Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бутузов, М. А. Терентьев, О сингулярно возмущенной эллиптической краевой задаче в случае неизолированного корня вырожденного уравнения, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 26–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:14:05

УДК 517.956.226

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В СЛУЧАЕ НЕИЗОЛИРОВАННОГО КОРНЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

В. Ф. Бутузов, М. А. Терентьев

Для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения (краевая задача Неймана) доказана теорема о предельном переходе в случае, когда вырожденное уравнение имеет неизолированный корень.

Библиография: 4 названия.

1. Постановка задачи. Предметом рассмотрения в настоящей работе является задача Неймана для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{2p} \Delta u - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n_x}(x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $p > 3/4$ – некоторое число, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Под n_x мы всюду понимаем внутреннюю нормаль к $\partial\Omega$.

Целью работы является изучение асимптотического поведения решения указанной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сформулируем условия, при которых проведено исследование.

УСЛОВИЕ А1. Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ является дважды непрерывно дифференцируемой при $(u, x, \varepsilon) \in \bar{I} \times \bar{\Omega} \times [0, \varepsilon_0]$, где I – некоторый интервал, $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число. Пусть также в случае $N \geq 2$ граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу гладкости C^2 (это требование может быть ослаблено).

Уточним, что мы понимаем здесь под принадлежностью $\partial\Omega$ классу C^2 . Именно, считаем $\partial\Omega \in C^2$, если $\exists \delta > 0$ такое, что в δ -окрестности любой точки $P \in \partial\Omega$ поверхность $\partial\Omega$ допускает однозначное представление вида

$$x^k = \omega(x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^N),$$

где x^k – какая-то из координат, $k = 1, \dots, N$, а функция $\omega(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00487, и РФФИ-ННО, грант № 03-01-04001.

УСЛОВИЕ А2. Пусть уравнение (2) имеет непрерывный при $x \in \overline{\Omega}$ корень $u = \varphi(x)$, причем $\exists$ множество $\Gamma \subseteq \overline{\Omega}$ такое, что

$$\begin{aligned} f_u(\varphi(x), x, 0) &> 0, & \text{если } x \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma, \\ f_u(\varphi(x), x, 0) &= 0, & \text{если } x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду непрерывности $f_u(\varphi(x), x, 0)$ множество Γ является замкнутым. Условие А2 означает, что вне некоторой окрестности Γ корень $\varphi(x)$ является изолированным (с учетом условия А1 еще и C^2 -гладким), а внутри этой окрестности свойство изолированности, как и гладкости, может быть нарушено. Последнее обстоятельство отличает рассматриваемый случай от классической теории [1], в связи с чем введем дополнительное ограничение.

УСЛОВИЕ А3. $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq L \cdot \|x - \xi\|_N$ при $x, \xi \in \overline{\Omega}$ для некоторого $L > 0$ (липшицевость корня $\varphi(x)$). Здесь $\|\cdot\|_N$ – евклидово расстояние в $\mathbb{R}^N$.

Следующие два требования связаны с необходимостью обеспечить устойчивость корня $\varphi(x)$ в окрестности Γ , поскольку классическое условие устойчивости $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ нарушается при $x \in \Gamma$.

УСЛОВИЕ А4. $f_{uu}(\varphi(x), x, 0) > 0$ при $x \in \Gamma$.

УСЛОВИЕ А5. $f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) < 0$ при $x \in \Gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условий А2 и А4 следует, что в некоторой окрестности Γ вырожденное уравнение (2) имеет еще один, и только один, корень, совпадающий с $\varphi(x)$ при $x \in \Gamma$ и меньший $\varphi(x)$ при остальных x . Рассматриваемая ситуация естественным образом возникает в случаях, когда уравнение (2) имеет при $x \in \overline{\Omega}$ два непрерывных корня, пересекающихся при $x \in \Gamma$.

Ниже будет показано, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (1) имеет решение, сходящееся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\varphi(x)$ равномерно на $\overline{\Omega}$ ($u(x, \varepsilon) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in \overline{\Omega}$). Отметим, что случай пересечения корней вырожденного уравнения в сингулярно возмущенной эллиптической задаче изучался ранее в работе [2], причем кривая Γ , на которой корни пересекаются, лежит внутри области Ω . Особенность настоящей работы состоит в том, что в ней рассматривается многомерное обобщение уравнения из [2] с малым параметром в некоторой степени при операторе Лапласа в предположении гладкой зависимости f от ε . Кроме того, множество Γ , в окрестности которого нарушается свойство изолированности корня $\varphi(x)$, может иметь произвольную структуру (поверхности, кривые, точки и др.) и это множество может выходить на границу области Ω .

