Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Ишкин, О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 72–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:03:59

УДК 517.927.25

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ

Х. К. Ишкин

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля на выпуклой гладкой кривой в комплексной плоскости, соединяющей точки 0 и 1. Доказано, что если собственные числа λ_k с большими номерами локализованы около одного луча, то этот луч есть положительная вещественная полуось. Более того, если λ_k пронумерованы с учетом их алгебраических кратностей, то $\lambda_k \sim \pi \cdot k$, $k \rightarrow +\infty$.

Библиография: 7 названий.

1. Спектральная задача на отрезке с комплексной плотностью. Задача о нахождении частот свободных колебаний струны с закрепленными концами и линейной плотностью $q(x)$ после разделения переменных приводится к виду

$$-v'' = \mu^2 q(x)v, \quad (1)$$

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2)$$

Предположим, что q – произвольная комплекснозначная измеримая на $[0; 1]$ функция такая, что спектр задачи (1), (2) дискретен. Это верно, например, если $q \in L^\infty[0; 1]$. Действительно, если L_0 – оператор, порожденный в $L^2[0; 1]$ дифференциальным выражением $l_0(v) = -v''$ и краевыми условиями (2), то оператор $L_0^{-1}q$ компактен.

Нас будет интересовать вопрос об асимптотическом поведении собственных чисел μ_k при $k \rightarrow \infty$. При этом мы будем считать, что $\operatorname{Re} \mu_k \geq 0$ (серию $-\mu_k$ не будем рассматривать).

Если $\arg q(x) \equiv \alpha = \text{const}$, то замена $\mu = \lambda \cdot e^{-i\alpha/2}$ приводит к задаче с вещественной плотностью, поэтому собственные числа μ_k лежат на одной прямой, и их асимптотика может быть найдена при условии, что q – достаточно гладкая функция и имеет конечное число нулей (см., например, [1]). Если же $\arg q(x) \neq \text{const}$, то имеющиеся в этом направлении результаты исчерпываются случаем, когда функция $q(x)$ аналитична в некоторой окрестности D отрезка $[0; 1]$ и выполняются некоторые условия на топологию линий Стокса [2, с. 127]. В простейшем случае, когда функция $q(x)$ не имеет нулей в области D , это условие сводится к следующему: подстановка Лиувилля

$$z = z(x) = \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \left(\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right)^{-1}, \quad v(x) = q^{-1/4}(x)y(z) \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-97914.

приводит (1), (2) к задаче

$$-y''(z) + V(z) \cdot y(z) = \lambda^2 y(z), \quad z \in \gamma, \quad (4)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (5)$$

где

$$V(z) = -(q^{-1/4})''(x(z))q^{-3/4}(x(z)) \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right)^2, \quad \lambda = \mu \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt,$$

а γ – кривая, в которую переходит отрезок $[0; 1]$ при преобразовании (3). Тогда асимптотика собственных чисел задачи (4), (5) (а значит, и задачи (1), (2)) может быть найдена, если кривая γ гомотопна отрезку $[0; 1]$. Действительно, в этом случае кривую γ можно продеформировать в отрезок $[0; 1]$, так что задача (4), (5) преобразуется в задачу Штурма–Лиувилля на отрезке $[0; 1]$, для собственных значений которой справедлива классическая асимптотическая формула

$$\lambda_k \sim \pi k, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Для неаналитических потенциалов с непостоянным аргументом асимптотика собственных значений неизвестна. Неизвестно даже, группируются ли они вокруг конечного числа лучей в комплексной плоскости μ при $|\mu_n| \gg 1$. В связи с этим М. В. Федорюком была высказана гипотеза, что в общем случае такой локализации нет [2, с. 127]. Построенный в п. 5 пример в некотором смысле подтверждает эту гипотезу.

В предлагаемой статье доказано (см. п. 2, следствие из теоремы 1), что если спектр задачи (1), (2) локализован около одного луча, то этот луч обязан иметь вид $\arg \mu = -\alpha$, где

$$\alpha = \arg \left(\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right), \quad (7)$$

и при этом для собственных чисел справедлива классическая формула распределения, если только μ_k пронумерованы с учетом их алгебраических кратностей¹.

Отметим, что подстановка Лиувилля (3) имеет смысл не только для аналитических функций q , но и для любых функций, нигде не обращающихся в нуль и имеющих абсолютно непрерывную на $[0; 1]$ производную. При этих условиях задача (1), (2) преобразуется в задачу на некоторой гладкой кривой. Если дополнительно предположить, что $\arg q(x)$ монотонен на $[0; 1]$, то кривая будет выпукла. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такую задачу.

