Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ю. Глазырина, Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:04:19

УДК 517.518.862

НЕРАВЕНСТВО БРАТЬЕВ МАРКОВЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0 НА ОТРЕЗКЕ

П. Ю. Глазырина

В работе получена точная константа в неравенстве братьев Марковых для алгебраических многочленов в пространстве L_0 на отрезке.

Библиография: 12 названий.

1. В 1889 г. А. А. Марков [1] установил неравенство, связывающее равномерную норму производной алгебраического многочлена P_n степени n с нормой самого многочлена,

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |P'_n(t)| \leq n^2 \max_{-1 \leq t \leq 1} |P_n(t)|. \quad (1)$$

Через три года его брат В. А. Марков [2] получил аналогичный результат для старших производных, а именно, он доказал, что при любых $1 \leq k \leq n$ имеют место неравенства

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |P_n^{(k)}(t)| \leq \frac{n^2(n^2 - 1) \cdots (n^2 - (k - 1)^2)}{(2k - 1)!!} \max_{-1 \leq t \leq 1} |P_n(t)|. \quad (2)$$

Неравенства (1), (2) точные, и с точностью до мультипликативной константы единственным экстремальным является многочлен Чебышева первого рода

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

К настоящему времени получено большое количество неравенств такого типа в различных метриках. Мы приведем лишь принципиальные результаты для метрик L_q , $0 < q < \infty$; дополнительную информацию можно найти, например, в [3].

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени n с комплексными коэффициентами. Для $P \in \mathcal{P}_n$ положим

$$\|P\|_q = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |P(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty, \quad \|P\|_\infty = \max_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)|,$$
$$\|P\|_0 = \lim_{q \rightarrow +0} \|P\|_q = \exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |P(t)| dt \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00783, РФФИ-ГФЕН Китая, грант № 02-01-39007, и программы "Ведущие научные школы", грант № НШ-1347.2003.1.

Обозначим через $M_q(n, k)$ точную (наименьшую) константу в неравенстве

$$\|P^{(k)}\|_q \leq M_q(n, k) \|P\|_q, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leq q \leq \infty. \quad (3)$$

В 1937 г. Э. Хилле, Г. Сегё и Я. Д. Тамаркин [4] доказали, что неравенство (1) переносится на метрики $\|\cdot\|_q$, $1 \leq q \leq \infty$, т.е. $M_q(n, 1) \asymp n^2$, $n \rightarrow \infty$. Это же соотношение другим способом было получено Н. К. Бари [5]. Из результатов работы [4] можно, на самом деле, вывести абсолютную оценку

$$M_q(n, 1) \leq 5en^2, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Э. Шмидт [3] нашел, что $M_2(n, 1)/n^2 \rightarrow 1/\pi$, $n \rightarrow \infty$, а П. Дофлер [3] выразил значение $M_2(n, k)$ в терминах наибольшего собственного числа некоторой матрицы. С. В. Конягин [6] (см. также [7]) в 1978 г., изучая весовые неравенства вида (3), получил, в частности, следующие равномерные по n и k оценки величины $M_q(n, k)$ для $q \geq 1$:

$$c_1 M \leq M_q(n, k) \leq c_2 M, \quad \text{где } M = \|T_n^{(k)}\|_\infty \left(\frac{n}{(k+1)(n-k+1)} \right)^{1/q}, \quad (4)$$

а c_1 и c_2 – абсолютные константы.

Из приведенных выше результатов видно, что при фиксированных $q \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$

$$M_q(n, k) \asymp n^{2k}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Последнее соотношение имеет место и при $0 < q < 1$. Это утверждение вытекает из результатов В. И. Иванова [8]. Действительно, при подходящем выборе параметров следствие 1.2 работы [8] дает оценку сверху для $k = 1$ и по индукции для $k > 1$. Для получения оценки снизу достаточно, воспользовавшись идеями и методами Иванова, рассмотреть ультрасферические многочлены $P_n^{(\alpha, \alpha)}(t)$, $(\alpha + 1/2)q \geq 2$. Кроме того, из замечания Конягина в [6] следует, что оценка (4) снизу также остается справедливой при $\delta \leq q < 1$ ($\delta > 0$).

В аналогичной (3) задаче на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов на периоде значение наилучшей константы известно для всех $0 \leq q \leq \infty$, а именно, справедливо точное неравенство

$$\|f_n^{(k)}\|_{q, [0, 2\pi]} \leq n^k \|f_n\|_{q, [0, 2\pi]}, \quad f \in \mathcal{T}_n.$$

При $q = \infty$ это есть классическое неравенство С. Н. Бернштейна (см. [9, с. 26 и авторские замечания на с. 527]), доказанное в 1912–1914 гг. Используя интерполяционную формулу М. Рисса, А. Зигмунд в 1932 г. доказал [10, т. 2, гл. 10] его для $1 \leq q < \infty$. В случае $0 \leq q < 1$ значение точной константы нашел В. В. Арестов [11] в 1979–1981 гг.

