Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, О сдвиге вдоль траекторий, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 278–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 06:54:36

УДК 517.911

О СДВИГЕ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ

В. В. Филиппов

Продолжается распространение теории краевых задач на обыкновенные дифференциальные уравнения и включения с разрывными правыми частями, основанное на построении нового варианта метода сдвига вдоль траекторий.

Библиография: 17 названий.

Введение. В настоящей статье мы продолжаем начатое в [1]–[4] расширение теории краевых задач на уравнения и включения с разрывной правой частью, основанное на систематическом использовании введенных ранее топологических структур, адекватных непрерывности зависимости решений от начальных условий и параметров.

Важность непрерывности зависимости решений задачи Коши от начальных условий и параметров для построения теории обыкновенных дифференциальных уравнений не вызывает сомнений. Между тем, трактовка этих связей в общеизвестном изложении теории неполна.

Дело в том, что когда решение задачи Коши единственно и определено на всем рассматриваемом временном отрезке, не возникает проблем в понимании и анализе явлений, связанных с непрерывностью зависимости решений от начальных условий и параметров. Но проблемы возникают, когда решение задачи Коши неединственно и часть решений не доживает до конца рассматриваемого временного отрезка. Ситуация еще больше усложняется, когда правая часть уравнения определена не на всем соответствующем евклидовом пространстве, а в области сложной конфигурации. Поэтому, практически непрерывность зависимости решений от начальных условий и параметров не используется напрямую в полном объеме в общепринятом изложении теории, и соответствующие связи описываются опосредованно. На самом деле, прямое использование этих связей продуктивно, и подход [5]–[8] к построению теории обыкновенных дифференциальных уравнений восполняет этот пробел классической теории. В большинстве случаев мы будем использовать язык теории [5]–[8] без дополнительных пояснений.

В рамках подхода [5]–[8] к теории обыкновенных дифференциальных уравнений была развита теория задачи Коши для уравнений и включений с различными типами разрывов правой части. Это делает наши результаты в теории краевых задач применимыми к соответствующим типам уравнений и включений. Для сравнения отметим, что обычный для теории краевых задач метод Лерэ–Шаудера не применим в столь же широких

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00744.

предположениях. Уже уравнение, в котором правая часть непрерывна всюду, кроме одной точки, может не попадать в сферу приложений теории Лерэ–Шаудера из-за отсутствия соответствующего интегрального оператора.

1. Степени. Предложенный в [1]–[4] вариант метода сдвига вдоль траекторий не обладал некоторыми возможностями, предоставляемыми методом Лерэ–Шаудера. На самом деле, это реально не сказывалось на приложениях нового варианта метода сдвига при получении результатов, относящихся непосредственно к уравнениям, но формально оставалась возможность того, что когда-нибудь встретится ситуация, для которой метод Лерэ–Шаудера действительно окажется сильнее. В [9] указанное отставание нового варианта метода сдвига от метода Лерэ–Шаудера было преодолено. В п. 5 мы приведем результат, в доказательстве которого и в самом деле использование нового варианта метода сдвига по крайней мере сильно упрощает ситуацию по сравнению с возможным использованием предыдущего варианта.

Мы начнем с комментариев к идеям [9], поясняющим суть введенных добавлений.

Вопрос о существовании решения краевой задачи сводится к вопросу о существовании решения уравнения вида $F(z) = \vec{0}$, где $F: H \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ – непрерывное отображение некоторого компакта H в евклидово пространство $\mathbb{R}^{m+1}$.

Подсказываемый элементарными идеями алгебраической топологии подход к доказательству существования решения уравнения $F(z) = \vec{0}$ состоит в следующем. Выделяется некоторая открытая часть G компакта H , вне которой решений уравнения $F(z) = \vec{0}$ быть не может (“априорная оценка”). Тогда на компакте $H \setminus G$ определено отображение

$$\hat{f}: H \setminus G \rightarrow S^m, \quad \hat{f}(z) = \frac{F(z)}{\|F(z)\|},$$

порождающее гомоморфизм

$$\hat{f}_*: \check{H}_m(H \setminus G; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_m(S^m; \mathbb{Q})$$

групп гомологий. Удобно рассмотреть композицию $\hat{f}_* \cdot \partial$ граничного гомоморфизма

$$\partial: \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_m(H \setminus G; \mathbb{Q})$$

и гомоморфизма $\hat{f}_*$. Если уравнение $F(z) = \vec{0}$ не имеет решений и на всем компакте H , то отображение $\hat{f}$ продолжается до отображения

$$\hat{F}: H \rightarrow S^m, \quad \hat{F}(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}.$$

Но в этом случае гомоморфизм $\hat{f}_* \cdot \partial$ является нулевым. Таким образом, выполнено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если гомоморфизм $\hat{f}_* \cdot \partial$ является ненулевым, то уравнение $F(z) = \vec{0}$ имеет решение (принадлежащее G).*

В заключительной части статьи мы рассматриваем вопрос о существовании периодического решения. В этом случае удобно рассматривать отображение $F(z) = z(t_1) - z(t_0)$, сопоставляющее каждому решению (из соответствующим образом подобранного множества решений рассматриваемого дифференциального уравнения)

совершаемый им сдвиг $z(t_1) - z(t_0)$. Как легко видеть, нули этого отображения являются решениями, значения которых в точках t_0 и t_1 совпадают: $z(t_1) = z(t_0)$. При условии автономности рассматриваемого уравнения это означает существование периодического решения периода $t_1 - t_0$.