2. Задача Штурма–Лиувилля на кривой. Формулировка основного результата. Пусть γ – некоторая непрерывно дифференцируемая и выпуклая вниз (в нестрогом смысле) кривая в комплексной плоскости с началом в точке 0 и концом в точке 1. Обозначим через α_z угол между положительным направлением оси Ox и касательной к γ в точке z , пронормированный условием $-\pi/2 < \alpha_z \leq \pi/2$. Всюду в дальнейшем

¹Под алгебраической кратностью понимается размерность корневого подпространства, соответствующего собственному значению μ_k^2 оператора L , порожденного в $L^2[0; 1]$ дифференциальным выражением $l(v) = -q^{-1}v''$ и краевыми условиями (2).

будем считать, что $\alpha_0 > -\pi/2$, $\alpha_1 < \pi/2$. Из условия выпуклости следует, что α_z не убывает на γ при движении из точки 0 к точке 1.

Пусть $V(z)$ некоторая функция из $L^1(\gamma)$. Здесь и далее под $L^p(\gamma)$ будем понимать множество функций f , удовлетворяющих условию $\int_\gamma |f(z)|^p |dz| < \infty$, где $|dz|$ — элемент дуги кривой γ . Введем в рассмотрение оператор L_γ , порожденный в $L^2(\gamma)$ дифференциальным выражением $l_\gamma(y) = -y'' + Vy$ и краевыми условиями (5). Оператор L_γ в дальнейшем будем называть оператором Штурма–Лиувилля на кривой γ .

Обозначим через $\varphi(z, \lambda)$ решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$. Тогда число λ_0^2 будет принадлежать спектру оператора L_γ тогда и только тогда, когда λ_0 будет являться нулем функции

$$\Phi(\lambda) \equiv \varphi(1, \lambda).$$

Так как функция $\Phi(\lambda)$ целая, то спектр L_γ либо совпадает со всей комплексной плоскостью (если $\Phi(\lambda) \equiv 0$), либо дискретен. Ниже (лемма 2) мы покажем, что если $V \in L^1(\gamma)$, то $\Phi(\lambda)$ отлична от тождественного нуля, так что спектр L_γ дискретен. Обозначим через λ_k^2 ($\operatorname{Re} \lambda \geq 0$) собственные значения оператора L_γ , пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом их алгебраических кратностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, геометрическая (или собственная [3, с. 19]) кратность каждого собственного значения оператора L_γ равна 1. Алгебраическая кратность собственного значения λ_k^2 совпадает с кратностью нуля λ_k функции $\Phi(\lambda)$ [4, с. 29]. Известно, что для операторов Штурма–Лиувилля на отрезке алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений, по крайней мере, с большими номерами совпадают. Однако для операторов Штурма–Лиувилля на кривой это утверждение, вообще говоря, неверно. В п. 5 приводится пример оператора L_γ , каждое собственное значение которого имеет алгебраическую кратность 2.

Основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V \in L^1(\gamma)$; тогда спектр оператора L_γ дискретен, и если $\arg(\lambda_k) \rightarrow \alpha$, $k \rightarrow \infty$, то $\alpha = 0$, и при этом имеет место формула (6).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $q(x)$ не имеет нулей, q' абсолютно непрерывна и $\arg q(x)$ не убывает или не возрастает на отрезке $[0; 1]$. Пусть μ_k — собственные значения задачи (1), (2), лежащие в правой полуплоскости, пронумерованные в порядке роста их модулей с учетом их алгебраических кратностей. Тогда если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arg(\mu_k)$$

существует и конечен, то этот предел равен $-\alpha$, где α определяется равенством (7), и для μ_k справедлива асимптотическая формула

$$\mu_k \sim \frac{\pi k}{\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

3. Некоторые вспомогательные предложения. Введем обозначения. Пусть $\beta = \arg \lambda$ и пусть B_β – точка кривой γ , в которой достигает минимума функция $\operatorname{Im}(ze^{i\beta})$, $z \in \gamma$. Если γ строго выпукла, то B_β определяется однозначно для всех $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$. Если же некоторый участок кривой является отрезком, то при некотором β из промежутка $[-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$ минимум функции $\operatorname{Im}(ze^{i\beta})$ достигается на всем этом отрезке. В этом случае в качестве B_β мы будем брать левый конец этого отрезка. Далее, если A и B произвольные точки кривой γ , то символ $\int_A^B$ будет означать интеграл, взятый по кривой γ в направлении от A до B .

