Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, И. Д. Латыпов, Асимптотическое поведение суммы ряда Дирихле заданного роста на кривых, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 37–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:17:43

УДК 517.53

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ ЗАДАННОГО РОСТА НА КРИВЫХ

А. М. Гайсин, И. Д. Латыпов

Изучается связь между ростом и убыванием суммы целого ряда Дирихле конечного порядка по Ритту на произвольных кривых, уходящих в бесконечность. Для класса показателей, имеющих в некотором смысле регулярное распределение, найден критерий того, чтобы логарифм максимального члена был эквивалентен логарифму модуля суммы ряда Дирихле хотя бы на одной неограниченной последовательности точек кривой.

Библиография: 11 названий.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) – последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty. \quad (1)$$

Через $D(\Lambda, R)$ обозначим класс всех функций F , представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (2)$$

и имеющих конечные порядки $\rho_R(F)$ по Ритту (R -порядки). Напомним, что [1]

$$\rho_R(F) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{\sigma},$$

где $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$.

Из условия (1) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \quad (3)$$

так что ряд (2) сходится во всей плоскости абсолютно, а его сумма F – целая функция [1]. Хорошо известно, что при условии (3) величина ρ_R может быть вычислена по формуле [1]

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n}. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00655.

Рассмотрим произведение Вейерштрасса

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \quad (5)$$

Известно, что Q – целая функция экспоненциального типа не выше πD^* , где D^* – усредненная верхняя плотность последовательности Λ :

$$D^* = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx, \quad n(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1.$$

Всегда $D^* \leq D \leq eD^*$ (см. [2]). Напомним также, что величина

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right|$$

называется *индексом конденсации* последовательности Λ . Если $\inf_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \tau > 0$, то $\delta \leq 3[3 - \ln(\tau D)]D < \infty$ [2, гл. 2, § 5]. Наряду с рядом (2) введем в рассмотрение измененный ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \quad (6)$$

Так как Q – целая функция экспоненциального типа, то ряд (6) также абсолютно сходится во всей плоскости, а F^* – целая функция. При помощи формулы (4) проверяется, что если $F \in D(\Lambda, R)$, то $F^* \in D(\Lambda, R)$, причем $\rho_R^* \leq \rho_R$, где ρ_R^* и ρ_R – R -порядки функций (6) и (2) соответственно. Если индекс конденсации $\delta < \infty$, то $\rho_R^* = \rho_R$.

Пусть $E \subset [0, \infty)$ – измеримое по Лебегу множество. *Верхней DE и нижней dE плотностями множества E* называются величины

$$DE = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}, \quad dE = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}.$$

В дальнейшем считаем, что все исключительные множества $E \subset [0, \infty)$, вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединения отрезков вида $[a_n, a'_n]$, где

$$0 < a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots$$

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ положительных функций $w = w(x)$. Пусть

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\},$$

$$\underline{W} = \left\{ w \in L : \sqrt{x} \leq w(x) = o(x \ln x), \ x \rightarrow \infty, \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\},$$

а

$$\overline{W} = \left\{ w \in L : \sqrt{x} \leq w(x), \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$, $b_n \neq 0$ при $n \geq N$, $\overline{W}$ -нормальна, если найдется функция $\theta \in L$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \quad -\ln |b_n| \leq \theta(\lambda_n), \quad n \geq N.$$

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство кривых, где γ – любая кривая, уходящая в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \rightarrow \infty$, то $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$.

Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F , представимых во всей плоскости рядами Дирихле (2). Для $F \in D(\Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$ положим

$$d(F; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\substack{s \in \gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)}, \quad (7)$$

где $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$.

