Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Даурцева, О многообразии почти комплексных структур, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 66–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:54:24

О МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

Н. А. Даурцева

Пусть (M, g_0) – гладкое замкнутое риманово многообразие четной размерности $2n$, допускающее почти комплексную структуру. В настоящей работе показано, что пространство $\mathcal{A}^+$ всех почти комплексных структур на M , задающих ту же ориентацию, что и фиксированная почти комплексная структура J_0 , является гладким локально тривиальным расслоением над пространством $\mathcal{A}\mathcal{O}_{g_0}^+$ ортогональных относительно g_0 почти комплексных структур, задающих ту же ориентацию, что и J_0 .

Библиография: 6 названий.

1. Введение. На симплектическом многообразии (M, ω) естественно рассматривать такие почти комплексные структуры и римановы метрики, которые согласованы с формой ω . Почти комплексная структура (в дальнейшем ПКС) J на M называется *положительно ассоциированной с симплектической формой ω* , если для любых векторных полей X, Y на M выполняются условия $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и $\omega(X, JX) > 0$, если $X \neq 0$. Каждая такая ПКС J определяет риманову метрику g на M равенством $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, которая также называется *ассоциированной*.

Обозначим символами $\mathcal{A}\omega^+$ и $\mathcal{A}\mathcal{M}_\omega$ бесконечномерные пространства всех гладких положительно ассоциированных ПКС и, соответственно, ассоциированных метрик на M . Формула $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими пространствами.

Хорошо известно, что пространство $\mathcal{A}\mathcal{M}_\omega$ является ретрактом пространства $\mathcal{M}$ всех римановых метрик. Пусть $g' \in \mathcal{M}$ – любая метрика. Существует единственный ко-симметрический автоморфизм A касательного расслоения TM такой, что $\omega(X, Y) = g'(AX, Y)$. Тогда легко проверить, что $J = (-A^2)^{-1/2} A$ является положительной ассоциированной почти комплексной структурой, а $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ – ассоциированной метрикой, соответствующей структуре J .

Приведенная конструкция определяет проекцию $p_\omega: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{M}_\omega$, $p_\omega(g') = g$. В работе [1] показано, что эта проекция является гладким тривиальным расслоением, причем слои состоят из римановых метрик, эрмитовых относительно ПКС J , соответствующей метрике $g \in \mathcal{A}\mathcal{M}_\omega$. В связи с этим результатом естественно поставить вопрос об аналогичном разложении пространства $\mathcal{A}^+$ всех почти комплексных структур, задающих фиксированную на M ориентацию. Оказывается, что построить проекцию $q_\omega: \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}\omega^+$ аналогичным образом, когда слоем является пространство g ортогональных ПКС, не удастся. Однако нетрудно заметить, что локально пространство всех почти комплексных структур раскладывается в прямое произведение ортогональных ПКС

и ассоциированных ПКС. Поэтому можно пытаться построить проекцию пространства $\mathcal{A}^+$ на пространство $\mathcal{A}\theta_{g_0}^+$ ортогональных ПКС относительно фиксированной метрики, слою которой были бы пространствами положительно ассоциированных метрик. Данная работа посвящена построению именно этой проекции. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пространство почти комплексных структур $\mathcal{A}^+$ имеет структуру бесконечномерного расслоения над пространством $\mathcal{A}\theta_{g_0}^+$ ортогональных относительно g_0 почти комплексных структур. При этом слоем над ортогональной ПКС структурой J является множество всех почти комплексных структур, положительно ассоциированных с невырожденной формой $\omega_J(X, Y) = g_0(JX, Y)$.*

Идея доказательства заключается в следующем. Рассмотрим сначала проекцию пространства $\mathcal{A}^+$ на пространство невырожденных кососимметрических 2-форм $\Gamma(\Lambda^2 M)$:

$$\mathcal{A}^+ \rightarrow \Gamma(\Lambda^2 M), \quad J \rightarrow \omega_J, \quad \text{где } \omega_J(X, Y) = \frac{1}{2}(g_0(JX, Y) - g_0(X, JY)).$$

Затем с каждой невырожденной 2-формой ω_J свяжем ортогональную ПКС J_1 по формуле $J_1 = (-B^2)^{-1/2}B$, где B такой эндоморфизм, что $\omega_J(X, Y) = g_0(BX, Y)$.

Этот результат развивает известный факт о стягиваемости $GL^+(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$ на $SO(2n)/U(n)$ [2].

