Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Иванишко, Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 937–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:05:42

ОБОБЩЕННЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

И. А. Иванишко

В этой работе мы дадим различные описания обобщенных классов соболевского типа на метрических пространствах с мерой в тех или иных терминах (при помощи максимальных функций, неравенства Пуанкаре и т.д.). В настоящее время имеется ряд различных подходов [1]–[4] к определению таких пространств.

© И. А. Иванишко 2005

Пусть (X, d, μ) – пространство однородного типа [5], т.е. $d: X \times X \mapsto \mathbb{R}$ – квазиметрика на X (в аксиомах метрики неравенство треугольника заменено на неравенство $d(x, y) \leq a_d(d(x, z) + d(z, y))$ с некоторой постоянной $a_d \geq 1$, не зависящей от $x, y, z \in X$), μ – неотрицательная, борелевская, регулярная мера на X , удовлетворяющая условию удвоения

$$\mu B(x, 2t) \leq c\mu B(x, t), \quad (1)$$

где $c > 0$ не зависит от шара $B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\} \subset X$.

Здесь и всюду далее обозначаем через c различные постоянные, зависящие от определенных параметров, но эта зависимость для нас несущественна. Кроме того, пусть для шара $B \subset X$

$$f_B = \oint_B f d\mu = \frac{1}{\mu B} \int_B f d\mu.$$

Под значением функции $f \in L^p(X)$, $p \geq 1$, в точке $x \in X$ будем понимать левую часть следующего выражения:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\mu B(x, t)} \int_{B(x, t)} f d\mu = f(x) \quad (2)$$

(этот предел существует μ -почти всюду в силу теоремы Лебега).

Пусть Ω – класс всех положительных возрастающих функций η на $(0, \infty)$ таких, что $\eta(t)/t$ убывает, $\eta(+0) = 0$.

Пусть $\eta \in \Omega$. Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит *обобщенному пространству Хайлаша–Соболева* $M_\eta^p(X)$, если существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta(d(x, y))(g(x) + g(y)) \quad (3)$$

для μ -почти всех $x, y \in X$. Норма в $M_\eta^p(X)$ вводится следующим образом:

$$\|f\|_{M_\eta^p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где $\inf$ берется по всем функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим (3).

В случае $\eta(t) = t$ эти пространства ввел Хайлаш [1]. В настоящее время они интенсивно изучаются (см. [2], [3]). В случае степенных функций $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, они недавно рассматривались в [6].

Для $f \in L^p(X)$, $p \geq 1$, введем максимальные функции

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f - f(x)| d\mu, \quad (4)$$

$$S_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f - f_B| d\mu, \quad (5)$$

$$\mathcal{D}_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \oint_B \oint_B |f(y) - f(z)| d\mu(y) d\mu(z), \quad (6)$$

где $\sup$ берется по всем шарам B , содержащим точку $x \in X$.

Рассмотрение более широкого класса функций по сравнению со случаем $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, дает возможность более гибко учитывать локальные свойства функций $f \in L^p(X)$. Например, максимальная функция $\mathcal{N}_\eta f$ измеряет локальную гладкость функции: для $f \in L_{\text{loc}}^1(X)$, $\eta \in \Omega$ и μ -почти всех $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta(d(x, y))(\mathcal{N}_\eta f(x) + \mathcal{N}_\eta f(y)). \quad (7)$$

Операторы (4)–(6) порождают соответствующие пространства функций

$$C_\eta^p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C_\eta^p} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p < \infty\},$$

$$S_\eta^p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{S_\eta^p} = \|f\|_p + \|S_\eta f\|_p < \infty\},$$

$$D_\eta^p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{D_\eta^p} = \|f\|_p + \|\mathcal{D}_\eta f\|_p < \infty\}.$$

В случае $\eta(t) = t^\alpha$ будем писать в обозначениях этих классов просто α вместо t^α . Историю развития таких максимальных функций см. в [7]–[9].

Связь с классическими пространствами Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ устанавливает следующая теорема Кальдерона [7] (см. также [8]):

$$C_k^p(\mathbb{R}^n) = W_k^p(\mathbb{R}^n)$$

(классы $C_k^p(\mathbb{R}^n)$ определяются подобно $C_1^p(\mathbb{R}^n)$, но вместо среднего значения функции вычитается некоторый полином, зависящий от шара).