2. Метод дифференциальных неравенств. Для доказательства существования решения и предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению вырожденного уравнения будет использован метод дифференциальных неравенств. Напомним понятия нижнего и верхнего решений для задачи (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\overline{U}(x, \varepsilon)$ называется соответственно *нижним* и *верхним решениями задачи* (1), если выполнены неравенства

$$1^\circ. L_\varepsilon \underline{U} \equiv \varepsilon^{2p} \Delta \underline{U} - f(\underline{U}, x, \varepsilon) \geq 0 \geq L_\varepsilon \overline{U} \text{ при } x \in \overline{\Omega};$$

$$2^\circ. \frac{\partial \underline{U}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{\partial \overline{U}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) \text{ при } x \in \partial\Omega.$$

Если, кроме того, выполнено неравенство

$$3^\circ. \underline{U}(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon) \text{ при } x \in \overline{\Omega},$$

то $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\overline{U}(x, \varepsilon)$ называются *упорядоченными нижним и верхним решениями*.

Справедлива следующая теорема [3].

ТЕОРЕМА 1. *Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\overline{U}(x, \varepsilon)$ задачи (1), то задача (1) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее при $x \in \overline{\Omega}$ неравенствам*

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon). \quad (3)$$

Наши дальнейшие действия будут состоять в построении подходящей пары функций $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\overline{U}(x, \varepsilon)$, переходящих в $\varphi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для построения нижнего и верхнего решений задачи (1) нам потребуется ввести некоторые функции и процедуру сглаживания, вообще говоря, негладкого решения $\varphi(x)$ вырожденного уравнения (2).

3. Функция $z(x, \gamma)$ и срезающие функции. Пусть $\psi_N(r)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $r \geq 0$, равная $A_N > 0$ при $r = 0$, нулю при $r \geq 1$ и монотонно убывающая при $0 < r < 1$, причем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_N(\|x\|_N^2) dx = 1.$$

Очевидно, такая функция существует, причем $\psi'_N(r) \leq 0$ при $r \geq 0$.

Введем функцию

$$z(x, \gamma) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \equiv \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{1}{\gamma^N} \psi_N\left(\left\|\frac{x - \xi}{\gamma}\right\|_N^2\right) d\xi, \quad (4)$$

где $x \in \overline{\Omega}$, $\gamma > 0$. Свойства этой функции играют решающую роль при получении неравенств 2° для нижнего и верхнего решений. Рассмотрим свойства $z(x, \gamma)$.

Носитель $\text{supp}_\xi K_N(x - \xi, \gamma)$ представляет собой шар радиуса γ с центром в точке x в пространстве $\mathbb{R}^N$. Поэтому интеграл (4) собственный, и функция $z(x, \gamma)$ бесконечно дифференцируема при $x \in \overline{\Omega}$ и $\gamma > 0$. При этом любые ее производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.

Введем δ -окрестность границы $\partial\Omega$:

$$\Xi_\delta(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Как можно заметить, при достаточно малых фиксированных γ функция $z(x, \gamma)$ обращается в нуль при $x \in \overline{\Omega} \setminus \Xi_\delta(\partial\Omega)$ и неотрицательна, но не превосходит единицы при $x \in \overline{\Omega} \cap \Xi_\delta(\partial\Omega)$. Действительно, производя замену переменной $\xi = x - \gamma\zeta$, получаем

$$0 \leq z(x, \gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\gamma^N} \psi_N\left(\left\|\frac{x - \xi}{\gamma}\right\|_N^2\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_N(\|\zeta\|_N^2) d\zeta = 1.$$

Далее, для производной $z(x, \gamma)$ вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$ имеет место следующее представление:

$$\frac{\partial z}{\partial n_x}(x, \gamma) = -\frac{C_0}{\gamma} + \beta(x, \gamma), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где $C_0 > 0$ – некоторая константа, а $\beta(x, \gamma) \Rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$, $x \in \partial\Omega$. Тем самым, $z(x, \gamma)$ убывает при движении точки x от границы внутрь области Ω (γ фиксировано). Докажем (5), для чего введем в рассмотрение полупространство, ограниченное плоскостью, касательной к $\partial\Omega$ в точке x :