Пусть, далее, $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (2) и (6) соответственно, т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad \mu^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

В работе [3] доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (8)$$

Тогда для любой функции $F \in D(\Lambda)$ справедлива оценка

$$q(F) \leq d(F).$$

Здесь

$$d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F; \gamma), \quad q(F) = \inf_e \overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)},$$

$d(F; \gamma)$ – величина, определенная формулой (7), а точная нижняя грань и верхний предел в определении $q(F)$ вычисляются по всем множествам $e \subset \mathbb{R}_+$, каждое из которых получается удалением из $\mathbb{R}_+$ некоторой системы отрезков конечной суммарной длины.

Пусть выполняется условие (8). Тогда справедливы утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$\ln \mu^*(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma),$$

то $q(F) = d(F) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой целой функции $F \in D(\Lambda)$ справедливы оценки

$$0 \leq d(F) \leq 1. \quad (9)$$

Оценки (9) неулучшаемы [3]. Они указывают на связь между ростом и убыванием целой функции F на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Действительно, из оценки $0 \leq d(F; \gamma)$ следует, что существуют функция $\varepsilon(r)$, $\varepsilon \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, и последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такие, что при $\xi_n \rightarrow \infty$

$$\ln |F(\xi_n)| > -\varepsilon(|\xi_n|) \ln M(\operatorname{Re} \xi_n). \quad (10)$$

Отметим, что аналогичная оценка для произвольных целых функций на фиксированном луче была установлена Бёрлингом в работе [4]: для любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (θ фиксировано) множество

$$\{r \in \mathbb{R}_+ : \ln |f(re^{i\theta})| > -(1 + \varepsilon) \ln M(r; f)\}$$

неограниченное, где $M(r; f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Видим, что оценка (10) лучше соответствующей оценки Бёрлинга. Это объясняется тем, что в теореме А функция F имеет специальный вид, а именно является суммой ряда Дирихле, для последовательности показателей которой выполняется условие (8). Смысл оценки (10) в том, что при выполнении условия (8) сумма целого ряда Дирихле (2) не может сколь угодно быстро убывать на любой последовательности точек $\{\xi_n\}$, стремящейся к бесконечности вдоль кривой γ .

Цель статьи – доказать аналог теоремы А для функций F из класса $D(\Lambda, R)$. Будет показано, что в этом случае условие (8) можно заменить на требование (теорема 1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \quad (11)$$

Для $\overline{W}$ – нормальной последовательности $\{Q'(\lambda_n)\}$ – условие (11) необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$ (теорема 2).

1. Вспомогательные факты. В статье будет по существу использован один из вариантов следующей теоремы из работы [5].

ТЕОРЕМА (Борель–Неванлинна). Пусть на интервале $[r_0, \infty)$ задана неубывающая непрерывная функция $u(r)$, $u(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Пусть $\varphi(u)$ – положительная, невозрастающая и непрерывная на интервале (u_0, ∞) ($u_0 = u(r_0)$) функция, $\varphi(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, причем

$$\int_{u_0}^{\infty} \varphi(u) du < \infty.$$

Тогда для всех $r \geq r_0$, кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется оценка

$$u(r + \varphi(u(r))) < u(r) + 1.$$

Имеет место следующая лемма типа Бореля–Неванлинны.

ЛЕММА 1. Пусть $u(\sigma)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $u(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Пусть $w \in L$,

$$\frac{w(x)}{x \ln x} = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Если $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \quad (13)$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ ($0 < \tau_j \uparrow \infty$) при $\tau_j \rightarrow \infty$

$$\ln v(\tau_j) = O(\tau_j), \quad (14)$$

и

$$\lim_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_j} \int_1^{v(\tau_j)} \frac{w(t)}{t^2} dt = 0, \quad (15)$$

то при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$,

$$\text{mes}(E \cap [0, \tau_j]) = o(\tau_j),$$

имеет место асимптотическая оценка

$$u\left(\sigma + \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) < u(\sigma) + o(1). \quad (16)$$

Лемма 1 доказана в работе [6].

