Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Ширяев, Диссипативные краевые условия для обыкновенных дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 6, 950–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:22:07

ДИССИПАТИВНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. А. Ширяев

В работе [1] Биркгоф развил асимптотические методы для исследования обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка, порожденных выражением

$$l(y) = (-1)^m y^{(m)} + (-1)^{m-2} [p_2(x)y]^{(m-2)} + \dots + p_m(x)y, \quad (1)$$

где функции $p_k(x)$ бесконечно дифференцируемы на $[a, b]$, и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

В частности, он выделил важный класс краевых условий, которые назвал *регулярными*. Оператор, порожденный выражением (1) и регулярными краевыми условиями (2), здесь мы также условимся называть *регулярным*. Отметим, что в определении регулярности участвуют только коэффициенты в линейных формах (2) и не участвуют коэффициенты $p_j(x)$ дифференциального выражения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00712, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1927.2003.1.

Важный результат, установленный Биркгофом, состоял в оценке резольвенты регулярного дифференциального оператора. Оценка получалась, по существу, такой же, как для самосопряженных краевых условий, т.е. условий, при которых оператор L_0 , порожденный выражением $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ самосопряжен. Задача о том, являются ли самосопряженные условия регулярными, оказалась непростой. Она была положительно решена Салафом [2] для четных m и для произвольного порядка Минкиным [3].

В этой заметке рассматривается оператор L_0 , порожденный дифференциальным выражением $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ с областью определения

$$D(L_0) = \{y \in W_2^m[0, 1], U_j(y) = 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Здесь через W_2^m обозначено пространство Соболева.

Краевые условия (2) назовем *диссипативными*, если оператор L_0 является диссипативным, т.е. $\text{Im}(L_0 y, y) \geq 0$.

Целью работы является описание всех диссипативных краевых условий и выяснение вопроса, являются ли такие условия регулярными. Отметим следующий факт: если мы докажем, что диссипативный оператор L_0 регулярен, то произвольный оператор L , порожденный дифференциальным выражением (2) и теми же краевыми условиями, будет регулярен.

1. Описание диссипативных краевых условий. В этом пункте приведены необходимые и достаточные условия диссипативности краевых условий.

Для краткости записи введем векторы-строки:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &:= (y(0), \dots, y^{(m-1)}(0)), & \hat{y}_1 &:= (y(1), \dots, y^{(m-1)}(1)), \\ \hat{y} &:= (\hat{y}_0, \hat{y}_1) = (y(0), \dots, y^{(m-1)}(0), y(1), \dots, y^{(m-1)}(1)). \end{aligned}$$

Через $\hat{y}_0^*$, $\hat{y}_1^*$, $\hat{y}^*$, A^* будем обозначать соответствующие векторы-столбцы и транспонированные матрицы с комплексно сопряженными компонентами, а символ t на месте верхнего индекса будет означать транспонирование вектора или матрицы без комплексного сопряжения компонент. Для обозначения матриц и векторов, компоненты которых комплексно сопряжены исходным, будем ставить сверху черту. То есть, $A^* = \overline{A}^t$.

Заметим, что краевые условия в новых обозначениях можно переписать в виде $A\hat{y}_0^t + B\hat{y}_1^t = 0$, где A и B – матрицы порядка m .

ЛЕММА. *Имеем*

$$2 \text{Im}(L_0 y, y) = \begin{cases} i(-1)^{n+1} [\hat{y}_1 J \hat{y}_1^* - \hat{y}_0 J \hat{y}_0^*], & m = 2n, \\ (-1)^n [\hat{y}_1 K \hat{y}_1^* - \hat{y}_0 K \hat{y}_0^*], & m = 2n - 1, \end{cases}$$

где $(m \times m)$ -матрицы J и K выглядят следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить следующее утверждение, дающее представление об алгебраической структуре диссипативных расширений оператора L_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть краевые условия заданы в форме $A\hat{y}_0^t + B\hat{y}_1^t = 0$, где A и B – матрицы порядка m . Матрицы A и B задают диссипативные краевые условия тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} [\overline{A}(-i(-1)^n J)A^t - \overline{B}(-i(-1)^n J)B^t] &\leq 0 && \text{в четном случае,} \\ [\overline{A}(-1)^n K A^t - \overline{B}(-1)^n K B^t] &\leq 0 && \text{в нечетном случае.} \end{aligned}$$

Можно предложить еще одно описание диссипативных краевых условий для дифференциального выражения $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$. Этот результат является развитием работы Рофе-Бекетова и Холькина [4].