$$\Pi_x = \{\xi \in \mathbb{R}^N : (x - \xi, n_x)_N \geq 0\},$$

где n_x – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x , $(\cdot, \cdot)_N$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}_N$. При этом $\partial\Pi_x$ – касательная плоскость к $\partial\Omega$ в точке x , а n_x – внешняя нормаль к $\partial\Pi_x$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial n_x}(x, \gamma) &= (\nabla z, n_x)_N = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{2}{\gamma^{N+2}} \psi'_N \left(\left\| \frac{x - \xi}{\gamma} \right\|_N^2 \right) (x - \xi, n_x)_N d\xi \\ &= \int_{\Pi_x} \dots d\xi + \left[\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \dots d\xi - \int_{\Pi_x} \dots d\xi \right] \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Производя замену переменной $\xi = x - \gamma\zeta$ в интеграле I_1 , получаем

$$I_1 = \frac{2}{\gamma} \int_{(\zeta, n_x)_N \geq 0, \|\zeta\|_N \leq 1} \psi'_N(\|\zeta\|_N^2) (\zeta, n_x)_N d\zeta = -\frac{C_0}{\gamma},$$

где C_0 – положительная константа, поскольку $\psi'_N \leq 0$, а указанный интеграл не зависит от ориентации единичного вектора n_x .

Перейдем к оценке I_2 . Рассмотрим $V_{2\delta} - 2\delta$ -окрестность некоторой точки $x_0 \in \partial\Omega$. Так как граница $\partial\Omega \in C^2$, при достаточно малом δ в окрестности $V_{2\delta}$ она может быть задана уравнением

$$x^k = \omega(x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^N) \equiv \omega(x^*),$$

где $x^* = (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^N)$, а $\omega(x^*)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая функция. Через $V_{2\delta}^*$ обозначим проекцию указанной 2δ -окрестности на соответствующее подпространство координат x^* пространства $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим теперь некоторую точку $y \in \partial\Omega \cap \overline{V}_\delta$. Уравнение касательной плоскости к $\partial\Omega$ в точке y запишем в виде

$$x^k = \pi_y(x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^N) = \pi_y(x^*),$$

где $\pi_y(x^*)$ – линейная функция. Предположим для определенности, что область Ω лежит выше поверхности $\partial\Omega$ относительно направления, определяемого координатной осью x^k . Тогда область $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ лежит ниже $\partial\Omega$ и разность I_2 может быть записана как

$$I_2 = \int_{V_{2\delta}^*} \int_{\pi_y(\xi^*)}^{\omega(\xi^*)} \frac{2}{\gamma^{N+2}} \psi'_N \left(\left\| \frac{y - \xi}{\gamma} \right\|_N^2 \right) (y - \xi, n_y)_N d\xi^k d\xi^*.$$

Производя замену переменных $\xi = y - \gamma\zeta$, получаем

$$I_2 = \frac{2}{\gamma} \int_{\|\zeta^*\|_{N-1} \leq 1} \int_{\pi_y(y^* - \gamma\zeta^*)}^{\omega(y^* - \gamma\zeta^*)} \psi'_N(\|\zeta\|_N^2) (\zeta, n_y)_N d\zeta^k d\zeta^*.$$

Интегрирование по ζ^* сводится к интегрированию по множеству $\|\zeta^*\|_{N-1} \leq 1$, если γ достаточно мало по сравнению с δ (чтобы $\xi^* = (y^* - \gamma\zeta^*) \in \overline{V}_{2\delta}^*$ при $y^* \in \overline{V}_\delta^*$). Отсюда имеем при $y \in \partial\Omega \cap \overline{V}_\delta$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{C_1}{\gamma} \int_{\|\zeta^*\|_{N-1} \leq 1} |\omega(y^* - \gamma\zeta^*) - \pi_y(y^* - \gamma\zeta^*)| d\zeta^* \\ &= \frac{C_1}{\gamma} \int_{\|\zeta^*\|_{N-1} \leq 1} \left| \sum_{i,j \neq k} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}(y^* - \gamma\zeta^* \theta(y^*, \zeta^*)) \cdot \gamma^2 \zeta^i \zeta^j \right| d\zeta^* \leq C_2 \gamma, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – некоторые константы, $0 < \theta(y^*, \zeta^*) < 1$. Здесь мы воспользовались формулой конечных приращений и тем, что уравнение $x^k = \pi_y(x^*)$ задает касательную плоскость.

Далее, ввиду ограниченности Ω ее граница может быть представлена как объединение нескольких частей $\partial\Omega$, каждая из которых лежит в δ -окрестности точки границы. Таким образом, полученная оценка для I_2 справедлива для любых $y \in \partial\Omega$. Представление (5) доказано.