В простейшем в смысле понимания случае диска D^{m+1} в качестве компакта H и его внутренности $D^{m+1} \setminus S^m$ в качестве G гомоморфизм

$$\hat{f}_* \cdot \partial: \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_m(S^m; \mathbb{Q})$$

оказывается гомоморфизмом $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Этот гомоморфизм однозначно восстанавливается по образу k_f единицы группы $\mathbb{Q}$, называемому *степенью* отображения $f = F|_{H \setminus G}$. В силу сказанного выполнено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если степень отображения f отлична от нуля, то уравнение $F(z) = \bar{0}$ имеет решение.*

В общем случае группа $\check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$ не обязана быть изоморфной группе $\mathbb{Q}$ и поэтому (пока) мы не можем пользоваться этим языком. Но при практическом обсуждении конкретных ситуаций указанные в общем случае связи оказываются излишне точными. Мы можем упростить ситуацию, уйдя от рассмотрения части группы $\check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$, связанной с усложнением строения компакта H по сравнению с диском D^{m+1} . Это расширяет наши возможности в том смысле, что когда мы рассматриваем задачу для конкретной пары $H \supseteq G$, бывает удобно заменить ее на близкую пару $H_1 \supseteq G_1$. Единообразно выделяя в группах гомологий части, связанные с геометрией решаемой задачи, мы осуществляем переход к паре $H_1 \supseteq G_1$ без потери связи с рассматриваемым вопросом.

Обычно в качестве множества G берется внутренность компакта H . Тогда разность $H \setminus G$ оказывается границей компакта H . Наш переход к рассмотрению более общего случая произвольного открытого подмножества G компакта H ничего не усложняет в рассмотрении вопроса в рамках алгебраической топологии, но заметно упрощает ситуацию при приложении развиваемой техники к краевым задачам.

Возвращаясь к вопросу о выделении требуемой части группы гомологий $\check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$ и следуя [9], рассмотрим ситуацию, когда выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 1.1. Множество G_1 – открытое подмножество компакта H_1 .

УСЛОВИЕ 1.2. Компакт $H_2 \subseteq H_1$ содержит открытое подмножество $G_2 \subseteq G_1$ компакта H_1 .

Пары $H_2 \setminus G_2 \subseteq H_2$ и $H_1 \setminus G_1 \subseteq H_1$ вложены в пару $H_1 \setminus G_2 \subseteq H_1$.

Первое вложение обозначим через i , второе – через j . Они индуцируют соответствующие гомоморфизмы групп гомологий

$$i_*: \check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_2; \mathbb{Q})$$

и

$$j_*: \check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_1; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_2; \mathbb{Q}).$$

По теореме о вырезании гомоморфизм i_* является изоморфизмом, поэтому определен гомоморфизм

$$\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2} = (i_*)^{-1} \cdot j_*: \check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_1; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q}).$$

Зафиксировав теперь пару $H_1 \supseteq G_1$, мы получаем возможность для каждой пары $H_2 \supseteq G_2$, удовлетворяющей условию 1.2, выделить в группе $\check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q})$ требуемую нам для дальнейших рассуждений часть – образ $\mathfrak{Z}(\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2})$ гомоморфизма $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В достаточно частой ситуации компакт H_2 лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. В этом случае в качестве компакта H_1 можно взять любой диск, содержащий в себе компакт H_2 , а в качестве открытого множества G_1 – его внутренность, лежащую в диске H_1 открытую сферу. Группа гомологий $\check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_1; \mathbb{Q})$ изоморфна $\mathbb{Q}$ и, тем самым, мы определили гомоморфизм

$$\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2} : \mathbb{Q} \rightarrow \check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q}).$$

В приведенной в замечании 1.1 конструкции есть произвол в выборе диска H_1 . На самом деле, это не сказывается на результате. Действительно, рассмотрим

УСЛОВИЕ 1.3. Компакт H_1 лежит в компакте H_0 и множество G_1 является открытым подмножеством открытого подмножества G_0 компакта H_0 .

Справедлива

ЛЕММА 1.1. Пусть выполнены условия 1.1–1.3. Тогда

$$\check{j}_{H_0, G_0; H_2, G_2} = \check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2} \cdot \check{j}_{H_0, G_0; H_1, G_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне элементарно. См. замечание 1.4 в [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если в дополнение к предположениям замечания 1.1 компакт H_0 в условии 1.3 является диском, а G_0 – его внутренность, то гомоморфизм $\check{j}_{H_0, G_0; H_1, G_1}$ является изоморфизмом, а образы гомоморфизмов $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$ и $\check{j}_{H_0, G_0; H_2, G_2}$ совпадают.

Обозначим этот общий образ всех таких гомоморфизмов $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$, где пары $H_1 \supseteq G_1$ и $H_2 \supseteq G_2$ удовлетворяют условиям 1.1, 1.2, через $\check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q})$.

Выделение группы $\check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q})$ при помощи гомоморфизмов $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$ соответствует выбору ориентации на множестве G_2 .