ЛЕММА 1. Пусть $\psi(z, \lambda)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $\psi(B_\beta, \lambda) = e^{-i\lambda B_\beta}$, $\psi'(B_\beta, \lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda B_\beta}$. Тогда при больших λ из угла $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$ справедливо равномерное по $\arg \lambda$ асимптотическое соотношение

$$\psi^{(k)}(z, \lambda) = (-i\lambda)^k e^{-i\lambda z} \left(1 + \frac{1}{2i\lambda} \int_{B_\beta}^z ((-1)^k e^{2i\lambda(z-t)} - 1) V(t) dt + O(\lambda^{-2}) \right), \quad (8)$$

$$k = 0, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\psi(z, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(z, \lambda) = e^{-i\lambda z} + \frac{1}{\lambda} \int_{B_\beta}^z \sin \lambda(z-t) V(t) \psi(t, \lambda) dt.$$

Положим $\tilde{\psi}(z, \lambda) = e^{i\lambda z} \psi(z, \lambda)$. Тогда

$$\tilde{\psi}(z, \lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_{B_\beta}^z (1 - e^{2i\lambda(z-t)}) V(t) \tilde{\psi}(t, \lambda) dt.$$

В силу определения точки B_β и выпуклости кривой γ функция $\operatorname{Im} te^{i\beta}$ при каждом $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$ не убывает при движении точки t от B_β до z . Следовательно, $|e^{i\lambda(z-t)}| \leq 1$, так что норма интегрального оператора в пространстве $C(\gamma)$ – непрерывных на γ функций – допускает оценку $O(\lambda^{-1})$ (равномерно по $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$). Отсюда следует утверждение леммы.

Из доказанной леммы следует, что при достаточно больших λ из сектора $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$ функция $\psi(z, \lambda)$ отлична от нуля в каждой точке кривой γ . Тогда для решения $\varphi(z, \lambda)$ (см. п. 2) справедливо представление

$$\varphi(z, \lambda) = \psi(0, \lambda) \psi(z, \lambda) \int_0^z \psi^{-2}(z, \lambda) dz. \quad (9)$$

ЛЕММА 2. Если $V \in L^1(\gamma)$, то вне углов $-\alpha_1 < \arg \lambda < -\alpha_0$ и $\pi - \alpha_1 < \arg \lambda < \pi - \alpha_0$ спектр задачи (4), (5) конечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\Phi(\lambda)$ четная, то достаточно доказать, что $\Phi(\lambda)$ имеет конечное число нулей в углах $\alpha_0 \leq \beta \leq \pi/2$ и $-\pi/2 < \beta \leq -\alpha_1$.

Из леммы 1 и равенства (9) следует, что λ_k при больших k совпадают с нулями функции

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_0^1 \psi^{-2}(z, \lambda) dz.$$

Подставляя сюда (8), будем иметь

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_0^1 e^{2i\lambda z} \left(1 + \frac{1}{i\lambda} \int_{B_\beta}^z V(t) dt + o(\lambda^{-1}) \right) dz, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (10)$$

равномерно по $\beta \in [-\pi - \alpha_0; \pi - \alpha_1]$. Если $-\alpha_0 \leq \beta \leq \pi/2$, то $\text{Im}(e^{i\beta}z) \geq 0$ при всех $z \in \gamma$, причем $\text{Im}(e^{i\beta}) > 0$. Следовательно, $\tilde{\Phi}(\lambda) \sim -1/(2i\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. Если же $-\pi/2 \leq \beta \leq -\alpha_1$, то в силу аналогичных соображений $\tilde{\Phi}(\lambda) \sim e^{2i\lambda}/(2i\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Попутно мы получили асимптотику $\Phi(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $V \in L^1(\gamma)$, то

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{\sin \lambda}{\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (11)$$

равномерно по $\beta \in [-\alpha_0; \pi - \alpha_1] \cup [-\pi - \alpha_0; -\alpha_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\beta \in [-\alpha_0; \pi - \alpha_1]$, то $B_\beta = 0$, и остаточный член в (10) согласно (8) имеет вид

$$-\frac{1}{i\lambda} \int_0^z e^{2i\lambda(z-t)} V(t) dt + O(\lambda^{-2}).$$

Тогда из (10) при больших λ равномерно по $\beta \in [-\alpha_0; \pi - \alpha_1]$ будем иметь

