Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Квирикашвили, А. А. Лашхи, Перспективные отображения модулей, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 946–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 11:30:00

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МОДУЛЕЙ

Т. Г. Квирикашвили, А. А. Лашхи

Одной из основных проблем геометрической алгебры является представление специфических с геометрической точки зрения отображений (перспективы, коллинеации, гармонические отображения и др.) через (полу) линейные функции. Такого рода теоремы называются основными теоремами геометрической алгебры [1]–[3].

Р. Бэрн, Дж. фон Нейманн, Ж. Дьедонне предложили идею расширения теории для общих основных колец, тем самым дав стимул активности в этом направлении [1]–[3]. Однако заметим, что ни одна кольцевая версия о перспективных отображениях не известна. Причина в том, что в отличие от классического случая не каждый подмодуль свободного R -модуля имеет прямое дополнение.

Кольцо R назовем SF -кольцом, если любой подмодуль свободного R -модуля X свободен и X обладает инвариантным базисным числом. Пусть Ω – свободный модуль над SF -кольцом R , $\dim \Omega = N \geq 3$, $N < \infty$. Пусть M и M' – подмодули одинакового ранга n , $2 \leq n < N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмодуль $T \subset \Omega$ называется Δ -дополнением к подмодулю M , если

$$M \cap T = 0, \quad M \oplus T \cong \Omega.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Подмодули M и M' имеют общее Δ -дополнение T , т.е.

$$M \cap T = M \cap T' = 0, \quad M \oplus T \cong M' \oplus T \cong \Omega.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеют место следующие соотношения:

- (I) $(M \oplus T) \cap (M' \oplus T) = \Omega_1 \cong \Omega$;
- (II) если $M_1 = M \cap \Omega_1$, $M'_1 = M' \cap \Omega_1$, то $M_1 \oplus T = M'_1 \oplus T = \Omega_1$;
- (III) если $U_1 \subset M_1$, $W \subset \Omega_1$, $T \subset W$, то $U_1 \subset M_1 \cap W \iff W = U_1 \oplus T$.

Пусть $U_1 \subset M_1$ – произвольный подмодуль и $W = U_1 \oplus T$. Рассмотрим пересечение $W \cap M' = U'_1$. Имеем $W = U'_1 \oplus T$. Тогда между подмодулями $U_1 \subset M_1$ и $U'_1 \subset M'_1$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, определенное равенством

$$U_1 \oplus T = U'_1 \oplus T.$$

Пусть $\mathbb{P}(M_1)$ и $\mathbb{P}(M'_1)$ – проективные пространства; напомним, что проективное пространство $\mathbb{P}(M_1)$ – это множество всех свободных прямых слагаемых ранга 1, т.е.

$$\mathbb{P}(M_1) = \{Re, \text{ где } e \in M_1 \text{ – унимодулярный элемент}\}.$$

Элемент $e \in M_1$ унимодулярен, если существует линейная форма $g: M_1 \rightarrow R$ такая, что $g(e) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Биекцию $p: \mathbb{P}(M_1) \rightarrow \mathbb{P}(M'_1)$ назовем *перспективой с центром перспективы* $\mathbb{P}(T)$, если она определяется следующим равенством:

$$Rm \oplus T = Rm' \oplus T, \quad Rm \in \mathbb{P}(M_1), \quad Rm' \in \mathbb{P}(M'_1).$$

В дальнейшем все модули определены над SF -кольцом.

ТЕОРЕМА 1. Перспектива $p: \mathbb{P}(M_1) \rightarrow \mathbb{P}(M'_1)$ индуцируется линейным отображением $\alpha: M_1 \rightarrow M'_1$, тождественным на пересечении $M_1 \cap M'_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Биекцию $\Delta p: \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{P}(M')$ назовем Δ -перспективой с центром $\mathbb{P}(T)$, если найдутся подмодули $M_1 \subset M$ и $M'_1 \subset M'$ такие, что между $\mathbb{P}(M_1)$ и $\mathbb{P}(M'_1)$ можно установить перспективу p с центром $\mathbb{P}(T)$ и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(M_1) & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}(M'_1) \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ \mathbb{P}(M) & \xrightarrow{\Delta p} & \mathbb{P}(M') \end{array},$$

т.е. $\Delta p \circ i = i' \circ p$,

$$\begin{aligned} i: Rm &\rightarrow Re, & Rm &= Re \cap M_1, & Rm &\in \mathbb{P}(M_1), & Re &\in \mathbb{P}(M); \\ i': Rm' &\rightarrow Re', & Rm &= Re' \cap M'_1, & Rm' &\in \mathbb{P}(M'_1), & Re' &\in \mathbb{P}(M'). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1'. Δ -перспектива $\Delta p: \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{P}(M')$ индуцируется линейным отображением $\alpha: M_1 \rightarrow M'_1$, тождественным на элементах пересечения $M \cap M' = M_1 \cap M'_1$.

ЛЕММА. Линейное отображение $\alpha: M_1 \rightarrow M'_1$ тождественно на элементах пересечения $M_1 \cap M'_1$ тогда и только тогда, когда

$$M_1 = (M_1 \cap M'_1) \oplus M_0, \quad M'_1 = (M_1 \cap M'_1) \oplus M'_0.$$

Биекцию $\beta: \mathbb{P}(M_1) \rightarrow \mathbb{P}(M'_1)$ назовем *колинеацией*, если

$$Re_1 \subset Re_2 + Re_3 \iff \beta(Re_1) \subset \beta(Re_2) + \beta(Re_3);$$

биекцию назовем *проекцией*, если ее можно получить в результате умножения колинеации.

ТЕОРЕМА 2. Колинеация $\beta: \mathbb{P}(M_1) \rightarrow \mathbb{P}(M'_1)$ является перспективой тогда и только тогда, когда она индуцируется линейным отображением модулей M_1 и M'_1 , тождественным на пересечении $M_1 \cap M'_1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\beta: \mathbb{P}(M_1) \rightarrow \mathbb{P}(M'_1)$ – колинеация, тождественная на пересечении

$$\mathbb{P}(M_1) \cap \mathbb{P}(M'_1) = \mathbb{P}(M_1 \cap M'_1).$$

Тогда

- (i) если $\dim(M_1 \cap M'_1) \geq 2$, то β – перспектива;
- (ii) если $M_1 \cap M'_1 = 0$ и β – проекция, то β – перспектива;
- (iii) если $\dim(M_1 \cap M'_1) = 1$, β – проекция и R коммутативно, то β – перспектива.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если R – некоммутативное кольцо, то можно построить соответствующий пример, опровергающий (iii).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Buekenhout (ed.) Handbook of Incidence Geometry. Amsterdam: North Holland, 1995.
2. Bartolone C., Bartolozzi F. // Rings and Geometry / ed. R. Kaya, P. Plaumann, K. Strambach. NATO ASI Series: D. Reidel Publ., 1985. P. 353–389.
3. McDonald B. Linear Algebra over Commutative Rings. New York: Marcel Dekker, 1984.