Возвращаясь к обозначениям начала этого пункта рассмотрим (для $H = H_2$ и $G = G_2$) гомоморфизм

$$\check{f} = \hat{f}_* \cdot \partial \cdot \check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}.$$

Если он является ненулевым, то, тем более, является ненулевым и гомоморфизм $\hat{f}_* \cdot \partial$ и тогда в силу замечания начала этого пункта уравнение $F(z) = \bar{0}$ имеет решение. Но отталкиваясь от диска $H_1 \supseteq G_1$, мы получаем на этом пути гомоморфизм $\check{f} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ и поэтому, как и раньше, в подобной ситуации мы можем говорить о *степени отображения* $\check{f}$ как об образе единицы группы $\mathbb{Q}$. Как и раньше, если степень отображения $\check{f}$ отлична от нуля, то уравнение $F(z) = \bar{0}$ имеет решение, ибо и в этом случае гомоморфизм $\hat{f}_* \cdot \partial$ является ненулевым.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В дополнение к предположениям замечания 1.1 предположим, что диск H_3 лежит в множестве G_2 и G_3 – внутренность диска H_3 . Тогда композиция

$$\check{j}_{H_1, G_1; H_3, G_3} = \check{j}_{H_2, G_2; H_3, G_3} \cdot \check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

гомоморфизмов $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$ и $\check{j}_{H_2, G_2; H_3, G_3}$ является изоморфизмом. Поэтому, гомоморфизм $\check{j}_{H_1, G_1; H_2, G_2}$ является мономорфизмом.

Тем самым, группа $\check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q})$ изоморфна группе $\mathbb{Q}$ и степень отображения f мы можем определить по гомоморфизму $\hat{f}_* \cdot \partial|_{\check{H}_{m+1}(H_2, H_2 \setminus G_2; \mathbb{Q})}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.

2. Ациклические прообразы областей евклидовых пространств. Рассмотрим

УСЛОВИЕ 2.1. Отображение $B: X \rightarrow U$ – совершенное¹ ациклическое отображение метрического пространства X в открытое подмножество U евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$, H – компактное подмножество пространства X , множество $G \subseteq H$ открыто в X .

Ациклическость отображения B означает, что группы гомологий прообразов точек при отображении B совпадают с группами гомологий точки (в данном случае по группе коэффициентов $\mathbb{Q}$).

Множество $B(H) \subseteq U$ компактно. Возьмем любой компакт $H_1 \subseteq U$, содержащий компакт $B(H)$ внутри себя. Пусть G_1 – внутренность компакта H_1 , $\check{H}_1 = B^{-1}(H_1)$, $\check{G}_1 = B^{-1}(G_1)$.

Пусть диск D_1 содержит внутри себя компакт $\check{H}_1$, D_1^0 – внутренность диска D_1 .

По теореме Виеториса–Бегла [16], [17] гомоморфизм

$$B_*^{H_1}: \check{H}_{m+1}(\check{H}_1, \check{H}_1 \setminus \check{G}_1; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_{m+1}(H_1, H_1 \setminus G_1; \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом. (Здесь $B^{H_1}: \check{H}_1 \rightarrow H_1$ обозначает ограничение отображения B .) Поэтому мы можем определить гомоморфизм

$$\check{j}_{\check{H}_1, \check{G}_1; H, G} \cdot (B_*^{H_1})^{-1} \cdot \check{j}_{D_1, D_1^0; H_1, G_1}: \check{H}_{m+1}(D_1, D_1 \setminus D_1^0; \mathbb{Q}) \rightarrow \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q}).$$

Область определения этого гомоморфизма изоморфна $\mathbb{Q}$. В силу замечаний из п. 1 гомоморфизм

$$\check{j}_{\check{H}_1, \check{G}_1; H, G} \cdot (B_*^{H_1})^{-1} \check{j}_{D_1, D_1^0; H_1, G_1}: \mathbb{Q} \rightarrow \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$$

фактически не зависит от произвола в выборе диска D_1 . Но пока остается открытым вопрос о его зависимости от выбора компакта H_1 .

Пусть в добавление к введенным обозначениям выполнено

¹Отображение называется *совершенным*, если прообраз любого компакта компактен, см. [11].

УСЛОВИЕ 2.2. Компакт H_1 лежит в компакте $H_0 \subseteq D_1$ и G_0 – внутренность компакта H_0 , $\tilde{H}_0 = B^{-1}(H_0)$, $\tilde{G}_0 = B^{-1}(G_0)$.

В силу равенства

$$B_*^{H_1} \cdot \ddot{j}_{\tilde{H}_0, \tilde{G}_0; \tilde{H}_1, \tilde{G}_1} = \ddot{j}_{H_0, G_0; H_1, G_1} \cdot B_*^{H_0}$$

и того факта, что ввиду ацикличности отображения B гомоморфизмы $B_*^{H_1}$ и $B_*^{H_0}$ являются изоморфизмами, имеем равенство

$$\ddot{j}_{\tilde{H}_0, \tilde{G}_0; \tilde{H}_1, \tilde{G}_1} \cdot (B_*^{H_0})^{-1} = (B_*^{H_1})^{-1} \cdot \ddot{j}_{H_0, G_0; H_1, G_1}$$

и затем

$$\begin{aligned} & \ddot{j}_{\tilde{H}_1, \tilde{G}_1; H, G} \cdot (B_*^{H_1})^{-1} \cdot \ddot{j}_{D_1, D_1^0; H_1, G_1} \\ &= \ddot{j}_{\tilde{H}_1, \tilde{G}_1; H, G} \cdot (B_*^{H_1})^{-1} \cdot \ddot{j}_{H_0, G_0; H_1, G_1} \cdot \ddot{j}_{D_1, D_1^0; H_0, G_0} \\ &= \ddot{j}_{\tilde{H}_1, \tilde{G}_1; H, G} \cdot \ddot{j}_{\tilde{H}_0, \tilde{G}_0; \tilde{H}_1, \tilde{G}_1} \cdot (B_*^{H_0})^{-1} \cdot \ddot{j}_{D_1, D_1^0; H_0, G_0} \\ &= \ddot{j}_{\tilde{H}_0, \tilde{G}_0; H, G} \cdot (B_*^{H_0})^{-1} \cdot \ddot{j}_{D_1, D_1^0; H_0, G_0}, \end{aligned}$$

что означает, что при замене H_1 на H_0 гомоморфизм

$$\ddot{j}_{\tilde{H}_1, \tilde{G}_1; H, G} \cdot (B_*^{H_1})^{-1} \ddot{j}_{D_1, D_1^0; H_1, G_1}: \mathbb{Q} \rightarrow \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$$

не меняется.