В работе [2] установлена тесная связь между пространством $M_1^p(X)$ и p -неравенством Пуанкаре. В связи с этим определим еще два класса функций.

Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит пространству $A_\eta^p(X)$, если для любого шара $B \subset X$ выполнено следующее условие: существуют $\lambda \geq 1$ и неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ такие, что

$$\oint_B |f - f_B| d\mu \leq \eta(t) \oint_{\lambda B} g d\mu. \quad (8)$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|f\|_{A_\eta^p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где точная нижняя грань берется по всем g , удовлетворяющим (8).

Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит пространству $B_\eta^p(X)$, если существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ такая, что для любого шара $B \subset X$ и для μ -почти всех $x \in B$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_B| \leq \eta(t)g(x). \quad (9)$$

Норму в этом пространстве введем следующим образом:

$$\|f\|_{B_\eta^p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где $\inf$ берется по всем g , удовлетворяющим (9).

Теперь мы готовы к формулировке основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 1$, $\eta \in \Omega$. Тогда

$$C_\eta^p(X) = M_\eta^p(X) = B_\eta^p(X)$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $C_\eta^p(X) \subset M_\eta^p(X)$ имеет место в силу (7). Обратно, пусть $f \in M_\eta^p(X)$. Для любого шара $B \ni x$ и любого $y \in B$ выполнена оценка $\eta(d(x, y)) \leq 2a_d\eta(t)$. Так как $|f(x)| \leq Mf(x)$ μ -п.в. (см., например, [3]), то

$$\frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq 2a_d(g(x) + g_B) \leq 4a_d Mf(x).$$

Здесь

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu B} \int_B |f| d\mu$$

— максимальная функция Харди–Литтлвуда. Так как $p > 1$, то $\|Mg\|_p \leq c\|g\|_p$. Переходя к $\sup$ по всем шарам $B \ni x$, получим $\mathcal{N}_\eta f \in L^p(X)$.

Чтобы получить оценку для норм, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $g_\varepsilon \in L^p(X)$ такая, что $\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p < \|f\|_{M_\eta^p} + \varepsilon$, следовательно,

$$\|f\|_{C_\eta^p} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p \leq c(\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p) < c(\|f\|_{M_\eta^p} + \varepsilon).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим $\|f\|_{C_\eta^p} \leq c\|f\|_{M_\eta^p}$.

Пусть $f \in B_\eta^p(X)$. Для μ -почти всех $x, y \in X$ мы можем найти шар $B(z, t)$, содержащий точки x и y , радиуса $t \leq d(x, y)$ такой, что для обеих точек выполнено неравенство (9). Тогда

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta(t)(g(x) + g(y)) \leq \eta(d(x, y))(g(x) + g(y)).$$

Следовательно, $f \in M_\eta^p(X)$. Оценка для норм получается, как и выше.

Пусть $f \in M_\eta^p(X)$ и $B \ni x$ — произвольный шар. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - f_B| &\leq \oint_B |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq \oint_B \eta(d(x, y))(g(x) + g(y)) d\mu(y) \\ &\leq 2a_d \eta(t)(g(x) + g_B) \leq 4\eta(t) M g(x). \end{aligned}$$

Так как $p > 1$ и $g \in L^p(X)$, то $Mg \in L^p(X)$ и, значит, $f \in B_\eta^p(X)$. Аналогично предыдущим случаям, получим оценку для норм: $\|f\|_{B_\eta^p} \leq c\|f\|_{M_\eta^p}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 1$, $\eta \in \Omega$. Тогда

$$D_\eta^p(X) = S_\eta^p(X) = A_\eta^p(X)$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совпадение классов $D_\eta^p(X)$ и $S_\eta^p(X)$ следует из очевидных оценок $\mathcal{S}_\eta f(x) \leq \mathcal{D}_\eta f(x)$ и $\mathcal{D}_\eta f(x) \leq 2\mathcal{S}_\eta f(x)$.

Пусть теперь $f \in A_\eta^p(X)$ и $B \ni x$ — произвольный шар. Тогда

$$\frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq \oint_{\lambda B} g d\mu \leq M g(x).$$

Переходя к $\sup$ по всем шарам $B \ni x$, получим $\mathcal{S}_\eta f(x) \leq M g(x)$, следовательно, в силу теоремы Харди–Литтлвуда $f \in S_\eta^p(X)$.

