Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Ю. Ю. Багдерина, Асимптотика ограниченных на бесконечности решений уравнений квадратичного главного резонанса, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 85–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:31:54

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ОГРАНИЧЕННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ГЛАВНОГО РЕЗОНАНСА

Л. А. Калякин, Ю. Ю. Багдерина

Рассматривается система шести нелинейных дифференциальных уравнений, которая возникает при усреднении быстрых вынужденных колебаний. Основной результат состоит в построении асимптотики на бесконечности для общего решения с ограниченными амплитудами. Выяснено, что структура асимптотических рядов зависит от параметров так, что коэффициенты рядов меняются скачком на резонансном множестве.

Библиография: 17 названий.

Рассматривается нелинейная неавтономная система с тремя степенями свободы, записанная в переменных амплитуда–фаза:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi &= f_j \sin(\psi_j + \varphi_j), & \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi &= f_j \cos(\psi_j + \varphi_j), \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, & \gamma_1 &= 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = -1, & j &= 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad k \neq l. \end{aligned} \quad (1)$$

Характерной чертой этих уравнений является квадратичный рост на бесконечности заданных фазовых функций: $\varphi_j(\theta) = \omega_j \theta + \alpha_j \theta^2$, $\alpha_j, \omega_j, f_j = \text{const}$; $\alpha_j \neq 0$ при $f_j \neq 0$. Основная цель работы – построение асимптотики на бесконечности для общего (шести-параметрического) решения, в котором амплитуды $\rho_j(\theta)$ остаются ограниченными при $\theta \rightarrow \infty$.

Если каждую пару переменных ρ_j, ψ_j рассматривать как полярные координаты на плоскости, то в соответствующих декартовых координатах $x_j = \rho_j \cos \psi_j, y_j = \rho_j \sin \psi_j$ уравнения принимают вид

$$\frac{dx_j}{d\theta} + \gamma_j (x_k y_l + y_k x_l) = f_j \sin \varphi_j, \quad \frac{dy_j}{d\theta} + \gamma_j (x_k x_l - y_k y_l) = f_j \cos \varphi_j. \quad (2)$$

Однако при построении асимптотик удобнее пользоваться уравнениями (1), рассматривая их в замкнутой области шестимерного пространства $\mathbb{R}_+^6 = \{\rho_j \geq 0, \psi_j \in \mathbb{R}\}$. При аккуратной постановке задачи дифференциальные уравнения в форме (1) должны

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 03-01-00716 и № 04-02-97503, программы “Ведущие научные школы”, грант № 1446.2003.1, и фонда INTAS, грант № 03-51-4286.

быть дополнены условиями скачка для фаз при переходе амплитудой нулевого значения: $\psi_j(\theta + 0) - \psi_j(\theta - 0) = \pi$ при $\rho_j(\theta) = 0$. В ситуации общего положения амплитуды отличны от нуля в главных членах асимптотики и условия скачка не используются.

Происхождение задачи. Интерес к системам (1) объясняется их ролью в теории нелинейных колебаний. Хотя уравнения представляются весьма специфическими, они являются стандартными при описании резонансных явлений для колебательных процессов разной природы [1]–[3]. Обычно уравнения такого типа возникают при усреднении по быстрым колебаниям других, более сложных систем [4]. Искомые функции $\rho_j(\theta)$, $\psi_j(\theta)$ представляют собой медленно меняющиеся амплитуды и сдвиги фаз быстрых гармонических колебаний. Нелинейности исходных систем индуцируют нелинейности в усредненных уравнениях посредством главных резонансов. В частности, квадратичные резонансы приводят к квадратичным нелинейностям, указанным в (1). Неавтономность уравнений (1) является следствием медленной деформации параметров исходных систем, таких, как частоты собственных колебаний, частоты и амплитуды внешних сил. Как раз эффект деформации вынуждающих частот для ситуации общего положения содержится в квадратичных слагаемых фазовых функций $\varphi_j \approx \theta^2$. Примеры такого типа многомерных систем приведены в [5], [6].