Этот не зависящий от выбора D_1 и H_1 гомоморфизм $\mathbb{Q} \rightarrow \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$ обозначим $\check{i}_{H, G}$:

$$\check{i}_{H, G}: \mathbb{Q} \rightarrow \check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q}).$$

Таким образом, при выполнении условия 2.1 группа $\mathbb{Q}$ представлена в группе $\check{H}_{m+1}(H, H \setminus G; \mathbb{Q})$.

Пусть теперь в дополнение к условию 2.1 выполнено

УСЛОВИЕ 2.3. Определено непрерывное отображение $F: H \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

Мы можем рассмотреть гомоморфизм $f_* \cdot \ddot{i}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, где $f = F|_{H \setminus G}$, и определить по нему степень отображения f . Как и в п. 1, если степень отображения f отлична от нуля, то уравнение $F(z) = \vec{0}$ имеет решение.

УСЛОВИЕ 2.4. Компакт $\tilde{H}$ лежит в компакте H , а множество $\tilde{G} \subseteq \tilde{H}$ содержит множество G и лежит в H .

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия 2.1, 2.3, 2.4. Тогда степени отображений f и $f|_{\tilde{H} \setminus \tilde{G}}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на лемму 2.2 в [10]. См. также следствие леммы 1.1 в [9].

3. Пространства решений. В дальнейшем нас будет интересовать частный случай, когда в качестве топологического пространства X будет фигурировать необходимое для обсуждения соответствующей краевой задачи множество решений.

Напомним некоторые понятия и обозначения теории [5]–[8]. Символ $R(U)$ обозначает множество всех множеств функций, с графиками, лежащими в U , и определенных на отрезках и одноточечных подмножествах действительной прямой, которые замкнуты относительно операций 1) перехода к функции с меньшей областью определения и 2) составления взаимного продолжения из двух функций, совпадающих на непустом пересечении областей определения. Ясно, что при любом более-менее разумном определении решения (нов духе Каратеодори) множество решений любого уравнения или включения будет удовлетворять этим двум комбинаторным условиям, т.е. множество решений этого уравнения или включения обязательно будет элементом множества $R(U)$. Следуя [5]–[8] в изложении общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы переходим затем на аксиоматический уровень, когда вместо обычного требования типа непрерывности правых частей рассматриваемых уравнений или выполнения условий Каратеодори мы накладываем на множества решений условия типа непрерывности зависимости решений от начальных условий (см. ниже свойство (с)), локального существования решения задачи Коши (см. ниже свойство (е)) и т.д. Сказанное легко понимается, когда выполнено условие единственности решения задачи Коши и когда все обсуждаемые решения определены на всем рассматриваемом временном отрезке. В общем случае требуются дополнительные обсуждения. В частности (при отсутствии единственности решения задачи Коши), непрерывность расширяется до полунепрерывности сверху. Равномерная сходимост функций получает более приспособленную для обсуждения более широких связей интерпретацию в виде сходимости относительно расстояния Хаусдорфа между графиками функций. Это позволяет рассматривать одновременно функции с различными (но компактными) областями определения. При этом названные выше свойства (пространства решений Z) выглядят следующим образом.

Свойство (е). Для любой точки (t, y) множества U найдется такая функция $z \in Z$, что $t \in \langle \pi(z) \rangle$ и $z(t) = y$ (т.е. задача Коши для пространства Z с начальными условиями $z(t) = y$ имеет решение).

(Здесь $\langle M \rangle$ обозначает внутренность множества M , $\pi(z)$ обозначает область определения функции z .)

Свойство (с). Для любого компактного подмножества K множества U множество Z_K компактно.

Свойство (с) является псевдонимом непрерывности зависимости решений задачи Коши от начальных условий (символ Z_K обозначает множество всех тех элементов пространства Z , графики которых лежат в K ; имеется в виду компактность относительно расстояния Хаусдорфа между графиками). Кроме того, для нас в рамках этой статьи будет существенным

Свойство (h). Группы рациональных гомологий множества решений, начинающихся в произвольной точке (t_0, y_0) множества U и максимально продолженных вправо, совпадают с группами гомологий точки.

См. подробности в [1]–[8].

Пусть $*$ – некоторый список свойств указанного типа. Символ $R_*(U)$ обозначает множество всех элементов множества $R(U)$, удовлетворяющих всем условиям из списка $*$.

На множестве $R_c(U)$ естественным образом вводится топология, адекватная непрерывности зависимости решений от параметров уравнения. Именно она используется ниже, например, в условии 1.2. Рассматривая семейство уравнений $y' = f(t, y, \alpha)$, мы интерпретируем непрерывность зависимости решений от параметра α следующим образом. Мы требуем, чтобы для любой последовательности индексов $\{\alpha_i : i = 1, 2, \dots\}$, сходящейся к некоторому значению α_0 , пространства Z_i решений соответствующих уравнений $y' = f(t, y, \alpha_i)$ сходились к пространству Z_0 решений уравнения $y' = f(t, y, \alpha_0)$ в смысле выполнения следующего условия: для любого компактного подмножества K множества U и любой последовательности функций $\{z_j \in Z_j, j \in A\}$, графики которых лежат в компакте K , найдутся функция $z \in Z$ и подпоследовательность последовательности $\{z_j : j \in A\}$, сходящаяся к функции z .