ЗАМЕЧАНИЕ. Найдется функция $w^*(t) = \beta(t)w(t)$ ($0 < \beta(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow \infty$) из класса L , удовлетворяющая условиям (12), (15) леммы 1. С учетом (14) показано, что [6]

$$\text{mes}(E \cap [0, \tau_j]) \leq o(\ln v(\tau_j)) + 4 \int_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = o(\tau_j). \quad (17)$$

Оценка (17) будет использована при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 2. Пусть γ – кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z : |z - z_0| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно-гладких жордановых кривых, а $g(z)$ – функция, аналитическая в круге $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}(z_0; R)$. Пусть

$$M = \max_{\overline{D}(z_0; R)} |g(t)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(t)|.$$

Тогда при $0 < \beta \leq 1/5$ для всех z из круга $\overline{D}(z_0; \beta R)$ верна оценка

$$|g(z)| \leq m^{1-2\beta} M^{2\beta}. \quad (18)$$

Лемма 2 доказана в работе [3].

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие (11), то для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ и любого β , $0 < \beta \leq 1/5$, существует множество E_β , $dE_\beta = 0$, такое, что справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e_\beta \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \gamma), \quad (19)$$

где $e_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$, γ – любая кривая из семейства Γ , а $d(F; \gamma)$ – величина, определенная формулой (7).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие (11), то для любой целой функции $F \in D(\Lambda, R)$ справедливы оценки

$$0 \leq d(F) \leq 1,$$

где $d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F, \gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в теореме 1 вместо условия (11) выполняется более сильное требование

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} = 0, \quad (20)$$

то

$$q(F) \leq d(F), \quad (21)$$

где

$$d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F, \gamma), \quad q(F) = \inf_e \overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)},$$

а точная нижняя грань и верхний предел в определении $q(F)$ вычисляются по всем множествам $e \subset \mathbb{R}_+$, каждое из которых получается удалением из $\mathbb{R}_+$ некоторой системы отрезков, объединение которых имеет нулевую плотность. Дело в том, что в этом случае все асимптотические оценки, в том числе и (19), полученные в ходе доказательства теоремы 1, будут справедливы вне некоторых множеств нулевой плотности. Поэтому (21) есть следствие оценки (19).

Если при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества E нулевой плотности

$$\ln \mu^*(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad (22)$$

то из (21) видно, что $q(F) = d(F) = 1$. Действительно, объединение двух множеств нулевой плотности имеет также нулевую плотность, $0 \leq q(F) \leq d(F) \leq 1$. Поскольку (22) справедливо вне множества нулевой плотности, то, очевидно, $q(F) = 1$. Следовательно, $d(F) = 1$.

Заметим, что если (22) имеет место вне некоторого множества нулевой нижней плотности, равенство $d(F) = 1$ получается из оценки (19) теоремы 1. В условиях теоремы 1 аналогичное определение $q(F)$ некорректно, поскольку объединение двух множеств нулевой нижней плотности не обязано иметь нулевую нижнюю плотность. Поэтому в теореме ограничиваемся лишь оценкой (19).

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $\overline{W}$ -нормальна. Для того чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11).

Отметим следующее. Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (20). Если даже последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ не является $\overline{W}$ -нормальной, всегда имеется функция $F \in D(\Lambda, R)$, для которой $q(F) = d(F) = 1$ [3]. В этом главный смысл оценки (21).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $P = \{p_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right),$$

причем последовательность $\{Q'(p_n)\}$ $\overline{W}$ -нормальна.

Для того, чтобы для любой целой функции f конечного порядка, имеющей вид

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad a_n \neq 0, \quad (23)$$

выполнялось равенство $d(f) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p_n \leq x} \frac{1}{p_n} = 0. \quad (24)$$

Здесь $d(f) = \inf_{\gamma} d(f, \gamma)$, γ – любая кривая, уходящая в бесконечность,

$$d(f, \gamma) = \overline{\lim}_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|; f)}.$$

Следствие легко вытекает из теоремы 2, если сделать замену $z = e^s$. Действительно,

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s}$$

– целая функция конечного R -порядка. Следовательно, $d(f) = d(F)$, и все следует из теоремы 2.