Постановка вопроса об асимптотике по медленному времени $\theta \rightarrow \infty$ связана с использованием усредненных уравнений (1) для описания переходных процессов, например, нелинейного резонанса или начального этапа авторезонанса (автофазировки) [7]–[9]. Рассматриваемая здесь система, по-видимому, является простейшей среди многомерных систем, описывающих суть переходных резонансных явлений. Мы намеренно ограничиваемся уравнениями в максимально простой форме, чтобы выявить основные отличия от одномерного случая [10]. Всевозможные обобщения с более сложной структурой правых частей не вносят принципиальных отличий.

С многомерными нелинейными колебаниями часто ассоциируется проблема малых знаменателей и возникновение хаоса. Рассматриваемые нами решения не содержат таких эффектов. Отсутствие малых знаменателей в предъявляемых конструкциях является следствием конечного числа гармоник в накачке (в правых частях уравнений).

Постановка задачи об асимптотике решений на бесконечности является классической, и на эту тему имеется огромное число публикаций. Современное состояние общей теории освещено в монографиях [11], [12]. Однако известные результаты непосредственно к уравнениям (1) не применимы из-за осциллирующего характера решений. Используемые нами приемы состоят в модификации разных вариантов нелинейного метода ВКБ [13], [14]. Основной целью является исследование общего шестипараметрического решения уравнений (1), для которого строится асимптотическое разложение при $\theta \rightarrow \infty$. Следует подчеркнуть, что получаемые асимптотики не являются равномерными по параметрам. Более того, в пространстве параметров имеется исключительное множество, которое связано с резонансами. При выходе параметров на резонансное множество меняется структура асимптотики. Хотя мера такого (резонансного) множества равна нулю, оно всюду плотно. Ситуация здесь схожа с КАМ теорией и с усреднением многомерных возмущенных систем [15], [16]. Однако надо иметь в виду, что обсуждаемая задача об асимптотике решения на бесконечности по своей постановке не имеет прямого отношения ни к КАМ теории, ни к задачам с малым параметром. Рассматриваемые решения не являются условно периодическими и не содержат малых параметров.

Вопрос об асимптотиках, равномерных по константам интегрирования, остается от-

крытым. В данной работе эта проблема обходится следующим образом. Обрыв бесконечного ряда приводит к расширению области равномерности асимптотики. Расплатой за расширение множества параметров становится конечный порядок аппроксимации. Чем выше порядок аппроксимации, тем шире множество исключительных параметров. Для асимптотик с конечным порядком аппроксимации множество подходящих параметров оказывается открытым. В задаче с одной степенью свободы таких эффектов не наблюдается [10].

Помимо рассматриваемых здесь решений, которые остаются ограниченными при $\theta \rightarrow \infty$, существуют решения, неограниченно растущие при $\theta \rightarrow \infty$. Их анализ выходит за рамки данной заметки и будет приведен в другой публикации. Заметим лишь, что параметры из резонансного множества не имеют отношения к растущим решениям. На резонансном множестве меняются скачком лишь члены старших порядков в представляемых ниже асимптотических рядах.

1. Невозмущенная система. Основой для предлагаемых ниже асимптотических конструкций служат решения автономной системы, которая получается из (1) при $f_j \equiv 0$. Такая система

$$\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi = 0 \quad (3)$$

при $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, $j = 1, 2, 3$, $j + k + l = 6$, $k \neq l$, называемая далее *невозмущенной*, легко интегрируется.

ТЕОРЕМА 1. *Для системы уравнений (3) существует общее шестипараметрическое решение*

$$\rho_j = \overset{\circ}{R}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}), \quad \psi_j = \overset{\circ}{\Psi}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

с шестью произвольными константами: $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, S_2\}$ при $S_1 + S_2 + S_3 = 0$. Вектор-функции $\overset{\circ}{R}_j(\theta; \mathbf{E})$, $\overset{\circ}{\Psi}_j(\theta; \mathbf{E})$ являются гладкими, периодическими по θ с периодом $\Theta = \Theta(\mathbf{E})$ и с частотой $\Omega = 2\pi/\Theta$. В фазовых функциях ψ_j содержатся линейные по θ слагаемые с коэффициентами, которые удовлетворяют соотношению $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 \equiv 0$.