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_0^1 e^{2i\lambda t} dt + \frac{1}{i\lambda} \int_0^1 e^{2i\lambda z} \int_0^z V dt dz - \frac{1}{i\lambda} \int_0^1 \int_0^z e^{2i\lambda(2z-t)} V dt dz + O(\lambda^{-2}).$$

Отсюда, интегрируя по частям, и учитывая, что $\Phi(\lambda) = \psi(0, \lambda)\psi(1, \lambda)\tilde{\Phi}(\lambda)$, получим

$$\Phi(\lambda) \sim -\frac{e^{-i\lambda}}{2i\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})) \sim \frac{\sin \lambda}{\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\beta \in [-\alpha_0; \pi - \alpha_1]$.

Справедливость полученной формулы в угле $\beta \in [-\pi - \alpha_0; -\alpha_1]$ следует из четности функции $\Phi(\lambda)$.

4. Доказательство теоремы 1. Итак, пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \lambda_k = \alpha.$$

Из леммы 2 следует, что $-\alpha_1 \leq \alpha \leq \pi + \alpha_0$. Обозначим через $n(t)$ число нулей функции $\Phi(\lambda)$ в круге $\{|\lambda| \leq t\}$ с учетом их кратностей. Так как $\Phi(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа, из неравенства Иенсена [5, с. 196] вытекает оценка

$$n(t) \leq c \cdot t, \quad (12)$$

где c – некоторая положительная постоянная. Отсюда и из четности функции $\Phi(\lambda)$ следует, что ее каноническое разложение имеет вид

$$\Phi(\lambda) = c_0 \lambda^{2m} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{k+m}^2}\right).$$

Введем обозначения

$$F(\mu) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_k}\right), \quad \mu_k = \lambda_{k+m}^2 e^{-2i\alpha}.$$

Тогда

$$\Phi(\lambda) = c_0 \lambda^{2m} F(\lambda^2 e^{-i\alpha}). \quad (13)$$

Так как $\arg(\mu_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то $F(\mu) \neq 0$ при $|\mu| \gg 1$ и $\sigma \leq \arg \mu \leq 2\pi - \sigma, \sigma > 0$ фиксировано. Следовательно, при таких μ определена функция $Q(\mu) = \ln F(\mu)$ (ветвь $\ln z$ выбрана так, что $\ln z > 0$ при $z > 1$).

ЛЕММА 3. При $\mu \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$Q(\mu) = \sum_1^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\mu}{|\mu_k|}\right) + o(\mu^{1/2}), \quad (14)$$

равномерное по $\sigma \leq \arg \mu \leq 2\pi - \sigma$, где σ – произвольное фиксированное положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q(\mu) = \sum_1^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\mu}{|\mu_k|}\right) + \sum_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\mu \delta_k}{|\mu_k| - \mu}\right) \equiv Q_1(\mu) + Q_2(\mu),$$

где $\delta_k = 1 - e^{-i\varphi_k}, \varphi_k = \arg \mu_k$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0; 1/2)$ и обозначим через $k(\mu)$ наибольший из номеров k , для которых $|\mu_k| \leq |\mu|^{1-\varepsilon}$. Далее положим

$$k_1(\mu) = \min\{k(\mu), [\mu^{1/2-\varepsilon}]\}, \quad k_2(\mu) = [|\mu|^{1/2}]$$

и представим $Q_2(\mu)$ в виде

$$Q_2(\mu) = \left(\sum_1^{k_1(\mu)} + \sum_{k_1(\mu)+1}^{k_2(\mu)} + \sum_{k_2(\mu)+1}^{\infty} \right) \ln \left(1 + \frac{\mu \delta_k}{|\mu_k| - \mu} \right) \equiv q_1(\mu) + q_2(\mu) + q_3(\mu).$$

Из определения $k_1(\mu)$ следует, что при всех $k \leq k_1(\mu)$

$$1 + \frac{\mu \delta_k}{|\mu_k| - \mu} = e^{-i\varphi_k} (1 + O(|\mu|^{-\varepsilon})),$$

поэтому

$$q_1(\mu) = O(\mu^{1/2-\varepsilon}), \quad \mu \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\arg \mu \in [\sigma; 2\pi\sigma]$.