Пусть целая функция f конечного порядка имеет вид (23). Если последовательность $P = \{p_n\}$ имеет нулевую плотность, то $d(f) = 1$. Этот факт впервые был установлен Г. Пойа в работе [7]. Заметим, что равенство $d(f) = 1$ легко вытекает также из теоремы 2 (см. следствие). Действительно, так как плотность последовательности $P = \{p_n\}$ равна нулю, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p_n \leq x} \frac{1}{p_n} = 0.$$

Следовательно, условие (24) подавно выполнено. Более того, индекс конденсации $\delta = 0$ [2]. Это означает, что существует функция $\theta \in L$, $\theta(x) = o(x)$, такая, что

$$-\ln |Q'(p_n)| \leq \theta(p_n), \quad n \geq 1.$$

Ясно, что $\theta \in \overline{W}$. Значит, последовательность $\{Q'(p_n)\}$ $\overline{W}$ -нормальна. Но тогда, как следует из теоремы 2, $d(f) = 1$.

В случае, когда γ – луч $\mathbb{R}_+$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность, причем $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$, $n \geq 1$, результат Поля из [7] перенесен М. Н. Шереметой на ряды Дирихле (2) из класса $D(\Lambda, R)$ [8].

В работе [9] показано, что если $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ (δ – индекс конденсации, Δ – плотность последовательности Λ), то для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ и любой кривой γ из Γ выполняется равенство $d(F; \gamma) = 1$. Если кривая содержится в некоторой горизонтальной полосе конечной ширины, аналогичная оценка установлена в статье [10].

Теорема 2 является обобщением всех перечисленных выше результатов, и в классе целых функций $F \in D(\Lambda, R)$ она носит законченный характер.

3. Доказательство теоремы 1. Имеем

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^x \frac{dn(t)}{t} = \frac{n(x)}{x} + \int_0^x \frac{n(t)}{t^2} dt = \frac{N(x)}{x} + \frac{n(x)}{x} + \int_0^x \frac{N(t)}{t^2} dt.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} - \int_0^x \frac{N(t)}{t^2} dt \right| \leq \frac{n(x)}{x} + \frac{N(x)}{x}.$$

Но функции $n(x)$, $N(x)$ имеют одинаковые порядки и типы [11]. В данном случае

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x} < \infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} < \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} - \int_0^x \frac{N(t)}{t^2} dt \right| \leq a < \infty.$$

Значит, из (11) получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{N(t)}{t^2} dt = 0.$$

Положим $w(t) = \max(\sqrt{t}, N(et))$. Ясно, что $w \in \underline{W}$. Тогда существует функция $w^*(x) \in \underline{W}$ такая, что $w^*(x) = \beta(x)w(x)$ ($0 < \beta(x) \uparrow \infty$).

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w_1(v) = 3 \ln \mu(\sigma), \quad (25)$$

где $w_1(x) = \sqrt{\beta(x)} w(x)$. Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{w_1(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty.$$

Следовательно,

$$R_v \leq \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-\lambda_n h} \leq \mu(\sigma + h) C \exp\left(\max_{t \geq v} \varphi(t)\right),$$

где

$$\varphi(t) = 2 \ln t - ht, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Поскольку $\varphi'(t) = 0$ в точке t_0 ,

$$t_0 = \frac{2}{h} = 2 \frac{v}{w_1(v)} \leq 2 \frac{v}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} < v = v(\sigma)$$

при $\sigma \geq \sigma_0$, то при $\sigma \rightarrow \infty$

$$R_v \leq C\mu(\sigma + h) \exp[-v(1 + o(1))h] = C\mu(\sigma + h) \exp[-(1 + o(1))w_1(v)]. \quad (26)$$