Найдем по произвольному $\varepsilon > 0$ функцию $g_\varepsilon \in L^p(X)$ такую, что $\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p < \|f\|_{A_\eta^p} + \varepsilon$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что $\|f\|_{S_\eta^p} \leq c\|f\|_{A_\eta^p}$.

Обратно, пусть $f \in S_\eta^p(X)$ и B — произвольный шар. Тогда для любого $y \in B$

$$\frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f - f_B| d\mu \leq \mathcal{S}_\eta f(y).$$

Проинтегрируем по $y \in B$ и разделим обе части на μB :

$$\frac{1}{\eta(t)} \oint_B |f - f_B| d\mu \leq \oint_B \mathcal{S}_\eta f d\mu,$$

поэтому $f \in A_\eta^p(X)$ и $\|f\|_{A_\eta^p} \leq \|f\|_{S_\eta^p}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > 1$ и $\eta \in \Omega$. Тогда $C_\eta^p(X) \subset S_\eta^p(X)$.

Обратно, если

$$\sum_{i=k}^{\infty} \eta(2^{-i}) \leq c\eta(2^{-k}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

то $S_\eta^p(X) \subset C_\eta^p(X)$ и нормы в этих пространствах эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое включение очевидно, так как $\mathcal{S}_\eta f(x) \leq \mathcal{N}_\eta f(x)$.

Обратно, пусть $f \in S_\eta^p(X)$, x — точка Лебега для f и $B \ni x$. Обозначим через $\lambda B = B(z, \lambda t)$ и $B_i \equiv B(x, a_d 2^{-(i-1)}t)$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда $B \subset B_0 \subset 3a_d^2 B$ и

$$\begin{aligned} \int_B |f - f(x)| d\mu &\leq \int_B |f - f_B| d\mu + |f(x) - f_B| \\ &\leq \eta(t) \mathcal{S}_\eta f(x) + |f(x) - f_{B_0}| + |f_B - f_{B_0}| \equiv \eta(t) \mathcal{S}_\eta f(x) + A_1 + A_2. \end{aligned}$$

По теореме Лебега $f(x) = f_{B_0} + \sum_{i=0}^{\infty} [f_{B_{i+1}} - f_{B_i}]$, и в силу (1)

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv |f(x) - f_{B_0}| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} (f_{B_{i+1}} - f_{B_i}) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu B_{i+1}} \int_{B_{i+1}} |f - f_{B_i}| d\mu \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu B_i}{\mu B_{i+1}} \frac{1}{\mu B_i} \int_{B_i} |f - f_{B_i}| d\mu \leq c \mathcal{S}_\eta f(x) \sum_{i=0}^{\infty} \eta(2^{-i}t), \\ A_2 &\equiv |f_B - f_{B_0}| \leq \frac{\mu B_0}{\mu B} \frac{1}{\mu B_0} \int_{B_0} |f - f_{B_0}| d\mu \leq c \eta(t) \mathcal{S}_\eta f(x). \end{aligned}$$

Итак, в силу условия Бари (10)

$$\int_B |f - f(x)| d\mu \leq c \mathcal{S}_\eta f(x) \sum_{i=0}^{\infty} \eta(2^{-i}t) \leq c \eta(t) \mathcal{S}_\eta f(x).$$

Переходя к $\sup$ по всем шарам $B \ni x$, мы завершаем доказательство.

В случае $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, часть утверждений была получена в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hajlasz P. // Potential Anal. 1996. V. 5. P. 403–415.
2. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev Met Poincaré. Mem. Amer. Math. Soc. V. 688. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.
3. Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
4. Gol'dshtein V., Troyanov M. // Expo. Math. 2001. V. 19. № 4. P. 289–336.
5. Coifman R. R., Weiss G. // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. № 4. P. 569–645.
6. Yang D. // Science of China. 2003. V. 46. № 5. P. 1–15.
7. Calderon A. P. // Studia Math. 1972. V. 44. P. 167–186.
8. DeVore R., Sharpley R. Maximal Functions Measuring Local Smoothness. Mem. Amer. Math. Soc. V. 47. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1984.
9. Kolyada V. I. // Anal. Math. 1999. V. 25. P. 277–300.