Это свойство остается содержательным и при рассмотрении стационарной последовательности $Z_j \equiv Z$. В этом случае оно приобретает вид приведенного выше свойства (с).

Если выполнено условие единственности решения задачи Коши и все обсуждаемые решения определены на всем рассматриваемом временном отрезке, то приведенные условия приобретают общепонятный, общеизвестный вид. Более детальное исследование подобных свойств можно найти в [5]–[8].

Пусть теперь

УСЛОВИЕ 3.1. Множество U – открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$.

УСЛОВИЕ 3.2. Пространство $Z \in R_{\text{сех}}(U)$.

Обозначим через $C_s^+(U, t_0)$ множество всевозможных непрерывных функций $z : [t_0, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (для любых $a > t_0$), графики которых являются замкнутыми подмножествами множества U . Топология пространства $C_s^+(U, t_0)$ описана в [3].

В предположениях условий 3.1, 3.2 символ Z^+ обозначает множество всех непрерывных функций $z : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (в качестве правого открытого конца может быть также $+\infty$), удовлетворяющих следующим двум условиям:

для любого отрезка I , лежащего в области определения функции z , $z|_I \in Z$;
нет элемента пространства Z , продолжающего функцию z

(т.е. речь идет о решениях, максимально продолженных вправо).

В предположениях условий 3.1, 3.2 обозначим через $Z^+(t_0)$ пересечение $Z^+ \cap C_s^+(U, t_0)$. Отображение

$$B : Z^+(t_0) \rightarrow U_{t_0}, \quad B(z) = z(t_0), \quad U_{t_0} = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (t_0, y) \in U\},$$

является совершенным ациклическим отображением, см. [3]. Поэтому мы находимся в предположениях предыдущего пункта.

Пусть выполнено

УСЛОВИЕ 3.3. Подпространство L – плоскость евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $U_{t_0, L} = U_{t_0} \cap L$, $Z_L^+(t_0) = Z^+(t_0) \cap B^{-1}(U_{t_0, L})$, $B_L = B|_{Z_L^+(t_0)} : Z_L^+(t_0) \rightarrow U_{t_0, L}$.

Как легко видеть, отображение B_L также является совершенным ациклическим отображением и к нему также применимы соображения предыдущего пункта.

Теория для различных краевых задач строится по единой схеме, и различия состоят в выборе подпространства L и функции f . Для доказательства существования периодических решений надо брать $L = \mathbb{R}^n$, для построения теории задачи Дирихле в качестве L надо брать плоскость половинной размерности.

Пусть далее

УСЛОВИЕ 3.4. Открытое подмножество G пространства $Z^+(t_0)$, лежит в компакте $H \subseteq Z^+(t_0)$, любой элемент z компакта H определен на отрезке $[t_0, t_1]$ (т.е. $\pi(z) \supseteq [t_0, t_1]$) и, если $z \in H \setminus G$, то $z(t_1) \neq z(t_0)$.

В этих предположениях рассмотрим отображение $f: H \setminus G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(z) = z(t_1) - z(t_0)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в предположениях условий 3.1, 3.2, 3.4 степень отображения f отлична от нуля. Тогда существует функция $z \in H$, для которой $z(t_1) = z(t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на замечания п. 2. Теорема доказана.

Пусть теперь в дополнение к условию 3.1 выполнено

УСЛОВИЕ 3.5. Отображение $\varphi: [0, 1] \rightarrow R_{\text{сеп}}(U)$ непрерывно.

В предположениях условий 3.1, 3.5 для $\lambda \in [0, 1]$ обозначим $Z_\lambda = \varphi(\lambda)$ (таким образом, $Z_\lambda \in R_{\text{сеп}}(U)$). Условие 3.5 означает, что решения рассматриваемых уравнений непрерывно зависят от параметра λ .

Пусть далее выполнены следующие два условия.

УСЛОВИЕ 3.6. Открытое подмножество G пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ лежит в замкнутом подмножестве $H \subseteq C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, множество $\{z(t_0): z \in Z_\lambda \cap (H \setminus G), \lambda \in [0, 1]\}$ является компактным подмножеством множества U_{t_0} .

УСЛОВИЕ 3.7. При любом $\lambda \in [0, 1]$ любая функция $z \in Z_\lambda \cap (H \setminus G)$ удовлетворяет условию $z(t_1) \neq z(t_0)$.

В предположениях условий 3.1, 3.5–3.7 пространство $Z = Z_\lambda$, его открытое подмножество $G_\lambda = Z_\lambda \cap G$ и замкнутое подмножество $H_\lambda = Z_\lambda \cap H$ удовлетворяют условию 3.4. Соответственно, определено отображение

$$f_{\lambda; H, G}: H_\lambda \setminus G_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_{\lambda; H, G}(z) = z(t_1) - z(t_0).$$

ТЕОРЕМА 3.2. В предположениях условий 3.1, 3.5–3.7 степени отображений $f_{\lambda; H, G}$, $\lambda \in [0, 1]$, совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на лемму 1.1 в [9]. См. также доказательство теоремы 2.1 в [9] и лемму 2.7 в [10].

Теорема 3.2 распространяет “принцип продолжения по параметру” для задачи о существовании периодического решения на рассматриваемую ситуацию.