Дополнение. Все остальные решения невозмущенной системы либо входят в четырехпараметрическое семейство решений с постоянными ненулевыми амплитудами $R_1 = R_2 R_3 / \sqrt{R_2^2 + R_3^2} \ \forall R_2, R_3 = \text{const} \neq 0$, либо входят в четырехпараметрическое семейство непериодических решений, либо представляют собой неподвижные точки (для системы в декартовых координатах типа (2)), в которых, по крайней мере, пара амплитуд обращается в нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда в исходных уравнениях все коэффициенты $\gamma_j = 1$ одного знака, любые нетривиальные решения имеют полюса. Такие уравнения здесь не рассматриваются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы основано на наличии трех первых интегралов:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos \psi = E_1, \quad \rho_2^2 + \rho_1^2 = E_2, \quad \rho_3^2 + \rho_1^2 = E_3,$$

значения которых используются в качестве параметров. Поскольку уравнения для четырех функций $\psi, \rho_j, j = 1, 2, 3$, можно отделить от остальных:

$$\rho'_j + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_1 \rho_2 \rho_3 \psi' + [(\rho_2 \rho_3)^2 - (\rho_1 \rho_3)^2 - (\rho_1 \rho_2)^2] \cos \psi = 0, \quad (5)$$

первые интегралы обеспечивают решение задачи в терминах эллиптических функций Якоби. Например, выражение одной из компонент через функцию синус амплитуды имеет вид

$$R_1^0(\theta; \mathbf{E}) = [\eta_1 + (\eta_3 - \eta_1)k^2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{\eta_3 - \eta_1}\theta, k)]^{1/2}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1}. \quad (6)$$

Используемые здесь параметры $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ являются корнями полинома $\eta(E_2 - \eta) \times (E_3 - \eta) - E_1^2$. В терминах этой эллиптической функции выписываются остальные компоненты решения ρ_j, ψ_j .

При интегрировании уравнений для фазовых функций появляются непериодические слагаемые, обусловленные ненулевыми средними значениями

$$\Omega_j = -\gamma_j E_1 \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta (\overset{\circ}{R}_j)^{-2} d\theta \equiv -\gamma_j E_1 \langle (\overset{\circ}{R}_j)^{-2} \rangle. \quad (7)$$

Очевидно, коэффициенты $\Omega_j \neq 0$ при $E_1 \neq 0$. Однако сумма их равна нулю $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$, поскольку комбинационная фаза $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ является периодической функцией. По той же причине три константы интегрирования S_j содержат лишь два произвола; связь между ними определяется способом фиксации средних значений фаз ψ_j . Например, если осциллирующие части фиксировать, требуя нулевого среднего значения $\langle \overset{\circ}{\Psi}_j \rangle = 0$, то константы интегрирования будут связаны со средним значением комбинационной фазы соотношением $S_1 + S_2 + S_3 = \langle \psi \rangle$. Если же положить $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, то среднее $\langle \psi \rangle$ будет содержаться в средних значениях осциллирующих частей $\overset{\circ}{\Psi}_j$. Теорема доказана.

В декартовых переменных полученное решение представляется трех-периодическими функциями $x_j(\theta), y_j(\theta)$ с частотами Ω, Ω_j . Заметим, что все амплитуды $\rho_j(\theta)$ имеют одну (основную) частоту $\Omega(\mathbf{E})$. Дополнительные частоты $\Omega_j(\mathbf{E})$ проявляются в компонентах $x_j(\theta), y_j(\theta)$ через фазовые функции.