2. Необходимые понятия и факты. Пусть M – гладкое замкнутое многообразие размерности $2n$. Почти комплексной структурой на M называется поле эндоморфизмов $J_x: T_x M \rightarrow T_x M$, гладко зависящее от $x \in M$ и удовлетворяющее следующему свойству $J_x^2 = -\text{Id}_x$, где Id_x – тождественный эндоморфизм $T_x M$.

Предположим, что M почти эрмитово, т.е. на нем задана ПКС J_0 и риманова метрика g_0 , инвариантная относительно J_0 . Фундаментальная форма ω определяется равенством $\omega(X, Y) = g_0(J_0 X, Y)$ для любой пары векторных полей X, Y , касательных к M .

Пусть $\text{End}(TM)$ – расслоение эндоморфизмов касательного расслоения TM . Символ Γ будет обозначать пространство гладких сечений расслоений. В частности, $\Gamma(\text{End}(TM))$ – пространство гладких сечений эндоморфизмов расслоения TM . Пусть

$$\mathcal{A} = \{J \in \Gamma(\text{End}(TM)) : J^2 = -\text{Id}\}$$

– пространство всех гладких ПКС на M , а $\mathcal{A}^+$ – пространство всех $J \in \mathcal{A}$, задающих ту же ориентацию на M , что и J_0 . Пространство $\mathcal{A}$ является гладким бесконечномерным многообразием Фреше. Касательное пространство $T_J \mathcal{A}$ состоит из всех эндоморфизмов $P \in \Gamma(\text{End}(TM))$, антикоммутирующих с J : $PJ = -JP$. Если $\text{End}_{AJ}(TM)$ – расслоение эндоморфизмов, антикоммутирующих с J , то $T_J \mathcal{A} = \Gamma(\text{End}_{AJ}(TM))$. Для параметризации $\mathcal{A}$ воспользуемся следующей известной конструкцией. Пусть $P \in \Gamma(\text{End}_{AJ}(TM))$ и $1 - P$ обратим. Координатные карты на $\mathcal{A}$ в окрестности $U(J) = \{J_1 \in \mathcal{A} : 1 - J_1 J \text{ – изоморфизм } TM\}$ элемента $J \in \mathcal{A}$ определяются следующим образом:

$$\Phi: \Gamma(\text{End}_{AJ}(TM)) \rightarrow \mathcal{A}, \quad P \rightarrow J(1 + P)(1 - P)^{-1}. \quad (1)$$

Форма ω позволяет выделить в $\mathcal{A}$ следующее подмножество:

$$\mathcal{A}_\omega = \{J \in \mathcal{A} : \omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \forall X, Y \in \Gamma(TM)\}.$$

В зависимости от знакоопределенности квадратичной формы $j(X) = \omega(X, JX)$ множество $\mathcal{A}_\omega$ распадается на три подмножества $\mathcal{A}_\omega^+$, $\mathcal{A}_\omega^-$, $\mathcal{A}_\omega^\pm$ всех $J \in \mathcal{A}_\omega$, для которых j определена положительно, отрицательно и знаконеопределена, соответственно. Множество $\mathcal{A}_\omega^+$ представляется наиболее интересным, так как каждая ПКС $J \in \mathcal{A}_\omega^+$ единственным образом связана с римановой метрикой $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$, т.е. $\mathcal{A}_\omega^+$ связано с пространством ассоциированных метрик $\mathcal{AM}_\omega$ [3].

Посредством конструкции (1) на $\mathcal{A}_\omega^+$ также вводится структура многообразия [4]. В качестве модельного пространства берется пространство $\Gamma(\text{End}_{AJ_0}^+(TM))$ всех гладких эндоморфизмов TM , антикоммутирующих с J_0 и симметричных относительно g_0 . Тогда $T_J \mathcal{A}_\omega^+ = \Gamma(\text{End}_{AJ}^+(TM))$.

Наличие римановой структуры g_0 позволяет выделить в $\mathcal{A}(M)$ класс ортогональных ПКС:

$$\mathcal{AO}_{g_0} = \{J \in \mathcal{A} : g_0(JX, JY) = g_0(X, Y) \forall X, Y \in \Gamma(TM)\}.$$

Пространство $\mathcal{AO}_{g_0}$ также является гладким бесконечномерным многообразием Фреше. Касательное пространство $T_J \mathcal{AO}_{g_0}$ состоит из всех гладких эндоморфизмов, антикоммутирующих с J и кососимметрических относительно метрики g_0 . Расслоение таких эндоморфизмов обозначим $\text{End}_{AJ}^-(TM)$. Тогда $T_J \mathcal{AO}_{g_0} = \Gamma(\text{End}_{AJ}^-(TM))$. Пространство $\mathcal{AO}_{g_0}$ состоит из пространства $\mathcal{AO}_{g_0}^+$ ортогональных ПКС, задающих ту же ориентацию, что и J_0 , и из $\mathcal{AO}_{g_0}^-$ ортогональных ПКС, задающих противоположную ориентацию.