В п. 5 нам понадобится следующий слегка усложненный вариант теоремы 3.2.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в предположениях условий 3.1, 3.5, 3.6

$$M = \bigcup \{(H_\lambda \setminus G_\lambda) \times \{\lambda\} : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq (H \setminus G) \times [0, 1]$$

и определено непрерывное отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Пусть отображения $f_{\lambda; H, G}: H_\lambda \setminus G_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ задаются формулой $f_{\lambda; H, G}(z) = f(z, \lambda)$. Тогда степени отображений $f_{\lambda; H, G}$, $\lambda \in [0, 1]$, совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к той же ссылке, что и доказательство теоремы 3.2.

4. Направленные пары и направляющие функции. Принято рассматривать в качестве направляющей функции непрерывно дифференцируемую функцию и сравнивать направление движения вдоль траекторий с градиентом этой функции. Это плохо подходит для исследования уравнений и включений с разрывными правыми частями. К некоторому удивлению, отказ от дифференцируемости не только не усложняет ситуацию, но упрощает ее даже во вполне классических случаях, освобождая от становящихся ненужными технических рассматриваний и предлагая новый более широкий класс объектов с большими возможностями доказательств и сравнения свойств. См. подробности в [12].

Пусть выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 4.1. Множество U – открытое подмножество произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

УСЛОВИЕ 4.2. Функция $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и не зависит от первого аргумента.

УСЛОВИЕ 4.3. Пространство $\Phi \in R_{ce}(U)$ и функция $\theta_\varphi(t) = h(\varphi(t))$ является возрастающей для любой функции $\varphi \in \Phi$.

При выполнении условий 4.1–4.3 пару $\langle h, \Phi \rangle$ назовем *направленной* (directed), а функцию h *направляющей* (guiding) для пространства Φ .

Как уже отмечалось, в классическом исполнении функция h предполагается непрерывно дифференцируемой. Никакое пространство Φ при этом не рассматривается. При необходимости сравнить наши рассуждения с классическими в качестве пространства Φ можно взять пространство решений дифференциального уравнения $y' = \text{grad } h(y)$, либо, когда это нужно, пространство решений дифференциального уравнения $y' = f(y)$ с правой частью

$$f(y) = \begin{cases} \text{grad } h(y), & \text{если } \|\text{grad } h(y)\| \leq 1, \\ \frac{\text{grad } h(y)}{\|\text{grad } h(y)\|}, & \text{если } \|\text{grad } h(y)\| > 1. \end{cases}$$

5. О существовании периодического решения. Основной результат этого пункта (теорема 5.1) обобщает теорему 4.3 из [13]. Для формулирования этого результата нам понадобятся следующие условия.

УСЛОВИЕ 5.1. Множество $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

УСЛОВИЕ 5.2. Функция $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $h_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $Q = h_1^{-1}((-\infty, v_0])$, $W = \mathbb{R}^n \setminus Q$, функция $h_2: W \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

УСЛОВИЕ 5.3. Пространство $\Phi \in A_{ceh}(W)$, $\sup \pi(z) = \infty$ для любой функции $z \in \Phi^+$, пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ и $\langle -h_2, \Phi \rangle$ направлены на множестве W . (Здесь $A(W)$ обозначает множество всех автономных пространств из $R(\mathbb{R} \times W)$, т.е. пространств инвариантных относительно сдвигов по $\mathbb{R}$ с той же оговоркой относительно индексов, что и для $R(U)$.)

УСЛОВИЕ 5.4. Пространство $Z \in R_{ceh}(U)$, $-\infty < 0 < T < \infty$, $Z_1 = Z *_T \Phi$ и $h_2(z(t+T)) \leq h_2(z(t))$ для любой функции $z \in Z_1$, определенной на отрезке $[t, t+T]$ с $t \in [0, T]$ и принимающей значения в множестве W .

УСЛОВИЕ 5.5. При любом $t \in [0, T]$ любое решение задачи Коши $z \in Z^+$, $z(t) \in Q$, определено на всем отрезке $[t, t+T]$ (т.е. $\pi(z) \supseteq [t, t+T]$).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия 5.1–5.5. Тогда найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [0, T]$ и $z(0) = z(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Из стремления $h_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ в условии 5.2 вытекает ограниченность и затем компактность множества Q .

Без ограничения общности мы можем предположить дополнительно, что $\vec{0} \in Q$ (в противном случае произведем соответствующий перенос начала координат).

II. Из условия 5.5 вытекает, что множество

$$L_Q = \{z : z \in Z, \inf \pi(z) \in [0, T], \sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T, z(\inf \pi(z)) \in Q\}$$

компактно, ибо в противном случае из утверждения 10.4.1 в [8] вытекает существование такой функции $z \in Z^+$, что $\inf \pi(z) \in [0, T]$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$ и $z(\inf \pi(z)) \in Q$, что противоречит (5.2) (см. также § VI.2 и лемму VII.1.1 в [6], где обсуждаются аналогичные ситуации). Поэтому множество значений функций из L_Q лежит внутри некоторого шара $D_{R_0} \supseteq Q$ с центром в начале координат и радиуса R_0 .

Пусть $m = \sup\{h_1(x) : \|x\| \leq R_0\}$.

В силу стремления $h_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ в условии 5.2 найдется такое число $R > R_0$, что $\inf\{h_1(x) : \|x\| \geq R\} > m$.

