Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Оценки энтропии множества средних некоторых классов стационарных и квазистационарных последовательностей, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 52–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:56:57

УДК 519.2

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИИ МНОЖЕСТВА СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТАЦИОНАРНЫХ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. Ф. Гапошкин

Рассматривается множество средних арифметических некоторых классов стационарных и квазистационарных последовательностей. Приводятся оценки энтропии этого множества, точные по порядку в рассматриваемых классах.

Библиография: 5 названий.

Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательность случайных величин в $L^2(\Omega)$; $\|X\| = (E|X|^2)^{1/2}$, $A = (A_n)$ – последовательность их средних арифметических,

$$A_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если (X_k) – стационарная в широком смысле последовательность, или $X_k = U^{k-1}f$, $f \in L^2$, U – изометрический оператор, то по статистической эргодической теореме последовательность A_n всегда сходится по норме.

В работах [1]–[3] исследовался порядок метрической энтропии $N(\varepsilon)$ предкомпактного множества $A = (A_n)_{n=1}^{\infty}$, где при $\varepsilon > 0$ $N(\varepsilon)$ – наименьшее число замкнутых шаров радиуса ε в $L^2(\Omega)$, покрывающих A . В работах [1], [2] показано, что для любых $f \in L^2$ и U справедлива оценка

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

Кроме того, имеются примеры пар (f, U) , для которых

$$N(\varepsilon) \geq c_0 \varepsilon^{-2}, \quad c_0 > 0.$$

В работе [3] получен следующий результат. Пусть стационарная последовательность (X_k) удовлетворяет при некотором $\alpha > 0$ условию

$$\int_{0 < |\lambda| < \lambda_0} \left(\lg \frac{1}{|\lambda|} \right)^{\alpha} dF(\lambda) < \infty, \quad (2)$$

где $dF(\lambda)$ – спектральная мера последовательности. Тогда справедлива оценка

$$N(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-2} \left(\lg \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\alpha}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Естественно рассмотреть и другие классы стационарных последовательностей, заданные некоторыми ограничениями на их спектральную меру или корреляционную функцию. Далее предполагается, что (X_k) – некоторая последовательность случайных величин из $L^2(\Omega)$, для которой выполнено следующее *условие квазистационарности*: при некоторых $C_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 2$

$$\left\| n^{-1} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \right\|^2 \leq C_0^2 n^{-\alpha}, \quad \forall m \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Если (X_k) – стационарная последовательность, то при оценке энтропии можно считать, не уменьшая общности, что $EX_k = 0$. Пусть $K(n)$ – корреляционная функция, $K(n) = EX_k X_{k+n}$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$. Ограничение (4) тесно связано с аналогичными ограничениями на $K(n)$ или спектральную меру $dF(\lambda)$. Известны следующие утверждения (см., например, [4], [5]).

ЛЕММА 1. А) Если при некотором $0 < \alpha < 1$ и $C_1 > 0$ выполнено условие

$$|K(n)| \leq C_1 n^{-\alpha},$$

то выполнено условие (4).

Б) Если при некоторых $0 < \alpha < 1$ и $\lambda_0 > 0$

$$\int_{0 < |\lambda| < \lambda_0} |\lambda|^{-\alpha} dF(\lambda) < \infty, \quad F(+0) - F(-0) = 0,$$

то выполнено условие (4).

В) Если для стационарной последовательности выполнено условие (4) при некотором $\alpha > 2$, то $X_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, почти всюду.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие квазистационарности (4). Тогда для энтропии $N(\varepsilon)$ множества средних справедливо неравенство

$$N(\varepsilon) \leq C_0 D_\alpha \varepsilon^{-1}. \quad (5)$$

Постоянные D_α допускают оценку

$$D_\alpha \leq \left(\frac{2 - \alpha}{\alpha} \right)^{(2 - \alpha)/\alpha} + 2 \quad \text{при } 0 < \alpha < 1, \quad D_\alpha \leq 3 \quad \text{при } 1 \leq \alpha \leq 2.$$

Таким образом, даже при близких к нулю значениях α порядок по ε верхней оценки энтропии в соответствующем классе стационарных или квазистационарных последовательностей существенно улучшается по сравнению с общей оценкой (1).