Параметризуем $\mathcal{AO}_{g_0}^+$ посредством (1). Отображение Φ будет гомеоморфизмом, если $\det(1 - P) > 0$ во всех точках $x \in M$.

3. Доказательство теоремы. Поскольку мы имеем дело с пространствами сечений гладких расслоений, достаточно провести доказательство в произвольной точке $x \in M$. Рассмотрим множество почти комплексных структур в точке, т.е. действующих на $(T_x M, g(x))$. Выбор ортонормированного базиса в $T_x M$ позволяет отождествить $(T_x M, g(x))$ со стандартным евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ и плоской метрикой $g_0: ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2$. Пусть также J_0 и ω стандартные комплексная структура и симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$. Пространство всех комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$ обозначим как A . Известно [5], что существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством A и однородным пространством $GL(2n, \mathbb{R}^{2n})/GL(n, \mathbb{C})$, $\dim A = (2n)^2 - n^2 = 2n^2$. Известно также, что $A_\omega^+ = Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$, $\dim A_\omega^+ = n^2 + n$ и $AO_{g_0}^+ = SO(2n)/U(n)$, $\dim AO_{g_0}^+ = n^2 - n$. Заметим, что $\dim A = \dim A_\omega^+ + \dim AO_{g_0}^+$.

ЛЕММА 1. Имеем $A_\omega^+ \cap AO_{g_0}^+ = \{J_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует $J \in A_\omega^+ \cap AO_{g_0}^+$, отличная от J_0 ; тогда $\exists K \in \Gamma(\text{End}_{AJ_0}^+(TM))$, $1 - K^T K > 0$, такой, что $J = (1 - K)J_0(1 - K)^{-1}$. Тогда принадлежность $J \in AO_{g_0}^+$ дает следующую логическую цепочку:

$$J^T J = 1 \iff J^T = -J \iff K = 0 \implies J = J_0.$$

Возьмем произвольную ассоциированную [4] с ω риманову метрику $g \in AM_\omega$ на $\mathbb{R}^{2n}$. Пусть AO_g^+ – пространство комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, ортогональных относительно выбранного скалярного произведения g . Если выбрать $J \in AO_g^+$, то фундаментальная форма $\omega_J(X, Y) = g(JX, Y)$ не совпадает с ω . Пусть $A_{\omega_J}^+$ – пространство комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, инвариантных и положительных относительно ω_J , A^+ – пространство комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, задающих ту же ориентацию, что и J_0 . Тогда $\forall J \in AO_g^+$ имеет место следующее разложение:

$$T_J A^+ = T_J A_{\omega_J}^+ \oplus T_J AO_g^+.$$

Возникает естественный вопрос о возможности представить A^+ в виде расслоения. Другими словами, существует ли проекция

- 1) $\pi: A^+ \rightarrow A_{\omega}^+$ такая, что $\forall J \in A_{\omega}^+ : \pi^{-1}(J) = AO_g^+$, где $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, или
- 2) $\pi: A^+ \rightarrow AO_{g_0}^+$ такая, что $\forall J \in AO_{g_0}^+ : \pi^{-1}(J) = A_{\omega_J}^+$, где $\omega_J(X, Y) = g_0(JX, Y)$?

Напомним, что $\forall B \in GL(n, \mathbb{R})$ существует полярное разложение [6] на симметрическую, положительно определенную S и ортогональную O относительно фиксированной стандартной метрики g матрицы: $B = S \cdot O$.