Наконец, дифференцируя $z(x, \gamma)$ под знаком интеграла и совершая замену переменных $\xi = x - \gamma\zeta$ в интегралах, легко получить следующие оценки для производных этой функции:

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x^k}(x, \gamma) \right| \leq \frac{C}{\gamma}, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial \gamma}(x, \gamma) \right| \leq \frac{C}{\gamma}, \quad (6)$$

$$|\Delta z(x, \gamma)| \leq \frac{C}{\gamma^2}, \quad \left| \frac{\partial^2 z}{\partial x^k \partial \gamma}(x, \gamma) \right| \leq \frac{C}{\gamma^2}, \quad \left| \frac{\partial^2 z}{\partial \gamma^2}(x, \gamma) \right| \leq \frac{C}{\gamma^2}, \quad (7)$$

где $x \in \overline{\Omega}$, а буквой C здесь и далее обозначаются подходящие положительные константы. Отметим, что при достаточно малом $\gamma > 0$ все эти производные обращаются в нуль вне некоторой окрестности границы $\partial\Omega$.

Теперь введем так называемые срезающие функции. Они будут использованы при построении нижнего и верхнего решений задачи (1).

Рассмотрим $\Xi_{3\delta/4}(\partial\Omega)$ – $(3\delta/4)$ -окрестность границы $\partial\Omega$ и введем для всех $x \in \overline{\Omega}$ функцию

$$\kappa(x) = \int_{\Xi_{3\delta/4}(\partial\Omega)} K_N(x - \xi, \delta^2) d\xi, \quad (8)$$

где функция K_N определена равенством (4). Очевидно, $\kappa(x)$ является бесконечно дифференцируемой в $\overline{\Omega}$. При достаточно малом $\delta > 0$ эта функция равна единице в $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$, нулю вне δ -окрестности $\partial\Omega$ и изменяется от нуля до единицы в остальной части $\overline{\Omega}$. Это легко усмотреть, если заметить, что носитель подынтегральной функции в (8) есть шар радиуса δ^2 с центром в точке x .

Аналогично функции $\kappa(x)$ введем для множества Γ из условия А2 гладкую функцию

$$\eta(x) = \int_{\Xi_{3\delta/4}(\Gamma)} K_N(x - \xi, \delta^2) d\xi, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

При достаточно малом $\delta > 0$ эта функция равна единице в $(\delta/2)$ -окрестности Γ , нулю вне δ -окрестности Γ и изменяется от нуля до единицы в остальной части $\overline{\Omega}$.

Помимо функции $\eta(x)$ нам потребуется еще функция $\eta_0(x)$, отличающаяся от $\eta(x)$ тем, что в ее определении вместо δ взято $\delta/2$. Свойства $\eta_0(x)$ очевидны.

4. Процедура сглаживания. В построении нижнего и верхнего решений будет использован корень $\varphi(x)$ вырожденного уравнения (2). Однако ввиду условия А2 функция $\varphi(x)$ может оказаться негладкой, тогда как согласно введенному нами определению нижнее и верхнее решения должны быть гладкими функциями. Исправить ситуацию поможет процедура сглаживания $\varphi(x)$. В случае простейшей структуры множества Γ , в окрестности которого может нарушаться свойство гладкости $\varphi(x)$, сглаживание может быть осуществлено различными способами (например, см. [2]). В общем случае сглаживание удобнее производить, опираясь на интегральное усреднение функции [4].

Рассмотрим следующее преобразование функции $\varphi(x)$:

$$\bar{\varphi}(x, \gamma) = \int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) \varphi(\xi) d\xi \cdot \left[\int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \right]^{-1}, \quad (9)$$

где $x \in \bar{\Omega}$, $\gamma > 0$. Отметим свойства введенного преобразования.

Функция $\bar{\varphi}(x, \gamma)$ бесконечно дифференцируема при $x \in \bar{\Omega}$ и $\gamma > 0$, так как числитель и знаменатель в (9) обладают этим свойством, причем

$$\int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \geq A > 0, \quad (10)$$

где A – некоторая константа. Для $x \in \partial\Omega$ это устанавливается по аналогии с оценкой (5), а вне 2γ -окрестности $\partial\Omega$ указанный интеграл равен единице, если γ достаточно мало. Остается рассмотреть 2γ -окрестность $\partial\Omega$. Допустим, что (10) выполняется не для всех x из этой окрестности. Тогда существуют последовательности $\gamma_n \downarrow 0$ и ввиду ограниченности $\bar{\Omega}$ $x_n \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ такие, что

$$\int_{\bar{\Omega}} K_N(x_n - \xi, \gamma_n) d\xi \rightarrow 0,$$

чего не может быть, так как по непрерывности в оценке (10) для точки границы мы получили бы $A = 0$.