Чтобы оценить $q_2(\mu)$ заметим, что при $\sigma \leq \arg \mu \leq 2\pi - \sigma$

$$\left| \frac{\mu \delta_k}{|\mu_k| - \mu} \right| \leq C_\sigma |\delta_k|,$$

где

$$C_\sigma = \begin{cases} 1/\sin \sigma, & |\sigma| \leq \pi/2, \\ 1, & |\sigma| > \pi/2. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $\delta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и $k_1(\mu) \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow \infty$, получим

$$q_2(\mu) = o(\mu^{1/2}), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (15)$$

равномерно по $\arg \mu \in [\sigma; 2\pi - \sigma]$.

Наконец, заметив, что $||\mu_k| - \mu| \geq C_\sigma |\mu_k|$ при $\sigma \leq \arg \mu \leq 2\pi - \sigma$ и $|\mu_k| > k^2/c^2$ согласно (12), убеждаемся, что $q_3(\mu)$ также удовлетворяет оценке (15). Лемма доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $n_F(r)$ – число нулей функции $F(\mu)$ в круге радиуса r с учетом их кратностей. Имеем

$$Q_1(\mu) = \int_0^\infty \ln(1 - \mu/r) dn_F(r) = \mu \int_0^\infty \frac{dm(r)}{\mu - r},$$

где

$$m(r) = \int_0^r \frac{dn_F(t)}{t}.$$

Тогда из (11) и (13) в силу (14) получим

$$\int_0^\infty \frac{dm(r)}{re^{i\alpha} - \lambda^2} \sim \frac{i}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \pi - \alpha_0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда при $\lambda = it$, $t > 0$, будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{dm(r)}{re^{i\alpha} + t^2} \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Покажем, что соотношение (16) возможно лишь при $\alpha = 0$.

Пусть $0 < \alpha \leq \pi + \alpha_0$ или $-\alpha_1 \leq \alpha < 0$. Выделяя мнимую часть в (16), получим

$$\int_0^\infty \frac{r \, dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} = o\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

Комбинируя теперь (16) и (17), будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} \sim \frac{1}{t^3}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Так как порядок $F(\mu)$ равен $1/2$, согласно неравенству Иенсена $m(r) = O(\sqrt{r})$, $r \rightarrow \infty$. Тогда, поскольку $|re^{i\alpha} + t^2| \geq t^2 \sin^2 \alpha$, существует такое $k > 0$, что

$$\int_0^{kt^2} \frac{dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} < \frac{1}{2t^3}, \quad t \geq T > 0.$$

Далее,

$$\int_0^\infty \frac{r \, dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} > kt^2 \int_{kt^2}^\infty \frac{dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} > kt^2 \int_0^\infty \frac{dm(r)}{|re^{i\alpha} + t^2|^2} - \frac{k}{2} t^{-1},$$

откуда в силу (18) приходим к противоречию с (17).

Итак, $\alpha = 0$. Следовательно, соотношение (16) имеет вид

$$\int_0^\infty \frac{dm(r)}{r+t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда, применяя тауберову теорему (см., например, [3, с. 342]), получим

$$m(r) \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{r}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Используя теперь лемму 2 из [5, с. 254], будем иметь

$$n_F(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{\pi}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

5. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть γ – произвольная кривая, удовлетворяющая условиям п. 2, и B – некоторая ее точка, отличная от ее концов. Через (AC) будем обозначать дугу кривой γ , соединяющую точки A и C . Рассмотрим задачу (4), (5) при

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z \in (0B), \\ e^{-1/(z-B)}, & z \in (B1). \end{cases} \quad (19)$$

Ясно, что функция $V(z)$ бесконечно дифференцируема на γ . Тем не менее этого недостаточно для локализации спектра около одного луча.

ТЕОРЕМА 2. Спектр задачи (4), (5) с “потенциалом” (19) состоит из двух серий, для которых справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_k^1 \sim \frac{\pi k}{B} \left(1 - \sqrt{\frac{2i}{\pi B k}} + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \right), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

$$\lambda_k^2 \sim \frac{\pi k}{1-B} \left(1 + \sqrt{\frac{2i}{\pi(1-B)k}} + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \right), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (21)$$

ветвь корня $\sqrt{z}$ выбрана так, что $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$.

Продеформируем γ до ломаной $l = [0; B] \cup [B; 1]$. Тогда из леммы 2 следует, что спектр задачи, за исключением конечного числа точек, лежит в угле $-\alpha_1 \leq \beta \leq -\alpha_0$ (по-прежнему, β есть $\arg \lambda$).