В данной работе изучен предельный случай неравенства (3), когда $q = 0$. Относительно этой задачи будет доказано такое утверждение.

ТЕОРЕМА. Для любых натуральных $k \leq n$ во множестве $\mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\|P^{(k)}\|_0 \leq \frac{n! e^k}{(n-k)!} \|P\|_0. \quad (6)$$

Равенство в (6) достигается на многочленах $P(t) = ct^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только на них.

Заметим, что в отличие от (5) при $n \rightarrow \infty$ величина $M_0(n, k)$ растет как n^k .

2. Доказательству теоремы предположим исследование задачи о многочленах наименее уклоняющихся от нуля в пространстве $L_0(-1, 1)$. Обозначим через $\mathcal{P}_n^1$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ степени n со старшим коэффициентом равным 1, т.е. многочленов вида $P(t) = t^n - P_{n-1}(t)$, $P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$. Положим

$$\nu(n) = \min\{\|P\|_0 : P \in \mathcal{P}_n^1\} \quad (7)$$

или, что то же самое, $\nu(n) = \min\{\|t^n - P_{n-1}\|_0 : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$.

ЛЕММА. При любом $n \geq 1$ имеет место равенство $\nu(n) = e^{-n}$ и единственным экстремальным в задаче (7) является многочлен $P_n(t) = t^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен $P \in \mathcal{P}_n^1$ имеет вид

$$P(t) = \prod_{k=1}^n (t - z_k),$$

где $\{z_k\}_{k=1}^n$ — корни P . Функционал $\|\cdot\|_0$ обладает свойством мультипликативности и потому

$$\|P\|_0 = \prod_{k=1}^n \|t - z_k\|_0.$$

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что функция

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt$$

переменного z в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ достигает наименьшего значения в единственной точке $z = 0$ и вычислить это значение. Предположим, что $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; обозначим через $x = x(z)$ точку отрезка $[-1, 1]$, находящуюся ближе всего (в смысле евклидова расстояния) к точке z . Тогда, как легко понять, для всех $t \in [-1, 1]$ выполняется неравенство $|t - z| > |t - x|$, а следовательно, $u(z) > u(x)$. Далее, для $x \in [-1, 1]$ с помощью элементарных выкладок получаем выражение

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - x| dt = \frac{1-x}{2} \ln(1-x) + \frac{1+x}{2} \ln(1+x) - 1.$$

Эта функция четная на отрезке $[-1, 1]$ и, как нетрудно убедиться, возрастает по $|x|$. Поэтому, действительно, минимум функции u в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ достигается в единственной точке $z = 0$ и, к тому же, $u(0) = -1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы, очевидно, эквивалентно утверждению теоремы для значений $n \geq 1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Утверждение теоремы достаточно доказать для $k = 1$. Действительно, предположим, что теорема справедлива для $k = 1$ и некоторого $k_0, 1 \leq k_0 < n$. Тогда для $k_0 + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|P^{(k_0+1)}\|_0 &= \|(P')^{(k_0)}\|_0 \leq \frac{(n-1)! e^{k_0}}{(n-1-k_0)!} \|P'\|_0 \\ &\leq \frac{(n-1)! e^{k_0}}{(n-1-k_0)!} n e \|P\|_0 = \frac{n! e^{k_0+1}}{(n-(k_0+1))!} \|P\|_0. \end{aligned}$$

В силу предположения первое неравенство обращается в равенство на многочленах, у которых $P'(t) = c_0 t^{n-1}$ или, что то же самое, $P(t) = c_1 t^n + c_2$, второе – на многочленах $P(t) = ct^n$. Следовательно, многочлены $P(t) = ct^n$, и только они, будут экстремальными при любом $k, 1 \leq k \leq n$.

С этого момента мы будем изучать наилучшую константу $M(n) = M_0(n, 1)$ в неравенстве

$$\|P'\|_0 \leq M(n) \|P\|_0, \quad P \in \mathcal{P}_n; \quad (8)$$

для константы $M(n)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} M(n) &= \sup \left\{ \frac{\|P'\|_0}{\|P\|_0} : P \in \mathcal{P}_n, P_n \neq \text{const} \right\} = \exp \left(\frac{\Lambda(n)}{2} \right), \\ \Lambda(n) &= \sup \left\{ \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{P'(t)}{P(t)} \right| dt : P \in \mathcal{P}_n, P_n \neq \text{const} \right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что многочлен P имеет степень n , $A_n \neq 0$ – старший коэффициент P , а $z_1, \dots, z_n$ – его корни и, значит,