Далее, при $x \in \bar{\Omega}$ для функции $\bar{\varphi}(x, \gamma)$ имеет место следующее представление:

$$\bar{\varphi}(x, \gamma) = \varphi(x) + O(\gamma). \quad (11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}(x, \gamma) - \varphi(x)| &= \left| \int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) (\varphi(\xi) - \varphi(x)) d\xi \cdot \left[\int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \right]^{-1} \right| \\ &\leq L \int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) \|x - \xi\|_N d\xi \cdot \left[\int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \right]^{-1} \leq L\gamma; \end{aligned}$$

здесь мы использовали условие А3 (липшицевость $\varphi(x)$) и учли, что $\|x - \xi\|_N \leq \gamma$ при $\xi \in \text{supp}_\varepsilon K_N(x - \xi, \gamma)$.

Несложно получить оценки и для производных функции $\bar{\varphi}(x, \gamma)$ по x . А именно, при $x \in \bar{\Omega}$ и $\gamma > 0$

$$\left| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k}(x, \gamma) \right| \leq C, \quad |\Delta \bar{\varphi}(x, \gamma)| \leq \frac{C}{\gamma}. \quad (12)$$

Докажем, например, оценку первых производных. Для этого заметим, что если $\varphi_0 = 1$, то $\bar{\varphi}_0(x, \gamma) = 1$ и $\partial \bar{\varphi}_0 / \partial x^k = 0$. Тогда, опустив для краткости некоторые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k}(x, \gamma) \right| &= \left| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^k}(x, \gamma) - \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial x^k} \cdot \varphi(x) \right| \\ &\leq 4L \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{\gamma^N} \left| \psi'_N \left(\left\| \frac{x - \xi}{\gamma} \right\|_N^2 \right) \right| d\xi \cdot \left[\int_{\bar{\Omega}} K_N(x - \xi, \gamma) d\xi \right]^{-1} \leq C. \end{aligned}$$

Здесь мы формально взяли производную $\partial \bar{\varphi}_0 / \partial x^k$ от отношения (9) при $\varphi_0 = 1$, а далее опять воспользовались липшицевостью $\varphi(x)$ и тем, что $|x^k - \xi^k| \leq \|x - \xi\|_N \leq \gamma$ при $\xi \in \text{supp}_\xi K_N(x - \xi, \gamma)$. Кроме того, было учтено неравенство (10).

Оценка (12) для $\Delta \bar{\varphi}(x, \gamma)$ доказывается аналогично.

5. Существование и асимптотика решения краевой задачи. Возьмем верхнее решение задачи (1) в виде

$$\bar{U}(x, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) \left[\bar{A} + z \left(x, \varepsilon^{1/2} \frac{\bar{\theta}(x, \varepsilon)}{\bar{a}} \right) \right]. \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) = \bar{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) \eta_0(x) + \varphi(x)(1 - \eta_0(x)) \quad (14)$$

и

$$\bar{\theta}(x, \varepsilon) = 1 \cdot \eta(x) + [\varepsilon^{q-1/2} \kappa(x) + \varepsilon^{1/2}(1 - \kappa(x))](1 - \eta(x)),$$

где $q = \min(p, 1)$. Числа $\bar{A} > 0$ и $\bar{a} > 0$ будут выбраны ниже.

Очевидно, функции $\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2})$ и $\bar{\theta}(x, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемы по x при $x \in \bar{\Omega}$. Пользуясь свойствами срезающих функций, нетрудно заметить, что $\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon)$ равно $\varepsilon^{1/2}$ в $(\delta/2)$ -окрестности Γ , равно ε^q в $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$, но вне δ -окрестности Γ , равно ε вне δ -окрестностей Γ и $\partial\Omega$ и, наконец, гладким образом меняется в остальной части $\bar{\Omega}$, принимая значения от ε до $\varepsilon^{1/2}$. Кроме того, производные по x от функции $\bar{\theta}(x, \varepsilon)$ ограничены при $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим подробнее функцию $\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2})$. Пользуясь оценками (12) и свойствами функции $\eta_0(x)$, можно получить, что при $x \in \partial\Omega$

$$\left| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_x}(x, \varepsilon^{1/2}) \right| \leq C,$$

где $C > 0$. В $(\delta/2)$ -окрестности Γ имеем $|\Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2})| \leq C\varepsilon^{-1/2}$, однако вне этой окрестности $\Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) = \Delta \varphi(x) = O(1)$.