Для удобного выражения формы $\text{Im}(L_0 y, y)$ нам потребуются *квазипроизводные*, отвечающие дифференциальному выражению $l_0(y)$.

В четном случае ($m = 2n$) определим их следующим образом:

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad y^{(0)} = y, \\ y^{[2n-k]} &= -\frac{d}{dt} y^{[2n-k-1]}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Введем обозначения для векторов младших и старших производных:

$$\begin{aligned} y^\wedge &= (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0), y(1), y'(1), \dots, y^{(n-1)}(1))^t, \\ y^\vee &= (y^{[2n-1]}(0), y^{[2n-2]}(0), \dots, y^{[n]}(0), -y^{[2n-1]}(1), -y^{[2n-2]}(1), \dots, -y^{[n]}(1))^t. \end{aligned}$$

Для нечетного случая ($m = 2n - 1$) определение квазипроизводных $y^{[k]}$, отвечающих $l_0(y)$, задается формулами:

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad y^{(0)} = y, \quad y^{[n-1]} = -iy^{(n-1)}, \\ y^{[2n-k-1]} &= -\frac{d}{dt} y^{[2n-k-2]}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} y^\wedge &= (y^{(n-1)}(0) + y^{(n-1)}(1), y(0), y'(0), \dots, y^{(n-2)}(0), y(1), y'(1), \dots, y^{(n-2)}(1))^t, \\ y^\vee &= (iy^{(n-1)}(1) - iy^{(n-1)}(0), y^{[2n-2]}(0), \dots, y^{[n]}(0), -y^{[2n-2]}(1), \dots, -y^{[n]}(1))^t. \end{aligned}$$

Теперь $\text{Im}(L_0 y, y)$ можно записать так:

$$\text{Im}(L_0 y, y) = \frac{1}{2i} (\langle y^\vee, y^\wedge \rangle_m - \langle y^\wedge, y^\vee \rangle_m),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ означает скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор, порожденный $l_0(y) = (-i)^m y^{(m)}$ и краевыми условиями (2), является диссипативным тогда и только тогда, когда найдется такой нерастягивающий оператор V в $\mathbb{C}^m$, что можно переписать эти условия в эквивалентной форме:*

$$(V - I)y^\vee + i(V + I)y^\wedge = 0.$$

2. Диссипативные операторы четного порядка. Напомним определение регулярности краевых условий (см. [1], [5]). Предварительно краевые условия нужно нормировать. Число k_j , $j = 1, \dots, m$, назовем *порядком* краевого условия $U_j(y) = 0$, если это краевое условие содержит $y^{(k_j)}(0)$ или $y^{(k_j)}(1)$, но не содержит $y^{(\nu)}(0)$ и $y^{(\nu)}(1)$ при $\nu > k_j$. Рассмотрим краевые условия порядка $m - 1$, если такие имеются. Заменяя их, если надо, линейными комбинациями, можно добиться того, чтобы число линейно независимых краевых условий порядка $m - 1$ было ≤ 2 . Остальные краевые условия имеют порядок $\leq m - 2$; применяя к ним тот же прием, сведем их число к минимуму и т.д.

Описанные операции называются *нормировкой краевых условий*, а полученные в результате краевые условия называются *нормированными*. Из способа их построения следует, что нормированные краевые условия должны иметь вид:

$$U_j(y) \equiv U_{j0}(y) + U_{j1}(y) = 0, \quad (3)$$

где

$$U_{j0}(y) = \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \sum_{s=0}^{k_j-1} \alpha_{js} y^{(s)}(0), \quad U_{j1}(y) = \beta_j y^{(k_j)}(1) + \sum_{s=0}^{k_j-1} \beta_{js} y^{(s)}(1),$$

$$m-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0, \quad k_j > k_{j+2},$$

причем для каждого значения индекса j хотя бы одно из чисел α_j, β_j отлично от 0.

