Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, Ю. Д. Рудомазина, О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 941–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:14:47

О ЗАДАЧЕ ТУРАНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ И МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ

В. И. Иванов, Ю. Д. Рудомазина

Пусть $c(x) = \cos(2\pi x)$, $s(x) = \sin(2\pi x)$, $0 < h \leq 1/2$, $K(h)$ – класс непрерывных 1-периодических четных функций $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c(nx)$, для которых выполнены условия

$$1) \ a_n \geq 0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \quad 2) \ f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1, \quad 3) \ f(x) = 0, \ h \leq |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00647.

Задача Турана состоит в вычислении величины

$$A(h) = \sup_{f \in K(h)} a_0 = \sup_{f \in K(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

Она была поставлена П. Тураном в 1970 г. в частной беседе С. Б. Стечкину в связи с возможными приложениями в теории чисел.

Стечкин в работе [1], вышедшей в 1972 г., показал, что классы $K(h)$ непусты, например, функция

$$\varphi_h(x) = h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s(nh/2)}{\pi nh} \right)^2 c(nx) \in K(h),$$

доказал, что для $q = 2, 3, \dots$ выполняется равенство $A(1/q) = 1/q$, экстремальной функцией является $\varphi_{1/q}(x)$ и вывел отсюда асимптотику $A(h) = h + O(h^2)$, $h \rightarrow 0$.

А. Ю. Попов предположил, что при $h \rightarrow 0$ справедлива более сильная асимптотика $A(h) = h + O(h^3)$.

Дальнейшее продвижение в задаче Турана осуществлено в работах Горбачева и Маношиной [2]–[6]. В них доказано предположение Попова, задача Турана для рациональных h сведена к конечномерной экстремальной задаче и вычислена величина $A(h)$ для $h = 2/q, 3/q, 4/q, p/(2p+1)$.

В настоящей работе задача Турана решается для всех рациональных h . Нам понадобятся некоторые результаты из [6].

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования.

Задача 1. Вычислить величину

$$s(p, q) = \max \alpha(0) \quad (1)$$

при условиях

$$\alpha(r) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c\left(\frac{rk}{q}\right) \geq 0, \quad r = 0, 1, \dots, q-1.$$

ТЕОРЕМА А (Горбачев [6]). Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$. Тогда

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} s(p, q).$$

Экстремальной функцией $\varphi_{p,q}(x)$ является 1-периодическая непрерывная четная кусочно-линейная функция с вершинами в точках

$$\left(\pm \frac{k}{q}, b_k^*\right), \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad b_0^* = 1, \quad b_p^* = 0$$

и равная

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} b_k^* + (b_k^* - b_{k+1}^*)(k - q|x|), & \frac{k}{q} \leq |x| \leq \frac{k+1}{q}, \\ 0, & \frac{p}{q} \leq |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Здесь b_k^* – координаты экстремального вектора в задаче 1.

Рассмотрим также следующую задачу линейного программирования.

ЗАДАЧА 2. Вычислить величину (1) при дополнительных ограничениях $b_k \geq 0, k = 1, \dots, p-1$. Обозначим ее $\sigma(p, q)$.

Задача 1 является дискретным аналогом известной задачи Фейера для неотрицательных тригонометрических полиномов. Задача 2 является аналогом задачи Фейера для неотрицательных тригонометрических полиномов с неотрицательными коэффициентами. Известно, что решения обеих задач Фейера совпадают и экстремальным полиномом в обеих задачах является полином Фейера. Есть основания полагать, что и решения их дискретных аналогов, т.е. задач 1, 2 также совпадают.

Сформулируем задачу 2 в эквивалентной форме.

ЗАДАЧА 3. Вычислить величину $\lambda(p, q) = \max \sum_{j=1}^{p-1} a_j$ при условиях

$$1) \ a_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad 2) \quad \sum_{j=1}^{p-1} a_j c\left(\frac{ij}{q}\right) \geq -1, \quad i = 1, \dots, q-1.$$

Для задачи 3 запишем двойственную задачу.

