Math. Gen. 1991. V. 24. P. 4587–4597.
- [2] Pikovsky A.S., Kurths J. Collective behavior in ensembles of globally coupled maps // Physica D. 1994. V. 76. P. 411–419.
- [3] Losson J., Mackey M. Coupling induced statistical cycling in two diffusively coupled maps // Physica D. 1994. V. 72. P. 324–342.
- [4] Keller G. Mixing for Finite Systems of Coupled Tent Maps // Preprint ESI 388. Vienna, 1996.
- [5] Добрынский В. А. Существование двумерных топологически перемешивающих аттракторов у некоторых кусочно-линейных отображений плоскости // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 6. С. 53–58.
- [6] Добрынский В. А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 442–445.
- [7] Добрынский В. А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 669–680.
- [8] Li T.-Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
- [9] Marotto F. R. Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 63. P. 199–223.
- [10] Rogers T. D., Marotto F. R. Perturbations of mappings with periodic repellers // Nonlinear Analysis. 1983. V. 7. № 1. P. 97–100.
- [11] Hale J. K., Lin X. B. Symbolic dynamics and nonlinear semiflows // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. V. 144. P. 229–259.
- [12] Steinlein H., Walters H. O. Hyperbolic sets, transversal homoclinic trajectories and symbolic dynamics for C^1 -maps in Banach spaces // J. Dynamics and Differential Equations. 1990. V. 2. № 3. P. 325–365.