Отметим, что имеется эквивалентное определение нормированных краевых условий (см. [6]).

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Краевые условия являются нормированными тогда и только тогда, когда их суммарный порядок $\kappa = k_1 + \dots + k_m$ нельзя понизить, переходя к эквивалентным условиям.*

Нормировка краевых условий определяется так же и в нечетном случае, что мы и используем ниже.

Обозначим через ω_j , $j = 1, \dots, m$, различные корни m -й степени из -1 в таком порядке, чтобы выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}(\omega_1 e^{i\pi/(2m)}) < \operatorname{Re}(\omega_2 e^{i\pi/(2m)}) < \dots < \operatorname{Re}(\omega_m e^{i\pi/(2m)}).$$

Пусть $m = 2n$. Нормированные краевые условия (3) называются *регулярными*, если по крайней мере одно из чисел θ_{-1} и θ_1 , определенных равенством

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1 \omega_{n-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) \omega_n^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1) \omega_{n+1}^{k_1} & \beta_1 \omega_{n+2}^{k_1} & \dots & \beta_1 \omega_m^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2 \omega_{n-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) \omega_n^{k_2} & (\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2) \omega_{n+1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{n+2}^{k_2} & \dots & \beta_2 \omega_m^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m \omega_1^{k_m} & \dots & \alpha_m \omega_{n-1}^{k_m} & (\alpha_m + s\beta_m) \omega_n^{k_m} & (\alpha_m + \frac{1}{s}\beta_m) \omega_{n+1}^{k_m} & \beta_m \omega_{n+2}^{k_m} & \dots & \beta_m \omega_m^{k_m} \end{vmatrix},$$

отлично от нуля.

Теперь приведем центральное в этом пункте утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Диссипативный оператор четного порядка ($m = 2n$) является регулярным.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из следующей леммы, представляющей самостоятельный интерес.

ЛЕММА. *Пусть даны диссипативные нормированные краевые условия*

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \beta_j y^{(k_j)}(1) + \dots = 0, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

тогда краевые условия, получаемые отбрасыванием младших производных

$$U_j^{(sa)}(y) = \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \beta_j y^{(k_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

являются самосопряженными.

3. Диссипативные операторы нечетного порядка. Напомним, что в нечетном случае нормированные краевые условия (3) называются *регулярными*, если оба числа θ_0 и θ_1 , определенные равенством

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1 \omega_{n-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) \omega_n^{k_1} & \beta_1 \omega_{n+1}^{k_1} & \dots & \beta_1 \omega_m^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2 \omega_{n-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) \omega_n^{k_2} & \beta_2 \omega_{n+1}^{k_2} & \dots & \beta_2 \omega_m^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m \omega_1^{k_m} & \dots & \alpha_m \omega_{n-1}^{k_m} & (\alpha_m + s\beta_m) \omega_n^{k_m} & \beta_m \omega_{n+1}^{k_m} & \dots & \beta_m \omega_m^{k_m} \end{vmatrix},$$

отличны от нуля. Здесь $m = 2n - 1$.

Диссипативные операторы могут не являться регулярными. Для доказательства этого приведем следующий пример.

ПРИМЕР. Рассмотрим

$$l(y) = (-i)^{2n-1} y^{(2n-1)} = (-1)^n i y^{(2n-1)}.$$

Краевые условия возьмем такими:

$$y_0^{(2n-1)} = y_1^{(2n-1)} = \dots = y_0^{(n+1)} = y_1^{(n+1)} = 0$$

и $y_1^{(n)} = 0$ при четном n ; $y_0^{(n)} = 0$ иначе.

При заданных краевых условиях

$$\operatorname{Im}(L_0 y, y) = |y_k^{(n)}|^2, \quad k = \begin{cases} 1, & n \text{ четно,} \\ 0, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Регулярными такие краевые условия не являются.

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задач, обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birkhoff G.D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 4. P. 373–395.
2. Salaff S. // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. P. 355–373.
3. Минкин А. М. // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 6. С. 335–346.
4. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Мариуполь, 2001.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
6. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.10.2004