$$P(t) = A_n \prod_{k=1}^n (t - z_k).$$

Тогда

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}. \quad (9)$$

Если $n - m$ корней $z_{m+1}, \dots, z_n$ многочлена P устремить к ∞ , то в силу (9) отношение P'/P стремится к отношению P'_m/P_m для многочлена $P_m(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)$ порядка m . В связи с этим фактом представляется естественным следующее соглашение. В том случае, когда точная степень многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ есть $m < n$, будем считать, что точка $z = \infty$ является корнем P порядка $n - m$. Таким образом, многочлены $P \in \mathcal{P}_n$ определяют и определяются (с точностью до мультипликативной константы) набором $Z = (z_1, \dots, z_n)$ из n корней, принадлежащих расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Исключим из рассмотрения многочлены, тождественно равные константе, так что точка $Z = (z_1, \dots, z_n)$ будет отлична от точки $\infty^n = (\infty, \dots, \infty)$, у которой все n координат есть ∞ . Положим

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= \Phi(z_1, \dots, z_n) = \int_{-1}^1 \ln |\phi(t, Z)| dt, \quad \phi(t, Z) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}, \\ Z &= (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \{\infty^n\}; \end{aligned}$$

при этом, если некоторое z_k есть бесконечно удаленная точка, то соответствующее слагаемое в последней сумме считается равным нулю. Функция Φ на множестве $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$ симметрическая, непрерывная и обладает свойством $\Phi(Z) \rightarrow -\infty$, если $Z \rightarrow \infty$, а точнее, если $\min\{|z_k|, 1 \leq k \leq n\} \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\Lambda(n) = \sup\{\Phi(Z) : Z \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n\}$$

и, очевидно, верхняя грань достигается в некоторой точке $Z^* = (z_1, \dots, z_n)$ из $\overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$.

Убедимся, что при любом $n \geq 1$ функция Φ принимает на множестве $\overline{\mathbb{C}}^n$ максимальное значение $\Lambda(n)$ в единственной точке $0^n = (0, \dots, 0)$, все n координат которой равны нулю, и, как следствие, $\Lambda(n) = 1 + \ln n$. Обозначим это утверждение через $T(n)$. Очевидно, что $T(n)$ эквивалентно тому, что в $\mathcal{P}_n$ имеет место неравенство (8) с константой $M(n) = ne$, причем на полиномах $P(t) = ct^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только на них, это неравенство обращается в равенство; т.е. $T(n)$ эквивалентно утверждению теоремы при $k = 1$, $n \geq 1$.

Обоснуем справедливость утверждения $T(n)$ при всех $n \geq 1$ индукцией по n . В силу замечания к лемме это утверждение справедливо при $n = 1$. Докажем, что если имеет место утверждение $T(n-1)$, $n \geq 2$, то имеет место и утверждение $T(n)$. Пусть $P^* \in \mathcal{P}_n$ — экстремальный многочлен неравенства (8) и $Z^* = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$ — набор его нулей, или, что то же самое, Z^* есть точка максимума функции Φ в $\overline{\mathbb{C}}^n$. Точка Z^* имеет хотя бы одну координату, отличную от ∞ ; обозначим номер этой координаты через $\bar{j}$. Пусть $j \neq \bar{j}$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_j(z) = \Phi(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

(одного) переменного $z \in \overline{\mathbb{C}}$; ее можно представить в виде

$$\Phi_j(z) = \int_{-1}^1 \ln |\phi_j(t, z)| dt, \quad \phi_j(t, z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{t - z_k} + \frac{1}{t - z}.$$

При фиксированном z функция $\phi_j(t, z)$ рациональная по переменной t , не равная тождественно нулю, с коэффициентами, непрерывно зависящими от z . Отсюда вытекает непрерывность $\Phi_j(z)$ по z в $\overline{\mathbb{C}}$. С другой стороны, для $t \in [-1, 1] \setminus \{z_k\}_{k=1}^n$ функция $\phi_j(t, z)$ переменного z аналитична в области $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, а значит, функция $\ln |\phi_j(t, w)|$ субгармонична в этой области (см., например, [12, гл. 1, § 2.1]). Проверим, что функция $\Phi_j(z)$ также будет субгармоничной в той же области G . Действительно, для любой точки $z_0 \in G$ и произвольного $r > 0$ такого, что $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subset G$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_j(z_0 + re^{iu}) du &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \ln |\phi_j(t, z_0 + re^{iu})| dt du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\phi_j(t, z_0 + re^{iu})| du dt \\ &\geq \int_{-1}^1 \ln |\phi_j(t, z_0)| dt = \Phi_j(z_0), \end{aligned}$$

а это и значит, что функция Φ_j является субгармонической в области G .