Отметим также, что доказательства оценок (1), (3) были достаточно сложными. Они использовали тонкие оценки стохастической спектральной меры стационарной последовательности и метод регуляризации этой меры. В то же время доказательство теоремы 1 использует только оценки норм $\|A_n - A_m\|$ и поэтому проходит также и для квазистационарных последовательностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если условие (4) выполнено при некотором $\alpha_1 > 0$, то оно выполнено и при всех $\alpha > \alpha_1$. Поэтому $D_\alpha \leq D_1$ при $1 < \alpha \leq 2$, и достаточно доказать теорему 1 в случае $0 < \alpha \leq 1$.

ЛЕММА 2. Пусть при некотором $0 < \alpha \leq 1$ выполнено условие (4). Тогда

$$\|A_n - A_m\|^2 \leq \rho^2(n, m) \quad \text{при} \quad 1 \leq m < n, \quad (6)$$

где

$$\rho^2(n, m) = 2^{2-\alpha} C_0^2 \frac{(n-m)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha} m^\alpha}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем при $n > m$

$$A_n - A_m = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \sum_{k=1}^m X_k + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^n X_k,$$

откуда

$$\|A_n - A_m\|^2 \leq 2C_0^2 \left[\frac{(n-m)^2}{n^2 m^2} m^{2-\alpha} + \frac{1}{n^2} (n-m)^{2-\alpha} \right].$$

Используя неравенство $m^\alpha + (n-m)^{2-\alpha} \leq 2^{1-\alpha} n^\alpha$, получим (6), (7).

Пусть

$$0 < \beta \leq 1; \quad (8)$$

тогда $B = \beta^{-1} \geq 1$. Положим $\alpha_0 = 1$ и определим последовательно $a_1, a_2, \dots$ из уравнений

$$a_{k+1}(1 - a_{k+1}^\beta)^{-1} = a_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Очевидно, что на каждом шаге решения $a_1, a_2, \dots$ определяются однозначно, $0 < a_k < 1$, и $a_{k+1} < a_k$, $k = 0, 1, \dots$.

ЛЕММА 3. Справедливы оценки

$$\frac{1}{(k+1)^B} \leq a_k \leq \left(\frac{B}{B+k} \right)^B, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $b_k = a_k^B$; тогда $a_k = b_k^\beta$ и нужно проверить неравенства

$$\frac{1}{k+1} \leq b_k \leq \frac{B}{B+k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Применим индукцию. При $k = 0$ эти соотношения выполнены. Равенство (9) переписывается в виде $b_{k+1} = (1 - b_{k+1})^\beta b_k$. Так как $0 < \beta \leq 1$, то

$$(1 - b_{k+1})b_k \leq b_{k+1} \leq (1 - b_{k+1})^\beta b_k.$$

Если $b_k \leq B/(B+k)$, то

$$b_{k+1} \leq (1 - b_{k+1})^\beta \frac{B}{B+k}, \quad \text{т.е.} \quad b_{k+1} \leq \frac{B}{B+k+1}.$$

Аналогично, если $b_k \geq (k+1)^{-1}$, то

$$b_{k+1} \geq (1 - b_{k+1}) \frac{1}{k+1} \quad \text{и} \quad b_{k+1} \geq \frac{1}{k+2}.$$

Лемма 3 доказана.