Положим $u(\sigma) = \ln 3 + \ln \ln \mu(\sigma)$. Поскольку $\mu(\sigma) \leq M(\sigma)$, а $F \in D(\Lambda, R)$, то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{u(\sigma)}{\sigma} < \infty.$$

Следовательно, с учетом (25) при $\sigma \geq \sigma_0$ имеем

$$\ln w_1(v(\sigma)) = u(\sigma) \leq A\sigma, \quad 0 < A < \infty.$$

Но $\sqrt{x} \leq w_1(x)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sigma} \leq \frac{2A}{\ln v(\sigma)}, \quad \sigma \geq \sigma_0. \quad (27)$$

Далее, поскольку $w^* \in \underline{W}$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w^*(x)}{x \ln x} = 0, \quad (28)$$

а для некоторой последовательности $\{t_j\}$ ($0 < t_j \uparrow \infty$)

$$\lim_{t_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t_j} \int_1^{t_j} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = 0. \quad (29)$$

Более того, если τ_j — корень уравнения $v(\sigma) = t_j$, то из (27), (29) получаем, что

$$\lim_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_j} \int_1^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = 0.$$

Далее, из (27), в частности, имеем $\ln v(\tau_j) = O(\tau_j)$ при $\tau_j \rightarrow \infty$. Так как $w_1(x) \leq w^*(x)$, видим, что для пары функций u и w_1 все условия леммы 1 выполнены. Поэтому, применяя эту лемму и учитывая при этом (17), (27), (28), а также то, что $\ln v(\tau_j) = O(\tau_j)$ при $\tau_j \rightarrow \infty$, вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$,

$$\text{mes}(E'_\beta \cap [0, \tau_j]) \leq o(\ln v(\tau_j)) + 4 \int_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = o(\tau_j), \quad \tau_j \rightarrow \infty, \quad (30)$$

при $\sigma \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\mu(\sigma + (\beta^{-1} + 1)h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (31)$$

Следовательно, из (26), (31) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$R_v \leq C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp[-w_1(v)(1+o(1))] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \quad (32)$$

Пусть

$$P_a(s) = \sum_{\lambda_n \leq a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it.$$

Тогда [2]

$$a_n = e^{-\alpha \lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_n(t) P_a(t + \alpha) dt, \quad (33)$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q'_a(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \leq a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad (34)$$

а C – любой замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму q_a , т.е. начало координат.

Положим $a = v(\sigma)$, а в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h(\sigma)\}$. Пусть $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ такое, что $\alpha \in \gamma$. Поскольку для $\lambda_n \leq v(\sigma)$

$$\frac{1}{|q'_v(\lambda_n)|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}, \quad n \geq 1,$$

из (33), (34) получаем, что для любого $\lambda_n \leq v(\sigma)$

$$\begin{aligned} |a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} &\leq h(\sigma) \left[\max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| + \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j(\sigma + h(\sigma))} \right] \\ &\times \int_0^\infty M(r + 2; q_v) e^{-h(\sigma)r} dr. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \ln M(R; q_v) &= n(v) \ln \left(1 + \frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2 \int_0^v \frac{n(t)}{t(t^2 + R^2)} dt \\ &\leq \frac{n(v)}{v} R + 2N(v) = o(1)h(\sigma)R + o(1) \ln \mu(\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (31) и оценку типа (32), из (35) получаем, что для всех $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)|. \quad (36)$$

Пусть $\mu^*(\sigma)$ – максимальный член ряда

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \quad (37)$$

Так как

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q'(\lambda_n)|}{\lambda_n} < \infty,$$

данный ряд абсолютно сходится во всей комплексной плоскости и его сумма имеет конечный R -порядок.