Из рассуждений п. 3 следует, что собственные числа задачи (4), (5) с достаточно большими номерами совпадают с нулями функции

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_l (e(z, \lambda))^{-2} dz,$$

где $e(z, \lambda)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $e(B, \lambda) = 1$, $e'(B, \lambda) = -i\lambda$.

Имеем

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} (1 - e^{-2iB\lambda}) + \int_B^1 (e(z, \lambda))^{-2} dz. \quad (22)$$

Чтобы изучить поведение функции $\tilde{\Phi}(\lambda)$ в угле $S = \{-\alpha_1 \leq \beta \leq -\alpha_0\}$, представим $e(z, \lambda)$ в виде

$$e(z, \lambda) = e^{-i\lambda(z-B) + \int_B^z \sigma(t, \lambda) dt}, \quad (23)$$

где σ является решением задачи

$$\sigma' - 2i\lambda\sigma + \sigma^2 - V = 0, \quad \sigma(B) = 0. \quad (24)$$

Задача (24) эквивалентна интегральному уравнению

$$\sigma(z, \lambda) = \int_B^z e^{2i\lambda(z-t)} V(t) dt - \int_B^z e^{2i\lambda(z-t)} \sigma^2(t, \lambda) dt, \quad t \in [B; 1]. \quad (25)$$

Обозначим через $\sigma_0(z, \lambda)$ первый член в правой части (25). Непосредственно проверяется, что функция

$$\xi_0(z, \lambda) = \lambda \cdot \sigma_0(z, \lambda)$$

аналитична и ограничена в области

$$D_{\varepsilon, \rho} = \left\{ (z, \lambda) : 0 \leq \arg(\lambda z) \leq \pi, |\arg(z - B)| \leq \frac{\pi}{2}, |\lambda| \geq \rho \right\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\rho \gg 1$.

ЛЕММА 4. *Функция σ аналитична в области $D_{\varepsilon, \rho}$ и допускает оценку*

$$\sigma(z, \lambda) = \frac{\xi(z, \lambda)}{\lambda},$$

где $\xi(z, \lambda)$ ограничена в области $D_{\varepsilon, \rho}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (25) имеем

$$\xi(z, \lambda) = \xi_0(z, \lambda) - \lambda^{-1} \int_B^z e^{2i\lambda(z-t)} \xi^2(t, \lambda) dt.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получим утверждение леммы.

Легко проверить, что множество $[B; 1] \times \{-\alpha_1 \leq \arg \lambda \leq -\alpha_0, |\lambda| \geq \rho\}$ содержится в $D_{\varepsilon, \rho}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Это означает, что

$$\sigma(z, \lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $z \in [B; 1]$ и $\arg \lambda \in [-\alpha_1; \alpha_0]$. Тогда, подставляя (23) в равенство (22) и интегрируя последнее по частям два раза с учетом (24), получим

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = I_1(\lambda) - I_2(\lambda) + \frac{1}{2i\lambda} e^{2i(1-B)\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})) - e^{-2iB\lambda}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \frac{1}{4\lambda^2} \int_l e^{2i\lambda(z-B)} V e^{-2 \int_B^z \sigma(t, \lambda) dt} dz, \\ I_2(\lambda) &= \frac{1}{4\lambda^2} \int_l e^{2i\lambda(z-B)} \sigma^2 e^{-2 \int_B^z \sigma(t, \lambda) dt} dz. \end{aligned}$$

Для исследования асимптотики $I_1(\lambda)$ представим его в виде

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{4\lambda^2} (I_{11}(\lambda) + I_{12}(\lambda)), \quad \text{где } I_{11}(\lambda) = \int_0^{1-B} e^{2i\lambda t - 1/t} dt.$$

Покажем, что

$$I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \sim \frac{1}{4\lambda^2} I_{11}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (27)$$

равномерно по $\arg \lambda \in [-\alpha_1; \alpha_0]$.

Сначала найдем асимптотику $I_{11}(\lambda)$.