ЗАДАЧА 4. Вычислить величину $\mu(p, q) = \min \sum_{i=1}^{q-1} \hat{a}_i$ при условиях

$$1) \ \hat{a}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q-1, \quad 2) \quad \sum_{i=1}^{q-1} \hat{a}_i c\left(\frac{ij}{q}\right) \leq -1, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Первым автором в 2001 г. для задач 3, 4 были высказаны две гипотезы. Пусть

$$T_p = \{r_i\}_{i=1}^{p-1},$$

где $r_{2i-1} = [qi/p]$, $r_{2i} = r_{2i-1} + 1$, $i = 1, \dots, [(p-1)/2]$ и дополнительно $r_{p-1} = (q-1)/2$, если p четное.

ГИПОТЕЗА 1. Существует вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_{p-1}^*)$ такой, что

$$1) \ a_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ 2) \quad \sum_{j=1}^{p-1} a_j^* c\left(\frac{r_i j}{q}\right) = -1, \quad i = 1, \dots, p-1. \quad (2)$$

Отметим, что из (2), условий на r_i полином степени $p-1$

$$\tilde{F}_{p,q}(i) = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} a_j^* c\left(\frac{ij}{q}\right) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, q-1. \quad (3)$$

ГИПОТЕЗА 2. Существует вектор $\hat{a}_i^* = (\hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_{p-1}^*)$ такой, что

$$1) \ \hat{a}_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, p-1, \\ 2) \quad \sum_{i=1}^{p-1} \hat{a}_i^* c\left(\frac{r_i j}{q}\right) = -1, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Горбачев предложил записать гипотезу 2 в эквивалентной форме, присущей квадратурным формулам. Пусть полином

$$\Gamma_{p,q}(\nu) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i c\left(\frac{r_i \nu}{q}\right) \quad (4)$$

определен из условий

$$\Gamma_{p,q}(0) = 1, \quad \Gamma_{p,q}(\nu) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p-1, \quad r_0 = 0. \quad (5)$$

ГИПОТЕЗА 3. Значения коэффициентов $\gamma_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Справедливость гипотезы 3 для полиномов $f(\nu) = \sum_{i=0}^{p-1} \hat{f}_i c(i\nu/q)$ порядка $p-1$ позволила бы написать квадратурную формулу

$$\hat{f}_0 = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i f(r_i),$$

откуда легко выводится оценка $s(p, q) \leq 1/\gamma_0$, точная на полиноме (3). Если выполнена гипотеза 1, то коэффициенты этого полинома будут неотрицательными и мы получим равенства

$$s(p, q) = \sigma(p, q) = 1 + \lambda(p, q) = 1 + \mu(p, q) = \frac{1}{\gamma_0}.$$

Горбачев предположил также, что для полинома (4) с условиями (5) справедлива

ГИПОТЕЗА 4. Значения полинома $\Gamma_{p,q}(\nu) \geq 0$, $\nu = 1, \dots, q-1$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Существует $\bar{r} \in T_p$ такое, что для всех $j = 0, 1, \dots, q-1$ выполнено

$$\left\{ c\left(\frac{r_i j}{q}\right) \right\}_{i=1}^{p-1} = \left\{ c\left(\frac{i j \bar{r}}{q}\right) \right\}_{i=1}^{p-1}.$$

Искомое $\bar{r} \in T_p$ находится по следующему алгоритму. Если имеет место один из следующих случаев:

$$\begin{aligned} q &= pk + r, & r &= 2, \dots, p-1, & (r, p) &= 1; \\ p &= rt + m, & m &= 1, \dots, r-1, & (m, r) &= 1; \\ ru - lm &= \pm 1, & u &= 0, 1, \dots, [m/2], & l &= 0, 1, \dots, [r/2], \end{aligned}$$

то $\bar{r} = (lt + u)k + l$. Если $q = pk + 1$, то $r = 1$, $u = 1$, $l = 0$, $\bar{r} = k[p/q]$. Лемма 1 проверяется непосредственно.

Из леммы 1 вытекает, что гипотезы 1, 2 и 3 эквивалентны. Эквивалентны в том смысле, что системы

$$F_{p,q}(\nu) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i c\left(\frac{i\nu}{q}\right), \quad F_{p,q}(0) = 1, \quad F_{p,q}(\nu\bar{r}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p-1, \quad (6)$$

$$\Gamma_{p,q}(\nu) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i c\left(\frac{i\nu\bar{r}}{q}\right), \quad \Gamma_{p,q}(0) = 1, \quad \Gamma_{p,q}(\nu) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p-1, \quad (7)$$