Теперь получим оценки для производных функции

$$\bar{w}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) z \left(x, \frac{\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon)}{\bar{a}} \right).$$

Для производной по нормали n_x при $x \in \partial\Omega$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n_x} z \left(x, \varepsilon^{1/2} \frac{\bar{\theta}(x, \varepsilon)}{\bar{a}} \right) + \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) \frac{\partial z}{\partial n_x} \\ &+ \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) \frac{\partial z}{\partial \gamma} \varepsilon^{1/2} \bar{a}^{-1} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n_x} = \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) \frac{\partial z}{\partial n_x} + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\partial z / \partial \gamma = O(\gamma^{-1})$ и $\gamma = \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) / \bar{a}$. В силу представления (2.2) имеем $\partial z / \partial n_x = -\bar{a} C_0 / (\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon)) + \beta(x, \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) / \bar{a})$, откуда получаем

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) = -\bar{a} C_0 + o(1), \quad x \in \partial\Omega. \quad (15)$$

Далее, можно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta \bar{w}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \Delta \bar{\theta} \cdot z + 2\varepsilon^{1/2} (\nabla \bar{\theta}, \nabla z + z'_\gamma \varepsilon^{1/2} \bar{a}^{-1} \nabla \bar{\theta})_N \\ &+ \varepsilon^{1/2} \bar{\theta} [\Delta z + 2\varepsilon^{1/2} \bar{a}^{-1} (\nabla z, \nabla \bar{\theta})_N + z''_{\gamma\gamma} \varepsilon \bar{a}^{-2} (\nabla \bar{\theta}, \nabla \bar{\theta})_N + z'_\gamma \varepsilon^{1/2} \bar{a}^{-1} \Delta \bar{\theta}], \end{aligned}$$

где операторы ∇ и Δ действуют на функцию $z(x, \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) / \bar{a})$ только по первому ее аргументу x . Воспользовавшись теперь оценками (6) и (7) при $\gamma = \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) / \bar{a}$, получаем

$$\Delta \bar{w}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \bar{\theta}^{-1} [(\varepsilon^{1/2} \bar{\theta})^2 \Delta z + O(\varepsilon^{1/2})] \equiv \varepsilon^{-1/2} \bar{\theta}^{-1}(x, \varepsilon) \bar{a}^2 \Psi(x, \varepsilon).$$

Здесь $\Psi(x, \varepsilon)$ имеет порядок $O(1)$ в $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$ и равна нулю в остальной части Ω , если ε достаточно мало по сравнению с δ .

Перейдем к проверке дифференциальных неравенств 1° и 2° для верхнего решения.

Граничное неравенство 2°, очевидно, выполнено, так как в силу (15)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_x} + \varepsilon^{1/2} \bar{A} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n_x} - \bar{a} C_0 + o(1) \leq 0,$$

если $\bar{a}$ достаточно велико, а ε достаточно мало.

Действуя оператором L_ε на верхнее решение, получаем

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{U}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{2p} \Delta \bar{U} - f(\bar{U}, x, \varepsilon) \\ &= \varepsilon^{2p} \Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{2p+1/2} \bar{A} \Delta \bar{\theta}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{2p} \Delta \bar{w}(x, \varepsilon) \\ &\quad - f(\varphi(x), x, 0) - f_u(\varphi(x), x, 0) [\varepsilon^{1/2} \sigma(x, \varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{1/2} \bar{A} \bar{\theta}(x, \varepsilon) + \bar{w}(x, \varepsilon)] \\ &\quad - \frac{1}{2} f_{uu}(\varphi(x), x, 0) [\varepsilon^{1/2} \sigma(x, \varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{1/2} \bar{A} \bar{\theta}(x, \varepsilon) + \bar{w}(x, \varepsilon)]^2 \\ &\quad + o([\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}]^2) - f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) \varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\sigma(x, \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{-1/2} (\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) - \varphi(x)) = \varepsilon^{-1/2} \eta_0(x) (\bar{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) - \varphi(x)).$$

Таким образом,

$$\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) = \varphi(x) + \varepsilon^{1/2} \sigma(x, \varepsilon^{1/2}).$$

Из представления (11) и свойств функции $\eta_0(x)$ вытекает, что $\sigma(x, \varepsilon^{1/2})$ имеет порядок $O(1)$ в $(\delta/2)$ -окрестности Γ и равна нулю в остальной части $\bar{\Omega}$, если δ достаточно мало.