III. Обозначим через Y_τ , $\tau \in [0, T]$, сдвиг пространства Z_1 влево на τ , т.е. пространство Y_τ состоит из всех функций вида $z(t+\tau)$, где $z \in Z_1$. Имеем непрерывное отображение $\varphi : [0, T] \rightarrow R_{\text{свн}}(U)$, $\varphi(\tau) = Y_\tau$.

Множество

$$H = \{z : z \in C([0, T], \mathbb{R}^n), \sup\{\|z(t)\| : t \in [0, T]\} \leq R\}$$

замкнуто, а множество

$$G = \{z : z \in Z^+(0), C([0, T], \mathbb{R}^n), \sup\{\|z(t)\| : t \in [0, T]\} < R\} \subseteq H$$

открыто в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

IV. Если для некоторой функции $z \in (H \setminus G) \cap Y_0$ имеет место равенство $z(0) = z(T)$, то доказываемое верно и на этом наши рассуждения можно закончить. Поэтому в оставшейся части доказательства будем предполагать, что $z(0) \neq z(T)$ для всех функций $z \in (H \setminus G) \cap Y_0$.

Покажем далее, что ни одна из функций $z \in Y_\lambda \cap (H \setminus G)$, $\lambda \in (0, T)$, не удовлетворяет равенству

$$z(0) = z(T + \delta_\lambda), \quad \text{где } \delta_\lambda = \min\{\lambda, T - \lambda\}.$$

Рассмотрим порознь два случая. В первом случае будем предполагать, что траектория $z(t)$ при $t \in [0, T]$ не задевает компакт Q . Во втором случае будем предполагать, что траектория $z(t)$ при $t \in [0, T]$ задевает компакт Q .

Рассмотрим первый случай. Если траектория $z(t)$ при $t \in [T, T + \delta_\lambda]$ задевает компакт Q , в силу направленности пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W $z(T + \delta_\lambda) \in Q$ и в силу того, что $z(0) \notin Q$, мы имеем требуемое. Если траектория $z(t)$ при $t \in [T, T + \delta_\lambda]$ не

задевает компакт Q , то в силу условия 5.4 и направленности пары $\langle -h_2, \Phi \rangle$ на множестве W мы имеем $h_2(z(0)) \geq h_2(z(T)) > h_2(z(T + \delta_\lambda))$, что дает нам требуемое и в этом случае.

Во втором случае в силу II $\|z(T)\| < R_0$ и, поэтому, $h_1(z(T)) \leq m$. В силу направленности пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W либо $h_1(z(T + \delta_\lambda)) \leq v_0$, либо $h_1(z(T + \delta_\lambda)) \leq h_1(z(T)) \leq m$. При этом $h_1(z(0)) > m$, что дает нам требуемое в этом случае.

Покажем теперь, что ни одна из функции $z \in Y_T \cap (H \setminus G)$ не удовлетворяет равенству $z(0) = z(T)$. (В силу определения Y_T и автономности пространства Φ мы имеем $z \in \Phi$.) В силу направленности пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W траектория $z(t)$ либо задевает компакт Q , там заканчивается и $h_1(z(T)) \leq v_0 < h_1(z(0))$, либо траектория $z(t)$ проходит в W и $h_1(z(0)) > h_1(z(T))$, что дает нам требуемое в этом случае.

По теореме 3.3 степени сдвигов

$$f_0: (H_0 \setminus G_0) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{где } H_0 = Z \cap H, \quad G_0 = Z \cap G, \quad f_0(z) = z(T) - z(0),$$

и

$$f_T: (H_T \setminus G_T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{где } H_T = \Phi \cap H, \quad G_T = \Phi \cap G, \quad f_T(z) = z(T) - z(0),$$

совпадают.

Таким образом, нам остается показать, что степень сдвига f_T отлична от нуля.

V. Так как для любой функции $z \in H_T \setminus G_T$ $\sup\{\|z(t)\| : t \in [0, T]\} = R$, то в соответствии с II, неравенством $\inf\{h_1(x) : \|x\| \geq R\} > m$ и направленностью пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W мы имеем $h_1(z(0)) > m$. В силу определения m в II это означает, что $\|z(0)\| > R_0$.

Шаровой слой $P = \{x : x \in \mathbb{R}^n, R_0 \leq \|x\| \leq R_1\}$ лежит в W .

Пусть $K = \{z \in \Phi : \pi(z) = [0, T], z(0) \in P\}$. Сдвиг f_T продолжается на K до сдвига $F: K \rightarrow \mathbb{R}^n, F(z) = z(T) - z(0)$.

Из направленности пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W вытекает, что сдвиг F нигде не обращается в $\bar{0}$. В силу леммы 2.1 степени сдвигов F и f_T совпадают.

VI. Пусть $K^+ = \{z : z \in Z^+(t_0), z(0) \in P\}$. Из направленности пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W и условия $h_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ в (5.2) вытекает, что $\sup \pi(z) = \infty$ для любой функции $z \in K^+$. В силу тех же условий найдется такое число $S > T$, что $z(S) \in Q$ для любой функции $z \in K^+$.

Для $s \geq T$ определим сдвиги

$$F_s: K^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F_s(z) = z(s) - z(0).$$

Направленность пары $\langle -h_1, \Phi \rangle$ на множестве W и стремление $h_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ в условии 5.2 обеспечивают необращение в $\bar{0}$ сдвигов F_s .

Отображение $K^+ \rightarrow K$, сопоставляющее функции $z \in K^+$ ее ограничение $z|_{[0, T]}$ на отрезок $[0, T]$, является ациклическим, поэтому степень сдвига F совпадает со степенью сдвига F_T . Сдвиг F_T гомотопен сдвигу $F_S: K \rightarrow \mathbb{R}^n, F_S(z) = z(S) - z(0)$ (при гомотопии $F_s, s \in [T, S]$).