имеют одно и то же решение $\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1}$. Согласно замечанию (3) для полинома $\Gamma_{p,q}(\nu)$ справедлива гипотеза 4. Полином $F_{p,q}(\nu)$, являющийся дискретным аналогом полинома Фейера, может быть записан в виде

$$F_{p,q}(\nu) = \lambda_0 \prod_{k=1}^{p-1} \left(c\left(\frac{\nu}{q}\right) - c\left(\frac{k\bar{r}}{q}\right) \right), \quad \lambda_0 \geq 0.$$

Рассмотрим четный тригонометрический полином порядка $p-1$

$$t_{p-1}(x, \varphi) = \prod_{k=1}^{p-1} (c(x) - c(k\varphi))$$

переменной x с нулями в точках $\pm k\varphi$, $k = 1, \dots, p-1$, и запишем для него разложение

$$t_{p-1}(x, \varphi) = \frac{1}{2^{p-2}} \left\{ \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k A_k^p(\varphi) c((p-1-k)x) + \frac{1}{2} (-1)^{p-1} A_{p-1}^p(\varphi) \right\},$$

в котором коэффициенты $A_k^p(\varphi)$ являются четными тригонометрическими полиномами переменной φ порядка $m_k = pk - k(k+1)/2$, $k = 0, 1, \dots, p-1$. Для них справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} A_k^p(\varphi) &= A_k^{p-1}(\varphi) + A_{k-2}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi)A_{k-1}^{p-1}(\varphi), \quad k = 1, \dots, p-2, \\ A_{p-1}^p(\varphi) &= 2A_{p-3}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi)A_{p-2}^{p-1}(\varphi), \quad A_0^p(\varphi) = 1, \quad A_{-1}^p(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$B_k^p(\varphi) = A_{k-1}^p(\varphi) + A_k^p(\varphi), \quad k = 1, \dots, p-1, \quad B_0^p(\varphi) = 1, \quad B_{-1}^p(\varphi) = 0.$$

С помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} B_k^p(\varphi) &= B_k^{p-1}(\varphi) + B_{k-2}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi)B_{k-1}^{p-1}(\varphi), \quad k = 1, \dots, p-2, \\ B_{p-1}^p(\varphi) &= B_{p-3}^{p-1}(\varphi) + (1 + 2c((p-1)\varphi))B_{p-2}^{p-1}(\varphi) \end{aligned}$$

доказывается

ЛЕММА 2. Для $k = 1, \dots, p-1$

$$B_k^p(\varphi) = \prod_{\nu=1}^k \frac{s((p-\nu/2)\varphi)}{s((\nu/2)\varphi)}.$$

Так как

$$\frac{\bar{r}}{q} = \frac{lt+u}{p} \mp \frac{1}{pq}, \quad (lt+u, p) = 1, \quad B_k^p\left(\frac{lt+u}{p}\right) = (-1)^k,$$

то нужное равенство справедливо.

ЛЕММА 3. Для $k = 1, \dots, p-1$ выполнено $\operatorname{sgn} B_k^p(\bar{r}/q) = (-1)^k$.

Из этой леммы вытекает, что для $k = 1, \dots, p-1$ для коэффициентов полиномов (6), (7) справедливы неравенства

$$2\gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_{p-1} > 0.$$

Обозначим нулевой коэффициент этих полиномов $\gamma_0 = \gamma_0(p, q)$. Нами доказана

ТЕОРЕМА. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$. Тогда

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\gamma_0(p, q)},$$

экстремальная функция $\varphi_{p,q}(x)$ из теоремы А положительна и убывает на интервале $[0, p/q]$.

Полиномы $\Gamma_{p,q}(\nu)$, $F_{p,q}(\nu)$ могут быть использованы при решении и других экстремальных задач.

Авторы благодарят Д. В. Горбачева за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С. Б. // Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1998. С. 244–245.
2. Горбачев Д. В., Маношина А. С. // Чебышевский сб. (ТГПУ). 2001. Т. 2. С. 31–40.
3. Маношина А. С. // Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., информатика. 2000. Т. 6. № 3. С. 113–116.
4. Горбачев Д. В., Маношина А. С. // Тезисы докл. IV Междун. конф. "Современные проблемы теории чисел и ее приложения" (Тула, 2001). М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 45–46.
5. Горбачев Д. В. // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 346–352.
6. Горбачев Д. В., Маношина А. С. // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 5. С. 688–700.