Заметим, что $2p-1/2 \geq 1$ (так как $p > 3/4$). Поэтому для всех x из $(\delta/2)$ -окрестности Γ имеем $\bar{\theta}(x, \varepsilon) = 1$ и

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{U}(x, \varepsilon) &\leq -\frac{1}{2} f_{uu}(\varphi(x), x, 0) \varepsilon [\bar{A} + \sigma(x, \varepsilon^{1/2})]^2 \\ &\quad + \varepsilon^{2p-1/2} [\varepsilon^{1/2} \Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) + \bar{a}^2 \Psi(x, \varepsilon)] - \varepsilon f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) + o(\varepsilon) \leq 0, \end{aligned}$$

если $\bar{A}$ достаточно велико, а ε достаточно мало, так как $f_u(\varphi(x), x, 0) \geq 0$ и $f_{uu}(\varphi(x), x, 0) > 0$ при достаточно малом δ (выполнение неравенства $f_{uu} > 0$ (условие А4) в некоторой $(\delta/2)$ -окрестности Γ обеспечивается замкнутостью Γ).

Вне $(\delta/2)$ -окрестности Γ , но в $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$ имеем $f_u(\varphi(x), x, 0) > \text{const} > 0$, а также $\sigma(x, \varepsilon^{1/2}) = 0$ и $\Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) = \Delta \varphi(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{U}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{2p-1/2} \bar{\theta}^{-1}(x, \varepsilon) \bar{a}^2 \Psi(x, \varepsilon) \\ &\quad - f_u(\varphi(x), x, 0) \varepsilon^{1/2} \bar{\theta}(x, \varepsilon) \left[\bar{A} + z \left(x, \varepsilon^{1/2} \frac{\bar{\theta}(x, \varepsilon)}{\bar{a}} \right) \right] \\ &\quad + o(\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}) - \varepsilon f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) + o(\varepsilon) \\ &= -\varepsilon^{-1/2} \bar{\theta}^{-1}(x, \varepsilon) [-\varepsilon^{2p-1} \bar{a}^2 \Psi(x, \varepsilon) \\ &\quad + f_u(\varphi(x), x, 0) \bar{\theta}^2 \bar{A} + O(\bar{\theta}^2) + o(\bar{\theta}^2)] \leq 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом $\bar{A}$ и достаточно малых ε в силу независимости $O(\bar{\theta}^2)$ от $\bar{A}$. Здесь мы воспользовались тем, что $\kappa(x) = 1$ в $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$, откуда $\varepsilon^{2p-1} \bar{a}^2 \times \Psi(x, \varepsilon) = O(\bar{\theta}^2)$. Учтено также, что $\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2} \bar{\theta})$.

Наконец, вне $(\delta/2)$ -окрестности Γ и вне $(\delta/2)$ -окрестности $\partial\Omega$ $\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^{1/2}) = \varphi(x)$, $\bar{w}(x, \varepsilon) = 0$ и опять выполнено неравенство $f_u(\varphi(x), x, 0) > \text{const} > 0$, так что

$$L_\varepsilon \bar{U}(x, \varepsilon) = -f_u(\varphi(x), x, 0) \varepsilon^{1/2} \bar{\theta} \bar{A} + o(\varepsilon^{1/2} \bar{\theta}) - \varepsilon f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) + o(\varepsilon) \leq 0$$

при достаточно большом $\bar{A}$ и достаточно малых ε (здесь мы снова учли оценку $\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2} \bar{\theta})$).

Тем самым, операторное неравенство из 1° для $\bar{U}$ выполняется для всех $x \in \bar{\Omega}$ при достаточно большом $\bar{A}$ и достаточно малых ε . Отметим, что $\bar{U}(x, \varepsilon) \geq \varphi(x)$ также при достаточно большом $\bar{A}$ и достаточно малых ε .

Нижнее решение задачи (1) возьмем в виде

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^\alpha) - \varepsilon^\alpha \underline{\theta}(x, \varepsilon) \left[\underline{A} + z \left(x, \varepsilon^\alpha \frac{\underline{\theta}(x, \varepsilon)}{\underline{a}} \right) \right]. \quad (16)$$

Здесь

$$\underline{\theta}(x, \varepsilon) = 1 \cdot \eta(x) + [\varepsilon^{q-\alpha} \kappa(x) + \varepsilon^{1-\alpha} (1 - \kappa(x))](1 - \eta(x)),$$

где $\alpha = \min(p - 1/4, 1)$, $q = \min(p, 1)$. Функция $\tilde{\varphi}(x, \varepsilon^\alpha)$ определяется аналогично функции (14). Числа $\underline{A} > 0$ и $\underline{a} > 0$ будут выбраны ниже.