Далее удобно считать, что функция $\rho^2(n, m)$ задается формулой (7) при любых действительных $n > m > 0$. Пусть выполнено предположение (4). Будем считать, что

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \leq 1, \quad B = \beta^{-1}, \quad n_0 = \varepsilon^{-(\beta+1)/\beta}. \quad (11)$$

Найдем рекуррентно положительные числа $n_1, n_2, \dots$ из уравнений

$$n_k = \frac{n_{k+1}}{1 - \varepsilon^{\beta+1} n_{k+1}^\beta}. \quad (12)$$

ЛЕММА 4. При сделанных предположениях

- 1) числа n_k однозначно определяются из уравнений (12);
- 2) $n_k = a_k \varepsilon^{-(\beta+1)/\beta}$, где монотонно убывающие числа a_k удовлетворяют уравнению (9), $a_0 = 1$;
- 3) при $n \in [n_k, n_{k+1}]$ справедлива оценка

$$\rho^2(n, n_k) \leq 2^{2-\alpha} C_0^2 \varepsilon^2. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если обозначить $a_0 = 1$, $a_k = \varepsilon^{(\beta+1)/\beta} n_k$, то числа a_k будут удовлетворять уравнению (9) и утверждения 1) и 2) следуют из леммы 3.

Утверждение 3) означает, что

$$\frac{(n - n_k)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha} n_k^\alpha} \leq \varepsilon^2 \quad \text{или} \quad n - n_k \leq \varepsilon^{\beta+1} n_k^\beta,$$

что верно при $n \in [n_k, n_{k+1}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Далее $K(0, \varepsilon)$ – замкнутый шар в L^2 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле, $K(l, \varepsilon)$ – замкнутые шары радиуса ε с центрами в A_l , $l = 1, 2, \dots$. Пусть числа $\alpha, \beta, \varepsilon, B, n_0$ удовлетворяют (11). Положим $\varepsilon_1 = 2^{(2-\alpha)/2} C_0 \varepsilon$ и построим ε_1 -сеть для $A = (A_n)_{n=1}^\infty$ следующим образом. Так как $n_0 = \varepsilon^{-(\beta+1)/\beta}$, то при $n \geq n_0$

$$\|A_n\|^2 \leq C_0^2 n^{-\alpha} \leq C_0^2 \varepsilon^2,$$

т.е. $\{A_n; n \geq n_0\} \subset K(0, \varepsilon_1)$. Далее интересен лишь случай $0 < \varepsilon < 1$, когда $n_0 > 1$. Образуем по формулам (12) действительные числа $n_1, n_2, \dots$. По лемме 4 при $n \in [n_k, n_{k+1}]$

$$\rho^2(n, n_k) \leq 2^{2-\alpha} C_0^2 \frac{(n - n_k)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha} n_k^\alpha} \leq \varepsilon_1^2.$$

Числа n_k могут оказаться не целыми. Положим $s = [\varepsilon^{-1}]$ и $m_k = n_k$ при n_k целом, $m_k = [n_k] + 1$, $k = 1, 2, \dots, s$, при n_k не целом. Образует множество $D = \{0, A_1, A_2, \dots, A_{m_s-1}, A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_s}\}$. Так как $B + s \geq \varepsilon^{-1}$, то

$$m_s \leq n_s + 1 \leq \left(\frac{B}{B+s} \right)^B \varepsilon^{-B-1} + 1 \leq B^B \varepsilon^{-1} + 1.$$

Значит, $\text{card } D = m_s + s \leq (B^B + 1)\varepsilon^{-1} + 1$. Покажем, что D является ε_1 -сетью для $A = (A_n)$. Рассмотрим любое целое n , $n_s \leq n < n_0$. Тогда при некотором k , $1 \leq k \leq s$, имеем $n_k \leq n < n_{k-1}$. Так как

$$\frac{(n - m_k)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha} m_k^\alpha} \leq \frac{(n - n_k)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha} n_k^\alpha},$$