Ввиду сохранения степени при гомотопии нам остается показать, что степень сдвига F_S отлична от нуля.

VII. Определяем далее гомотопию

$$\Theta(\lambda, z) = \lambda z(S) - z(0), \quad \text{где } \lambda \in [0, 1], \quad z \in K^+.$$

Так как при всех $\lambda \in [0, 1]$ и $z \in K^+$ точка $\lambda z(S)$ лежит внутри шара D_{R_0} , то вектор $\Theta(\lambda, z)$ является ненулевым. Так как $\Theta(1, z) = F_S(z)$ и $\Theta(0, z) = -z(0)$, то степень отображения F_S совпадает со степенью отображения $G: K^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G(z) = -z(0)$.

Отображение G есть композиция отображения $B_{K^+}: K^+ \rightarrow P$, $B_{K^+}(z) = z(0)$, и отображения $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) = -x$. В силу ацикличности отображения B_{K^+} степени отображений G и g совпадают. В силу леммы 2.1 совпадают степени отображений g и $g_{R_0} = g|_{S_{R_0}}: S_{R_0} \rightarrow S_{R_0}$. Но степень ("антиподального") отображения g_{R_0} известна. Она равна $(-1)^n$ и, таким образом, отлична от нуля. Теорема доказана.

Теорема 4.3 в [13], см. также [14], формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и выполнены следующие условия

(V) существует положительная действительная функция V класса C^1 на $\mathbb{R}^n$, число $r_0 > 0$ и неотрицательная непрерывная функция $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \quad \text{и} \quad (V'(x), f(t, x)) \leq a(t, V(x)) \quad \text{при} \quad |x| \geq r_0;$$

(A) $v_0 = \max\{V(x) : |x| \leq r_0\}$, $0 < v_1 < \infty$, для любого $t \in [0, T]$ любое решение $v(t; t_1, v_0)$ задачи Коши $v' = a(t, v)$, $v(t_1) = v_0$, определено для $t \in [t_1, t_1 + T]$ и $v(t; t_1, v_0) \leq v(t_1 + T; t_1, v_0) \leq v_1$ при $t_1 \leq t \leq t_1 + T$;

(W) существует функция $W \in C^1(\mathbb{R} \setminus D_{r_0}, \mathbb{R})$ такая, что $(V'(x), W'(x)) > 0$ при $|x| \geq r_0$ и, если $x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\min\{\|x(t)\| : t \in \mathbb{R}\} \geq r_0$, то

$$\int_0^T (W'(x(t)), f(t, x(t))) dt \leq 0.$$

Тогда уравнение $y' = f(t, y)$ имеет по крайней мере одно T -периодическое решение.

(Здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение; V' и W' обозначают градиенты соответствующих функций.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем вывести теорему 5.2 из теоремы 5.1. Для этого надо положить $Q = V^{-1}((-\infty, v_0))$. В качестве пространства Φ надо взять пространство решений уравнения

$$y' = \frac{-V'(y)}{\max\{\|V'(y)\|, 1\}}.$$

В качестве функции h_1 надо взять функцию V . В качестве функции h_2 надо взять функцию W . Выполнение условия 5.5 легко вытекает из теоремы сравнения и условий (A)

и (V) (см. рассуждения в [13, с. 331], в [15] есть более широкий вариант теоремы сравнения). Выполнение условия (5.4) следует из условия (W). Выполнение всех остальных наших ограничений очевидно.

Полезно сравнить наше доказательство теоремы 5.1 с доказательством теоремы 4.3 в [13]. Различия в доказательствах (а это – большая часть рассуждений) высвечивают, что можно делать на уровне работы с правыми частями уравнений, и что можно делать на уровне пространств решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. В. О теореме Ароншайна // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 33. № 1. С. 75–79.
- [2] Филиппов В. В. О существовании периодических решений // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 769–784.
- [3] Филиппов В. В. О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 139–160.
- [4] Филиппов В. В. О задаче Дирихле для векторного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 8. С. 1057–1068.
- [5] Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
- [6] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [7] Filippov V. V. Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations // Topology in Nonlinear Analysis. V. 35. Warsaw: Banach Center Publications, 1996. P. 171–192.
- [8] Filippov V. V. Basic Topological Structures of Ordinary Differential Equations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [9] Филиппов В. В. Смесь методов Лерэ–Шаудера и Пуанкаре–Андропова в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1709–1711.
- [10] Filippov V. V. Remarks on periodic solutions of ordinary differential equations // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. № 3. P. 431–451.
- [11] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [12] Филиппов В. В. Замечания о направляющих функциях и периодических решениях // Дифференц. уравнения. (в печати).
- [13] Mawhin J. Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations // Topological Methods in Differential Equations and Inclusions. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 291–376.
- [14] Krasnosel'skii A. M., Krasnosel'skii M. A., Mawhin J. On some conditions for existence of forced periodic oscillations // Differential Integral Equations. 1992. V. 5. P. 1267–1273.
- [15] Филиппов В. В. О теореме сравнения // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 4. С. 606–624.
- [16] Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen // Math. Ann. 1927. V. 97. P. 454–472.
- [17] Begle E. G. The Vietoris mapping theorem for bicomact spaces // Ann. of Math. (2). 1950. V. 51. № 3. P. 534–543.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.11.2000
Исправленный вариант
10.09.2002