Как и в случае с верхним решением, граничное неравенство из 2° для нижнего решения, очевидно, выполняется

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial n_x}(x, \varepsilon) = \underline{a}C_0 + O(1) \geq 0,$$

если $\underline{a}$ достаточно велико и ε достаточно мало.

Результат действия оператора L_ε на нижнее решение имеет вид

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{2p} \Delta \underline{U} - f(\underline{U}, x, \varepsilon) \\ &= \varepsilon^{2p} \Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^\alpha) - \varepsilon^{2p+\alpha} \underline{A} \Delta \underline{\theta}(x, \varepsilon) - \varepsilon^{2p} \Delta \underline{w}(x, \varepsilon) - f(\varphi(x), x, 0) \\ &\quad + f_u(\varphi(x), x, 0)[\varepsilon^\alpha \sigma(x, \varepsilon^\alpha) + \varepsilon^\alpha \underline{A} \underline{\theta}(x, \varepsilon) + \underline{w}(x, \varepsilon)] \\ &\quad + O([\varepsilon^\alpha \underline{\theta}]^2) - f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0)\varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\underline{w}(x, \varepsilon) = \varepsilon^\alpha \underline{\theta}(x, \varepsilon) z(x, \varepsilon^\alpha \underline{\theta}(x, \varepsilon) / \underline{a})$.

Неравенство $f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) < 0$ из условия А5 сохраняется в некоторой $(\delta/2)$ -окрестности Γ ввиду замкнутости Γ . Так как $\alpha = \min(p - 1/4, 1)$ и $p > 3/4$, то $2p - \alpha > 1$, $2\alpha > 1$ и, следовательно, порядок слагаемого $-f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0)\varepsilon$ ниже, чем порядок членов $\varepsilon^{2p} \Delta \tilde{\varphi}(x, \varepsilon^\alpha) - \varepsilon^{2p} \Delta \underline{w}(x, \varepsilon)$ и $O([\varepsilon^\alpha \underline{\theta}]^2)$. Поэтому для всех x из $(\delta/2)$ -окрестности Γ получаем

$$L_\varepsilon \underline{U}(x, \varepsilon) \geq -\varepsilon f_\varepsilon(\varphi(x), x, 0) + o(\varepsilon) \geq 0,$$

если $\underline{A}$ достаточно велико (чтобы слагаемое, содержащее множитель f_u , было неотрицательно), а ε достаточно мало.

Вне $(\delta/2)$ -окрестности Γ справедливость операторного неравенства $L_\varepsilon \underline{U}(x, \varepsilon) \geq 0$ устанавливается аналогично тому, как это делалось для верхнего решения, при условии, что $\underline{A}$ берется достаточно большим, а ε — достаточно малым. При этом же условии получается неравенство $\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \varphi(x)$, откуда $\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon)$.

Таким образом, построены упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1). Следовательно, решение задачи (1) существует и его можно оценить, пользуясь неравенствами (3) и видом верхнего и нижнего решений (13), (16). А именно, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задача (1) для $p > 3/4$ удовлетворяет условиям А1–А5. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ эта задача имеет решение $u(x, \varepsilon)$, причем для него справедливо следующее асимптотическое представление:

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \Phi(x, \varepsilon), \quad (17)$$

где $\Phi(x, \varepsilon)$ имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ в некоторой δ -окрестности Γ , $O(\varepsilon^q)$ при $q = \min(p, 1)$ в некоторой δ -окрестности $\partial\Omega$, но вне δ -окрестности Γ , и, наконец, $O(\varepsilon)$ в остальной части $\overline{\Omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (17) следует, что $u(x, \varepsilon) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in \overline{\Omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результат (17) можно получить и для задачи (1) с неоднородным граничным условием III рода (допускающим применение метода дифференциальных неравенств). Доказательство при этом практически не изменится.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выбор $p > 3/4$ связан с гладкой зависимостью f от ε . Нетрудно показать, что если $0 < p \leq 3/4$, то верхнее решение задачи (1) может быть построено в виде (13), где вместо $1/2$ нужно взять $\beta = 2p/3$. Однако нижнее решение не удастся построить в виде (16), поскольку не существует такого α , для которого одновременно выполнялись бы неравенства $2p - \alpha > 1$ и $2\alpha > 1$ (для выполнения этих неравенств необходимо $p > 3/4$). Поэтому случай $0 < p \leq 3/4$ требует отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [2] Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R. Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange of stabilities // J. Differential Equations. 2001. V. 169. P. 373–395.
- [3] Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York–London: Plenum Press, 1992.
- [4] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит, 1996.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
06.04.2004