ЛЕММА 5. *При больших λ из S справедливо равномерное по $\arg \lambda$ асимптотическое разложение*

$$I_{11}(\lambda) \sim \left(\frac{i}{2\lambda} \right)^{3/4} \sqrt{\pi} e^{2i\sqrt{2i\lambda}} (1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотику $I_{11}(\lambda)$ найдем методом перевала. Имеются две точки перевала $t_{1,2}(\lambda) = \pm \sqrt{i/(2\lambda)}$, где $\arg \sqrt{i/(2\lambda)} = \pi/4 - \beta/2$. Прodeформируем отрезок $[0; 1 - B]$ в ломаную $L = [0; T(\lambda)] \cup [T(\lambda); 1 - B]$, где $T(\lambda) = (2 + \delta)t_1(\lambda)$, $\delta > 0$. Имеем

$$I_{11}(\lambda) = \left(\int_0^{T(\lambda)} + \int_{T(\lambda)}^{1-B} \right) e^{2i\lambda t - 1/t} dt \equiv J_1(\lambda) + J_2(\lambda).$$

Сделаем замену $t = t_1(\lambda)\tau$ в $J_1(\lambda)$, получим

$$J_1(\lambda) = -\frac{1}{\nu} \int_0^{2+\delta} e^{\nu(\tau+1/\tau)} d\tau, \quad \nu = i\sqrt{2i\lambda} = \sqrt{2|\lambda|} e^{(3\pi/4 + \beta/2)i}.$$

Имеем $3\pi/4 - \alpha_1/2 \leq \arg \nu \leq 3\pi/4 - \alpha_0/2$, и поскольку $|\alpha_{0,1}| < \pi/2$, то $\operatorname{Re}(\nu(\tau + 1/\tau))$ имеет строгий максимум в точке перевала $\tau = 1$, поэтому [3, с. 264]

$$J_1(\lambda) \sim -\frac{i}{\nu^{3/2}} \sqrt{\pi} (1 + O(\nu^{-1})) e^{2\nu}, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Далее, поскольку $\operatorname{Im}(\lambda t)$ растет при движении от $T(\lambda)$ к $1 - B$, а $\operatorname{Re}(1/t) > 0$, то

$$|e^{2i\lambda t - 1/t}| \leq |e^{2i\lambda T(\lambda)}| = |e^{(2+\delta)\nu}|.$$

Следовательно, $J_2(\lambda)$ экспоненциально мал по сравнению с $J_1(\lambda)$. Таким образом, $I_{11}(\lambda) \sim J_1(\lambda)$. Лемма доказана.

Оценим теперь интегралы $I_{12}(\lambda)$ и $I_2(\lambda)$. Для этого нам потребуется более тонкая оценка $\sigma(z, \lambda)$.

ЛЕММА 6. При больших λ из S имеет место оценка

$$\sigma(z, \lambda) = O(\lambda^{-1/2} e^{-1/t_1(\lambda)}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (28)$$

равномерная по $\arg \lambda$ и $z \in [B; B + T(\lambda)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\sigma_0(z, \lambda) = \int_B^z e^{2i\lambda(z-t) - 1/(t-B)} dt$$

на отрезке $[B; B + T(\lambda)]$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что вещественная часть выражения $2i\lambda(z-t) - 1/(t-B)$ достигает своего максимума или в точке z , или в точке перевала $z(\lambda) = B + t_1(\lambda)$, в зависимости от того, принадлежит или нет точка $z(\lambda)$ отрезку $[B; z]$. В обоих случаях указанный максимум не превосходит $\operatorname{Re}(-1/t_1(\lambda))$. Отсюда следует оценка (28) для $\sigma_0(z, \lambda)$. Теперь для доказательства (28) остается применить метод последовательных приближений к уравнению (25).

Рассмотрим интегралы $I_{12}(\lambda)$ и $I_2(\lambda)$. Лемма 4 позволяет проdeформировать отрезок интегрирования $[B; 1]$ в ломаную $[B; B + T(\lambda)][B + T(\lambda); 1]$. Используя оценку (28) и оценку из леммы 4, легко доказать, что

$$I_{12}(\lambda), I_2(\lambda) = O(e^{-\delta\sqrt{|\lambda|}} I_{11}(\lambda)), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in S,$$

где $\delta > 0$.

Последние два соотношения дают (27).

ЛЕММА 7. При больших λ из S справедлива равномерная по $\arg \lambda$ асимптотическая формула

$$\tilde{\Phi}(\lambda) \sim \frac{1}{2i\lambda} \left[e^{2i(1-B)\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})) - e^{-2iB\lambda} + \left(\frac{i}{2\lambda} \right)^{7/4} \sqrt{\pi} e^{2i\sqrt{2i\lambda}} (1 + O(\lambda^{-1/2})) \right]. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из (27) с учетом леммы 5 и (26).