Пусть $p = p(\sigma)$ – решение уравнения $w_1(p) = 2 \ln \mu^*(\sigma)$, а

$$R_p^* = \sum_{\lambda_n > p} |a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}, \quad p = p(\sigma).$$

Поскольку $F^* \in D(\Lambda, R)$, то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{u^*(\sigma)}{\sigma} < \infty, \quad u^*(\sigma) = \ln 2 + \ln \ln \mu^*(\sigma).$$

Поэтому, применяя лемму 1, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка для R_v , получаем, что

$$R_p^* \leq C \mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2},$$

если $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ (E_1 от β не зависит),

$$\text{mes}(E_1 \cap [0, x_j]) \leq o(\ln p(x_j)) + 4 \int_{p(x_1)}^{p(x_j)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt, \quad x_j \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Здесь x_j – решение уравнения $p(\sigma) = t_j$, а $\{t_j\}$ – последовательность, фигурирующая в условии (29). Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma)$, если $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E_1$. Здесь $k(\sigma)$ – центральный индекс ряда (37). Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1

$$\mu^*(\sigma) \leq \mu(\sigma) e^{w(p(\sigma))} = \mu(\sigma) [\mu^*(\sigma)]^{o(1)},$$

т.е.

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma). \quad (39)$$

Рассмотрим последовательность $\{\tau_j^*\}$, где $\{\tau_j^*\} = \min(\tau_j, x_j)$. Поскольку $t_j = p(x_j) = v(\tau_j)$, из оценок типа (27) получаем, что

$$\frac{1}{\tau_j^*} \leq \frac{B}{\ln t_j}, \quad j \geq 1.$$

Следовательно, если $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$, то, учитывая (30), (38), при $\tau_j^* \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\text{mes}(E_\beta \cap [0, \tau_j^*])}{\tau_j^*} &\leq \frac{B}{\ln t_j} (\text{mes}(E'_\beta \cap [0, \tau_j]) + \text{mes}(E_1 \cap [0, x_j])) \\ &\leq \frac{B}{\ln t_j} \left[o(\ln t_j) + 8 \int_{t_1}^{t_j} \frac{w^*(t)}{t^2} dt \right] = o(1). \end{aligned}$$

Поскольку $R_v \leq 1$, $R_p^* \leq 1$ ($v = v(\sigma)$, $p = p(\sigma)$) при $\sigma \geq \sigma_2$, $\sigma \notin E_\beta$, то, очевидно,

- 1) $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$,
- 2) $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma)$,

где $\nu(\sigma)$, $k(\sigma)$ – центральные индексы рядов (2) и (37).

Далее, для $\lambda_n \leq p(\sigma)$

$$|Q'(\lambda_n)| \leq \frac{2}{\lambda_n} \prod_{\substack{j \neq n \\ \lambda_j \leq p(\sigma)}} \left| 1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2} \right| \leq \frac{2}{\lambda_1} \prod_{\lambda_j \leq p(\sigma)} \left| 1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2} \right|.$$

Но при $\lambda_n \leq p(\sigma)$ и $\sigma \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln \prod_{\lambda_j \leq p(\sigma)} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2} \right) &= n(p) \ln \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{p^2} \right) + 2p^2 \int_0^p \frac{n(t)}{t(t^2 + p^2)} dt \\ &\leq n(p) \frac{\lambda_n}{p} + 2N(p) \leq 3N(ep) = o(\ln \mu^*(\sigma)). \end{aligned}$$

Так что для $\lambda_n \leq p(\sigma)$ и $\sigma \rightarrow \infty$

$$|Q'(\lambda_n)| \leq [\mu^*(\sigma)]^{(o(1))}.$$

Следовательно,

$$\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma) [\mu^*(\sigma)]^{o(1)},$$

где $p = p(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, $(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Так что $w_1(p) = 2 \ln \mu^*(\sigma) < 3 \ln \mu(\sigma) = w_1(v)$, $\sigma \geq \sigma_3$. Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_3$, $\sigma \notin E_\beta$. С учетом этого из (36) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)|, \quad (40)$$

где $\alpha = \sigma + i\tau$, $\alpha \in \gamma$.