ЛЕММА 2. *Для произвольной почти комплексной структуры $J \in A^+$ существует ортогональная почти комплексная структура $J_1 \in AO_{g_0}^+$ такая, что J лежит в ее окрестности $J \in U(J_1)$, т.е. существует $K \in \text{End}_{A_{J_1}}(TM)$, $\det(1 - K) > 0$ такой, что $J = (1 - K)J_1(1 - K)^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\forall J \in A^+$ существует $B \in GL(2n, \mathbb{R})$, $\det B > 0$, такой, что $J = BJ_0B^{-1}$; это значит, что для J найдутся симметрическая положительно определенная матрица S и $O \in SO(2n)$ такие, что $J = S \cdot O \cdot J_0 O^{-1} S^{-1}$. Пусть $J_1 = OJ_0O^{-1}$ – ортогональная ПКС, соответствующая $O \in SO(2n)$. Представим S как сумму коммутирующей с J_1 и антикоммутирующей с J_1 матриц: $B_1 = \frac{1}{2}(S - J_1 S J_1)$ и $B_2 = \frac{1}{2}(S + J_1 S J_1)$. Поскольку S и $-J_1 S J_1 = J_1 S J_1^{-1}$ положительно определены, то $B_1 = S - J_1 S J_1$ обратима. Тогда

$$\begin{aligned} J &= (B_1 + B_2)OJ_0O^{-1}(B_1 + B_2)^{-1} = (1 + B_2B_1^{-1})B_1J_1B_1^{-1}(1 + B_2B_1^{-1})^{-1} \\ &= [B_1J_1 = J_1B_1] = (1 + B_2B_1^{-1})J_1(1 + B_2B_1^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $J = (1 - K)J_1(1 - K)^{-1}$, где $K = -B_2B_1^{-1} = -(S + J_1 S J_1)(S - J_1 S J_1)^{-1}$, т.е. $J \in U(J_1)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку матрица B , соответствующая J , определяется не однозначно, то J может принадлежать окрестностям различных ортогональных ПКС. В связи с тем, что $A_{\omega_{J_1}}^+ \subset U(J_1)$, возникают вопросы: можно ли среди тех $J_1 \in AO_{g_0}^+$, окрестности которых содержат J , найти такую, в которой $J \in A_{\omega_{J_1}}^+$?

Однозначный выбор такого $J_1 \in AO_{g_0}^+$ для произвольной ПКС $J \in A^+$ позволяет осуществить конструкция, аналогичная [1]. Пусть $J \in A^+$; ей соответствует невырожденная кососимметрическая 2-форма $\omega_J(X, Y) = \frac{1}{2}(g_0(JX, Y) - g_0(X, JY))$. Она невырождена, так как является фундаментальной для метрики $g(X, Y) = \frac{1}{2}(g_0(X, Y) + g_0(JX, JY))$. Форма определяет кососимметрический эндоморфизм $B: \omega_J(X, Y) =$

$g_0(BX, Y)$. Определим почти комплексную структуру $J_1 = (-B^2)^{-1/2}B$. Она ортогональна относительно g_0 :

$$g_0((-B^2)^{-1/2}BX, (-B^2)^{-1/2}BY) = g_0(X, -B(-B^2)^{-1/2}(-B^2)^{-1/2}BY) = g_0(X, Y)$$

и задает ту же ориентацию, что и J_0 . Сопоставим J_1 фундаментальную форму $\omega_{J_1}(X, Y) = g_0(J_1X, Y)$. Поскольку J и B^2 коммутируют, из этого следует, что J лежит в $A_{\omega_{J_1}}^+$:

$$\begin{aligned} \omega_{J_1}(JX, JY) &= g_0(B(-B^2)^{-1/2}JX, JY) = \omega_J((-B^2)^{-1/2}JX, JY) \\ &= \frac{1}{2}(g_0(-(-B^2)^{-1/2}X, JY) + g_0(J(-B^2)^{-1/2}X, Y)) = \omega_{J_1}(X, Y). \end{aligned}$$

Таким образом, существует проекция $\pi: A^+ \rightarrow AO_{g_0}^+$ такая, что $\pi(J) = J_1 \in AO_{g_0}^+$ и $J \in A_{\omega_{J_1}}^+$ для любого $J \in A^+$. Обратно, если $J \in A_{\omega_{J_1}}^+$ для некоторого $J_1 \in AO_{g_0}^+$, то $\exists K \in \text{End}_{AJ_1}^+(TM)$, $1 - K^TK > 0$, такой, что $J = (1 - K)J_1(1 - K)^{-1}$. Тогда

$$\omega_J(X, Y) = g_0\left(\frac{1}{2}((1 - K)J_1(1 - K)^{-1} + (1 - K)^{-1}J_1(1 - K))X, Y\right),$$