из (13) следует, что $\rho^2(n, m_k) \leq \varepsilon_1^2$, т.е. $A_n \in K(m_k, \varepsilon_1)$. Итак, любой элемент A_n входит либо в шар $K(0, \varepsilon_1)$, если $n \geq n_0$, либо в какой-то шар $K(m_k, \varepsilon_1)$, $1 \leq k \leq s$, если $m_k \leq n < n_0$, либо является центром шара $K(n, \varepsilon_1)$, если $1 \leq n < m_k$. Значит,

$$N(\varepsilon_1) \leq \text{card } D \leq (B^B + 1)\varepsilon^{-1} + 1.$$

Так как эта оценка справедлива при любом $\varepsilon > 0$, а $\varepsilon_1 = 2^{(2-\alpha)/2} C_0 \varepsilon$, то

$$N(\varepsilon) \leq (B^B + 1)2^{(2-\alpha)/2} C_0 \varepsilon^{-1} + 1.$$

Теорема 1 доказана.

Следующие два примера показывают точность оценки теоремы 1 (по порядку ε при $\varepsilon \rightarrow 0$). Если (X_k) – ортонормированная система (ОНС) в $L^2(\Omega)$, то при всех $n, m \geq 1$ имеем $\|n^{-1} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k\|^2 = n^{-1}$, т.е. выполнено неравенство (4) при $\alpha = 1$.

ПРИМЕР 1 [2, с. 105]. Для любой ОНС справедливы оценки энтропии средних $C_1 \varepsilon^{-1} \leq N(\varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{-1}$ при некоторых $C_1, C_2 > 0$. Константы нетрудно оценить, а именно,

$$\varepsilon^{-1} - 1 \leq N(\varepsilon) \leq [2\varepsilon^{-1}] + 1 \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим теперь крайний случай, когда стационарная последовательность (X_k) удовлетворяет условию (4) с максимально возможным показателем $\alpha = 2$. Как известно, пример такой последовательности может быть построен в виде

$$X_k = \frac{Y_k - Y_{k+1}}{\sqrt{2}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где (Y_k) – некоторая ОНС. Тогда

$$A_n = \frac{Y_1 - Y_{n+1}}{n\sqrt{2}}, \quad \|A_n\|^2 = n^{-2}.$$

ПРИМЕР 2. Для этой стационарной последовательности (X_k) справедливы оценки энтропии

$$[(\sqrt{2}\varepsilon)^{-1}] \leq N(\varepsilon) \leq [\varepsilon^{-1}] + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$2\|A_n - A_m\|^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}.$$

Поэтому если $m \leq (\sqrt{2}\varepsilon)^{-1}$, а n любое, то $\|A_n - A_m\| > \varepsilon$. Следовательно, $N(\varepsilon) \geq [(\sqrt{2}\varepsilon)^{-1}]$. С другой стороны, при $n > \varepsilon^{-1}$ $\|A_n\|^2 \leq n^{-2} < \varepsilon^2$, т.е. $\{A_n; n > \varepsilon^{-1}\} \subset K(0, \varepsilon)$, и множество $D = \{0, A_1, A_2, \dots, A_{n_0}\}$ образует ε -сеть для A , $n_0 = [\varepsilon^{-1}]$. Следовательно, $N(\varepsilon) \leq n_0 + 1 = [\varepsilon^{-1}] + 1$.

Любопытно, что существуют нетривиальные стационарные последовательности, для которых $N(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Пусть X_1 — некоторая случайная величина, и

$$EX_1 = 0, \quad \|X_1\| = 1, \quad X_k = (-1)^k X_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Эта последовательность является стационарной, ее корреляционная функция имеет вид $K(n) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

ПРИМЕР 3. Для последовательности (14) энтропия множества средних A имеет порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$, точнее,

$$[(2\varepsilon)^{-1/2}] \leq N(\varepsilon) \leq 2[\varepsilon^{-1/2}]. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Средние A_n имеют вид $A_{2n} = 0$, $A_{2n-1} = (2n-1)^{-1}X_1$. В частности, (X_n) удовлетворяет условию (4) при $\alpha = 2$. Очевидно, что энтропия одномерного множества (A_n) в $L^2(\Omega)$ совпадает с энтропией числовой последовательности $(0, 1, 1/3, 1/5, \dots)$ на $[0, 1]$. Поэтому оценки (15) вытекают из следующей леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $a_n = n^{-1}$, $b_n = (2n-1)^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$ и $E = \{0, a_n\}_{n=1}^\infty$, $F = \{0, b_n\}_{n=1}^\infty$ — соответствующие компактные множества на отрезке $[0, 1]$. Энтропия этих множеств при $0 < \varepsilon < 1$ удовлетворяет неравенствам