Дальнейшие рассуждения основаны на лемме 2.

Пусть $\gamma(\alpha)$ – часть кривой, содержащейся в круге $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$, $0 < \beta \leq 1/5$, $h = h(\sigma)$. Она не обязательно кусочно-гладкая и жорданова. Поэтому поступаем следующим образом.

Пусть α_1 – какая-нибудь точка кривой $\gamma(\alpha)$, принадлежащая окружности $\partial \overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$. Соединим точку α_1 с α ломаной $l(\alpha)$ без самопересечений и такой, что

$$\rho(\xi) = \inf_{z \in \gamma(\alpha)} |F(z) - F(\xi)| \leq m_\alpha, \quad (41)$$

где $\xi \in l(\alpha)$, $m_\alpha = \max_{\gamma(\alpha)} |F(t)|$. Это можно сделать. Действительно, для любого $z \in \gamma(\alpha)$ существует окрестность $D(z; \nu_z)$, $\nu_z > 0$, такая, что

$$|F(z) - F(\xi)| \leq m_\alpha$$

для любого $\xi \in D(z; \nu_z)$. Поскольку $\gamma(\alpha)$ – компакт, по лемме Гейне–Бореля из покрытия $\bigcup_{z \in \gamma(\alpha)} D(z; \nu_z)$ можно выделить конечное подпокрытие: $D(z_0; \nu_0), D(z_1; \nu_1), \dots, D(z_n; \nu_n)$, где $z_i \in \gamma(\alpha)$, $\nu_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Можем считать, что $z_0 = \alpha$, $z_n = \alpha_1$. Соединим между собой центры всех попарно пересекающихся кружков $D(z_i; \nu_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, отрезками прямых. Отбрасывая, если

это необходимо, конечное число отрезков, получим жорданову ломаную $l(\alpha)$, соединяющую точки α и α_1 . Заметим, что $l(\alpha)$ целиком содержится в объединении кружков $D(z_i; \nu_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Осталось проверить оценку (41).

Пусть $\xi \in l(\alpha)$. Тогда существует круг $D(z_i; \nu_i)$, содержащий эту точку. Поскольку $|F(z_i) - F(\xi)| \leq m_\alpha$, то $\rho(\xi) \leq m_\alpha$.

Вернемся теперь к оценке (40). Применяя лемму 2 для круга $\overline{D}(z_0; \beta^{-1}h)$ и кривой $l(\alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| &\leq \max_{l(\alpha)} |F(t)|^{1-2\beta} \max_{|t - \alpha| \leq \beta^{-1}h(\sigma)} |F(t)|^{2\beta} \\ &\leq |F(\xi_\alpha)|^{1-2\beta} M^{2\beta}(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)), \quad \xi_\alpha \in l(\alpha). \end{aligned}$$

Но из (41) следует, что

$$\rho(\xi_\alpha) = |F(\xi_\alpha) - F(z_\alpha)| \leq m_\alpha$$

для некоторой точки $z_\alpha \in \gamma(\alpha)$. Следовательно,

$$\max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| \leq [2m_\alpha]^{1-2\beta} M^{2\beta}(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)) = (2|F(z'_\alpha)|)^{1-2\beta} M^{2\beta}(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)), \quad (42)$$

где $z'_\alpha \in \gamma_\alpha$.