ЛЕММА 8. При любом $\varepsilon > 0$ в угле $S_\varepsilon = \{\lambda : -\alpha_1 + \varepsilon \leq \beta \leq -\alpha_0 - \varepsilon\}$ содержится конечное число точек спектра задачи (4), (5), (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda \in S_\varepsilon$, то

$$e^{2i\lambda(1-B)}, \quad e^{-2i\lambda B} = O(e^{-\sin \varepsilon |\lambda|}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Поэтому согласно (29)

$$\tilde{\Phi}(\lambda) \sim -\sqrt{\pi} i \left(\frac{i}{2\lambda} \right)^{11/4} e^{2i\sqrt{2i\lambda}} (1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\arg \lambda \in [-\alpha_1; -\alpha_0]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем, что часть спектра, локализованная около луча $\beta = -\alpha_0$, имеет асимптотику (20).

Пусть $-\alpha_0 - \varepsilon \leq \beta \leq -\alpha_0$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда согласно (29)

$$\tilde{\Phi}(\lambda) \sim \frac{e^{-2i\lambda B}}{2i\lambda} \left[1 + \left(\frac{i}{2\lambda} \right)^{7/4} \sqrt{\pi} e^{2i(\lambda B + \sqrt{2i\lambda})} (1 + O(\lambda^{-1/2})) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Отсюда после несложных вычислений получим (20). Формула (21) устанавливается аналогично.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим задачу (4), (5), где

$$V(z) = \frac{4n^2 - 1/4}{(z - 1/2)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $V(z)$ аналитична в нижней полуплоскости, то кривую γ можно продеформировать так, что $-\varepsilon < \alpha_0 < 0$, $0 < \alpha_1 < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Отсюда в силу леммы 2 будет следовать, что спектр задачи локализован около положительной вещественной полупрямой.

Решения уравнения (4) в рассматриваемом случае имеют вид

$$y(z, \lambda) = \sqrt{z - \frac{1}{2}} C_{2n} \left(\lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) \right),$$

где $C_{2n}(z)$ – цилиндрическая функция. Следовательно, функцию $\varphi(z, \lambda)$ можно взять следующим образом:

$$\varphi(z, \lambda) = \frac{y_1(z, \lambda)y_2(0, \lambda) - y_2(z, \lambda)y_1(0, \lambda)}{W(y_2, y_1)},$$

где

$$y_1(z, \lambda) = \sqrt{z - \frac{1}{2}} J_{2n} \left(\lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) \right), \quad y_2(z, \lambda) = \sqrt{z - \frac{1}{2}} Y_{2n} \left(\lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) \right),$$

$W(y_2, y_1)$ – вронскиан функций y_2 и y_1 . В выражениях для $y_1(z, \lambda)$ и $y_2(z, \lambda)$ ветви многозначных функций $\sqrt{z}$ и $\ln z$ выберем нормировкой: $-\pi \leq \arg z \leq 0$ при $z \in \gamma$. Имеем [7, с. 220]

$$W(y_2, y_1) = \lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) W(Y_{2n}, J_{2n}) \left(\lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{2\lambda}{\pi}.$$

Тогда, учитывая четность функции $J_{2n}(z)$, для характеристической функции спектра будем иметь

$$\Phi(\lambda) = \frac{\pi}{4i} J_{2n} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \left[Y_{2n} \left(\frac{\lambda}{2} \right) - Y_{2n} \left(-\frac{\lambda}{2} \right) \right].$$

Из известной формулы для $Y_{2n}(z)$ [7, с. 220] следует, что

$$Y_{2n} \left(\frac{\lambda}{2} \right) - Y_{2n} \left(-\frac{\lambda}{2} \right) = \frac{2}{\pi} J_{2n} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \left(\ln \left(\frac{\lambda}{4} \right) - \ln \left(-\frac{\lambda}{4} \right) \right) = 2i J_{2n} \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Отсюда имеем

$$\Phi(\lambda) = \frac{\pi}{2} J_{2n}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Следовательно, собственные числа задачи (4), (5) имеют вид $\lambda_k = 2j_{2n,k}$, где $j_{2n,k}$ – k -й нуль функции $J_{2n}(z)$. Подставляя сюда асимптотику $j_{2n,k}$, будем иметь

$$\lambda_k \sim 2\pi k, \quad k \rightarrow +\infty,$$

при этом алгебраическая кратность каждого собственного значения равна 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 3–96.
- [2] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [4] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [5] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
- [6] Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [7] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: ishkinhk@bsu.bashedu.ru

Поступило
14.11.2003
Исправленный вариант
25.10.2004