поэтому соответствующий J эндоморфизм

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}((1 - K)J_1(1 - K)^{-1} + (1 - K)^{-1}J_1(1 - K)), \\ (-B^2)^{-1/2} &= 2((1 - K)(1 + K)^{-1} + (1 - K)^{-1}(1 + K))^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку для указанного B имеет место равенство $(-B^2)^{-1/2}B = J_1$, то почти комплексная структура J из $A_{\omega_{J_1}}^+$ проектируется именно на J_1 . Это значит, что слой расслоения $(A, AO_{g_0}^+, \pi)$ является $A_{\omega_{J_1}}^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пространство A^+ является гладким локально тривиальным расслоением над $AO_{g_0}^+$. Слой над элементом $J \in AO_{g_0}^+$ служит пространством $A_{\omega_J}^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу изложенных выше соображений достаточно показать локальную тривиальность. Пусть $UO(J) = U(J) \cap AO_{g_0}^+$; тогда будем рассматривать $\cup_{J \in AO_{g_0}^+} UO(J)$ в качестве покрытия $AO_{g_0}^+$. Окрестность $UO(J)$ параметризуется $\text{End}_{AJ}^-(TM)$. В качестве карт можно использовать следующие отображения:

$$\begin{aligned} \varphi_J: \text{End}_{AJ}^-(TM) \times A_{\omega_J}^+ &\rightarrow A^+, \quad (K, J_1) \rightarrow J_2, \\ J_2 &= (1 - K^2)^{-1/2}(1 - K)J_1(1 - K)^{-1}(1 - K^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что почти комплексная структура J_2 лежит в $A_{\omega_{J'}}^+$, где $J' = (1 - K)J(1 - K)^{-1}$. Поэтому слой A_{ω_J} отображается на $A_{\omega_{J'}}$. Обратно, произвольной $J_2 \in A_{\omega_{J'}}$ соответствует $J_1 = (1 - K^2)^{1/2}(1 - K)^{-1}J_2(1 - K)(1 - K^2)^{-1/2} \in A_{\omega_J}^+$, где K соответствует J_1 в $UO(J)$. Допустим, что J' лежит в пересечении двух окрестностей $UO(J)$ и $UO(\tilde{J})$, т.е. существует $K \in \text{End}_{AJ}^-$ такой, что $J' = (1 - K)J(1 - K)^{-1}$,

и существует $P \in \text{End}_{A\tilde{J}}^-(TM)$ такой, что $J' = (1 - P)\tilde{J}(1 - P)^{-1}$. Тогда формулы перехода от P к K имеют вид

$$P = (1 - (1 - K)(1 + K)^{-1}J\tilde{J})^{-1}(1 + (1 - K)(1 + K)^{-1}J\tilde{J}).$$

Если $J_1 \in A_{\omega_J}^+$ и $\tilde{J}_1 \in A_{\omega_{\tilde{J}}}^+$ соответствуют одному и тому же элементу $J_2 \in A_{\omega_J'}^+$, т.е. $\varphi_J(K, J_1) = \varphi_{\tilde{J}}(P, \tilde{J}_1)$, то они согласованы следующим образом:

$$\tilde{J}_1 = (1 - P)^{-1}(1 - P^2)^{1/2}(1 - K^2)^{-1/2}(1 - K)J_1(1 - K)^{-1}(1 - K^2)^{1/2}(1 - P^2)^{-1/2}(1 - P).$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения следует результат, сформулированный в теореме. Это позволяет дать положительный ответ на вопрос о существовании проекции $\mathcal{A}^+$ на $\mathcal{A}_{g_0}^+$. Ответ на вопрос о существовании расслоения над $\mathcal{A}_{\omega}^+$, поставленный выше, будет отрицательным. Это можно объяснить тем, что множество метрик, инвариантных относительно одной почти комплексной структуры, пересекается с множеством ассоциированных метрик не в одной точке. То есть одна и та же ПКС может быть ортогональной относительно нескольких ассоциированных метрик. Это не позволяет построить проекцию, указанную выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоленцев Н. К. О пространстве римановых метрик на симплектическом и контактном многообразии // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 6. С. 1402–1407.
- [2] McDuff D. Introduction to symplectic topology // IAS/Park City Math. Ser. 1999. V. 7. P. 8–33.
- [3] Smolentsev N. K. The space of associated metrics on a symplectic manifold // E-print math.DG/0108110, 2001.
- [4] Смоленцев Н. К. О кривизне пространства ассоциированных метрик на симплектическом многообразии // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 1. С. 132–139.
- [5] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [6] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Кемеровский государственный университет
E-mail: natali0112@ngs.ru

Поступило
15.07.2002
Исправленный вариант
18.03.2004