Применяя лемму 1, имеем (см. (31))

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &\leq M(\sigma) \leq M(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma))} \\ &\leq \mu(\sigma + (1 + \beta^{-1})h(\sigma)) \left[n(v(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-h(\sigma)\lambda_n} \right] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad (43) \end{aligned}$$

когда $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества E'_β . Следовательно, с учетом оценок (42), (43) из (40) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$ нулевой нижней плотности

$$(1 + o(1))\mu^*(\sigma) \leq 2|F(z'_\alpha)|^{1-2\beta} \mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta}, \quad z'_\alpha \in \gamma(\alpha).$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_β

$$\frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq (1 + o(1))2\beta + (1 - 2\beta) \frac{\ln |F(z'_\alpha)|}{\ln \mu(\sigma)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{5}.$$

Так как $|\operatorname{Re} z'_\alpha - \sigma| \leq \beta^{-1}h$, учитывая еще раз оценки (43), отсюда окончательно получаем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\sigma \in E_\beta \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \gamma),$$

где $0 < \beta \leq 1/5$, $e_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Достаточность. Последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $\overline{W}$ -нормальна. Следовательно, существует $\theta \in L$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \quad -\ln |Q'(\lambda_n)| \leq \theta(\lambda_n), \quad n \geq 1.$$

Положим $w(x) = \max(N(et), \theta(t), \sqrt{t})$. Ясно, что $w \in \underline{W}$. Но тогда существует функция $w_2 \in \underline{W}$ такая, что $w(x) = o(w_2(x))$, $x \rightarrow \infty$. Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения $w_2(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$, где $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (2). Из теоремы 1 следует, что для любых β , $0 < \beta \leq 1/5$, существует множество $E_\beta \subset [0, \infty)$, $dE_\beta = 0$, такое, что

$$\lim_{\substack{\sigma \in e_\beta \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \gamma), \quad (44)$$

где $e_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$.

Пусть $k = k(\sigma)$ – центральный индекс измененного ряда

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}.$$

В ходе доказательства теоремы 1 было установлено, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq v(\sigma)$ для $\sigma \in e_\beta$. Следовательно, для $\sigma \in e_\beta$

$$\mu(\sigma) \leq \mu^*(\sigma) \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| \leq \mu^*(\sigma) e^{\theta(v(\sigma))} = \mu^*(\sigma) \mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Так что для $\sigma \in e_\beta$ и $\sigma \rightarrow \infty$

$$(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma) \leq \ln \mu^*(\sigma).$$

Но тогда из (44) следует, что

$$1 \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \gamma) \leq 1, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{5}.$$

Устремляя β к нулю, отсюда окончательно получим равенство $d(F; \gamma) = 1$. Следовательно, $d(F) = 1$.

Необходимость. Будем доказывать от противного. Пусть для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ выполняется равенство $d(F) = 1$, но

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} > 0. \quad (45)$$

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \lambda_n)^2} \frac{\varphi^2(\lambda_n)}{Q'(\lambda_n)} e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (46)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda/\lambda_n}, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Поскольку $n(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$, то из (45) следует, что [10]

$$\ln \varphi(x) \leq -dx \ln x + d, \quad x > 0,$$

где $0 < d < \infty$. Следовательно, ряд (46) абсолютно сходится во всей плоскости и R -порядок его суммы не превосходит $d^{-1} < \infty$. В работе [10] показано, что $|F(\sigma)| \leq M < \infty$ для $0 \leq \sigma < \infty$. Это означает, что $d(F; [0, \infty)) \leq 0$. Так что $d(F) \leq 0$. Получили противоречие. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [2] Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
- [3] Гайсин А. М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 8. С. 55–82.
- [4] Beurling A. Some theorems on boundedness of analytic functions // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 355–359.
- [5] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
- [6] Гайсин А. М., Латыпов И. Д. Асимптотика логарифма максимального члена измененного ряда Дирихле // Изв. вузов. Матем. 2002. № 9(484). С. 15–24.
- [7] Pólya. G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640.
- [8] Шеремета М. Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 235–245.
- [9] Гайсин А. М. Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 8. С. 47–56.
- [10] Гайсин А. М. Об одной гипотезе Поля // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 73–92.
- [11] Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.

(А. М. Гайсин) Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН
(И. Д. Латыпов) Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: gaisin@imat.rb.ru, latypovid@yandex.ru

Поступило
16.08.2004