Функция Φ_j , как субгармоническая функция в $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ и непрерывная в $\overline{G} = \overline{\mathbb{C}}$, либо является константой в $\overline{\mathbb{C}}$, либо не имеет локальных максимумов в G , а следовательно, достигает наибольшего значения на границе G , т.е. на отрезке $[-1, 1]$ или в бесконечно удаленной точке ∞ . Убедимся, что функция Φ_j не может принимать наибольшее значение в точке $z = \infty$. В самом деле, если $z = \infty$, то соответствующий полином имеет степень $n - 1$, а потому $\Phi_j(\infty) \leq \Lambda_{n-1} = \ln M_0(n - 1)$, где $M_0(n - 1) = (n - 1)e^{n-1}$. Однако $M_0(n) \geq \Phi(0, \dots, 0) = ne^n > M_0(n - 1)$. Итак, действительно, максимум функции Φ_j не может достигаться в точке ∞ . Но это означает, что функция Φ_j гармоническая, отличная от тождественной константы в $\mathbb{C}$ и достигает максимума в $\overline{\mathbb{C}}$ обязательно на отрезке $[-1, 1]$. Отсюда следует, что каждая из координат точки максимума $Z^* = (z_1, \dots, z_n)$ функции Φ в $\overline{\mathbb{C}}^n$ принадлежит отрезку $[-1, 1]$, т.е. $Z^* \in [-1, 1]^n$. Этот факт означает, что все n корней экстремального полинома неравенства (8) принадлежат отрезку $[-1, 1]$.

Рассмотрим теперь неравенство (8) на множестве $\mathcal{P}_n^\diamond$ многочленов из $\mathcal{P}_n$, все n корней которых лежат на отрезке $[-1, 1]$. Пусть P — многочлен из $\mathcal{P}_n^\diamond$ и $\{x_l\}_{l=1}^n$ — его корни, занумерованные в порядке возрастания. Обозначим через $\{x'_l\}_{l=1}^{n-1}$ корни производной P' , также занумерованные в порядке возрастания. Имеет место соотношение

$$-1 \leq x_1 \leq x'_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x'_{n-1} \leq x_n \leq 1.$$

Можно считать, что $x_1 \leq 0$ (если это условие не выполнено, то вместо многочлена $P(t)$ нужно рассмотреть многочлен $P(-t)$). Пусть j — наибольший из номеров, для которого $x_j \leq 0$. Положим

$$k = \begin{cases} j, & \text{если } j = n \text{ или } x'_j \geq 0, \\ j + 1, & \text{если } j < n \text{ и } x'_j < 0. \end{cases}$$

Номер k обладает свойством, что $|x'_l| \leq |x_l|$ для $1 \leq l < k$ и $|x'_l| \leq |x_{l+1}|$ для $k \leq l \leq n-1$.

Как мы уже отмечали выше, функционал $\|\cdot\|_0$ обладает свойством мультипликативности, для $x \in [-1, 1]$ выражение $\|t - x\|_0$ возрастает по $|x|$ и $\|t\|_0 = e^{-1}$. Поэтому (для многочлена $P \in \mathcal{P}_n^\diamond$) мы вправе написать следующую цепочку неравенств:

$$\frac{\|P'\|_0}{\|P\|_0} = n \frac{\prod_{l=1}^{n-1} \|t - x'_l\|_0}{\prod_{l=1}^n \|t - x_l\|_0} \leq \frac{n}{\|t - x_k\|_0} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\|t - x_l\|_0}{\|t - x_l\|_0} \leq ne. \quad (10)$$

Все неравенства в (10) обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n = 0$, т.е. $P(t) = ct^n$, $c \in \mathbb{C}$.

Таким образом, мы показали, что если имеет место утверждение $T(n - 1)$, $n \geq 2$, то имеет место и утверждение $T(n)$, т.е. обосновали шаг индукции. Тем самым, доказано, что при любом $n \geq 1$ в неравенстве (8) наилучшая константа имеет значение $M(n) = ne$ и, более того, многочлены $P(t) = ct^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только они, являются экстремальными. Теорема доказана.

Автор благодарит профессора В. В. Арестова за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Изв. Петербургской АН. 1889. Т. 62. С. 1–24.
- [2] Марков В. В. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
- [3] Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1994.
- [4] Hille E., Szegő G., Tamarkin J. D. On some generalizations of a theorem of A. Markoff // Duke Math. J. 1937. V. 3. P. 729–739.
- [5] Бари Н. К. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 159–176.
- [6] Конягин С. В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1116–1118.
- [7] Конягин С. В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 117–125.
- [8] Иванов В. И. Некоторые неравенства для тригонометрических многочленов и их производных в разных метриках // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 489–498.
- [9] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [10] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
- [11] Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических многочленов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
- [12] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького, г. Екатеринбург
E-mail: Polina.Glazyrina@usu.ru

Поступило
 23.08.2004