$$[\varepsilon^{-1/2}] - 1 \leq N_E(\varepsilon) \leq 2\varepsilon^{-1/2}, \quad (2\varepsilon)^{-1/2} \leq N_F(\varepsilon) \leq 2\varepsilon^{-1/2}.$$

Так как в литературе это простое утверждение нам не встречалось, приведем его доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $N_E(\varepsilon) = N(\varepsilon)$. Можно считать, что $0 < \varepsilon < 1/4$, так как при $\varepsilon \geq 1/4$ множество E содержится в двух “ ε -шарах” $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$, $1 \leq N(\varepsilon) \leq 2$. Так как $a_n - a_{n+1} > (n+1)^{-2} \geq \varepsilon$ при $1 \leq n \leq n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) = [\varepsilon^{-1/2}]$, то элементы множества $\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$ являются ε -изолированными и $N(\varepsilon) \geq [\varepsilon^{-1/2}] - 1$. Остальные элементы множества A расположены на отрезке $[0, n_0^{-1}]$, ε -энтропия которого не превосходит $(2\varepsilon n_0)^{-1}$. Следовательно,

$$N(\varepsilon) \leq n_0 - 1 + (2\varepsilon n_0)^{-1} \leq 2\varepsilon^{-1/2}.$$

Оценка $N_F(\varepsilon)$ проходит аналогично; она использует неравенство

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2}{4n^2 - 1} > \varepsilon \quad \text{при} \quad n \leq (2\varepsilon)^{-1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично доказывается, что при любом $\alpha > 0$ энтропия множества $\{n^{-\alpha}; n \geq 1\} \subset [0, 1]$ имеет порядок $O(\varepsilon^{-\alpha/(\alpha+1)})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим два нерешенных вопроса.

ГИПОТЕЗА 1. Не существует стационарной последовательности $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k \neq X_1$ при $k \geq 2$, для которой множество средних арифметических имеет энтропию $N(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-1/2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ГИПОТЕЗА 2. Не существует стационарной последовательности $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k \neq X_1$ при $k \geq 2$, для которой $N(\varepsilon)$ имеет точный порядок $O(\varepsilon^{-\beta})$, $1/2 < \beta < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Конечно, квазистационарные последовательности со сколь угодно медленной скоростью роста энтропии при $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют.

Например, легко построить последовательность случайных величин, для которых при фиксированном $\alpha > 2$ выполнено соотношение $\|A_n\|^2 \leq n^{-\alpha}$. Тогда $N(\varepsilon) \leq \varepsilon^{-2/\alpha}$. Это следует из оценки $\|A_n\|^2 \leq n^{-\alpha} \leq \varepsilon^2$ при $n \geq n(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon) = [\varepsilon^{-2/\alpha}] - 1$, и ε -сеть для $A = (A_n)$ имеет вид $\{0, A_1, A_2, \dots, A_{n(\varepsilon)-1}\}$.

Автор благодарен рецензенту за полезные редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Talagrand M. Applying a theorem of Fernique // Ann. Inst. H. Poincaré. 1996. V. 32. P. 779–799.
- [2] Weber M. Entropie metrique et convergence presque partout. Paris: Hermann, 1998.
- [3] Gamet C., Weber M. Entropy numbers of some ergodic averages // Теор. вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 4. С. 776–795.
- [4] Гапошкин В. Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 6. С. 1365–1392.
- [5] Гапошкин В. Ф. О скорости убывания вероятностей ε -уклоновений средних стационарных процессов // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 366–372.

Московский государственный университет путей сообщения

Поступило
01.03.2004