На плоскости параметров $E_2 = E_3$ при $E_1 \neq 0$ происходит вырождение решения в двухчастотное с $\Omega_2 = \Omega_3$ и $\rho_2(\theta) \equiv \rho_3(\theta)$. На плоскости параметров $E_1 = 0$ при $E_2 \neq E_3$ решение вырождается в одночастотное с $\Omega \neq 0, \Omega_j = 0$; в этом решении амплитуда $\rho_1(\theta)$ проходит через нулевое значение при постоянной комбинационной фазе $\psi \equiv \pm\pi/2$. На пересечении плоскостей решения будут непериодическими. В данной работе анализируются решения со значениями параметров $\mathbf{E}$ вне этих двух плоскостей.

В структуре асимптотики важную роль играют резонансные соотношения для частот

$$m\Omega(\mathbf{E}) + p[\omega_1 + \Omega_1(\mathbf{E})] + q[\omega_2 + \Omega_2(\mathbf{E})] + r[\omega_3 + \Omega_3(\mathbf{E})] = 0, \quad m, p, q, r \in \mathbb{Z}.$$

Эти соотношения определяют в пространстве параметров $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3$ поверхности, называемые резонансными [15]. Множество всех резонансных значений параметров $\mathbf{E}$ всюду плотно в области, где определены частоты $\Omega(\mathbf{E}), \Omega_j(\mathbf{E})$. Если ограничить номера

$|p|, |q|, |r| \leq N < \infty$, то при $m \in \mathbb{Z}$ счетное множество резонансных поверхностей будет “довольно редким”, так что дополнение к ним оказывается открытым множеством. Объединение таких резонансных поверхностей будет обозначаться через $\mathcal{E}_N$.

В пространстве параметров $\mathbf{E}$ имеется еще одно исключительное множество, при выходе на которое меняется структура асимптотики возмущенного решения. Оно состоит из точек, в которых частоты оказываются функционально зависимыми. Из аналитических свойств невозмущенного решения вытекает, что таких точек “не много”:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для матрицы, составленной из градиентов частот $\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)/\partial(\mathbf{E})$, ранг зависит от параметров и вне плоскостей $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ его значение $r = r(\mathbf{E}) \geq 2$; максимальный ранг $r = 3$ всюду вне поверхности*

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ \mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 : \det \frac{\partial(\Omega, \Omega_k, \Omega_l)}{\partial(\mathbf{E})} = 0 \quad \forall k \neq l \right\}.$$

2. Линеаризованная система уравнений. Построение асимптотик на основе решения невозмущенной системы, как обычно, приводит к линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{d\theta} + \gamma_j [\overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l \cos \overset{\circ}{\Psi}] \Psi + \gamma_j [\overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l + \overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l] \sin \overset{\circ}{\Psi} &= H_{\rho,j}(\theta), \\ \frac{d\Psi_j}{d\theta} - \gamma_j \Psi [\overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l \sin \overset{\circ}{\Psi}] / \overset{\circ}{R}_j + \gamma_j \cos \overset{\circ}{\Psi} [\overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l + \overset{\circ}{R}_l \overset{\circ}{R}_k - \overset{\circ}{R}_j \overset{\circ}{R}_k \overset{\circ}{R}_l / \overset{\circ}{R}_j] / \overset{\circ}{R}_j &= H_{\psi,j}(\theta), \\ \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, \quad j = 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6. \end{aligned} \quad (8)$$

В рассматриваемых ниже ситуациях правые части будут условно периодическими по θ функциями. Однако решение неоднородных уравнений $\{R_j, \Psi_j\}$ может оказаться неограниченным. Для ограниченности решения требуются дополнительные условия на вектор-функции правых частей $\mathbf{H} = \{H_{\rho,1}, H_{\rho,2}, H_{\rho,3}, H_{\psi,1}, H_{\psi,2}, H_{\psi,3}\}^T$. Такие условия выявляются в данном разделе.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть вектор-столбец*

$$\overset{\circ}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \{\overset{\circ}{R}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}), \overset{\circ}{\Psi}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j\}^T$$

представляет собой построенное выше шестипараметрическое решение нелинейной системы (3) вне плоскостей $E_1 = 0$ и $E_2 = E_3$. Тогда для линеаризованной однородной системы, соответствующей (8), существует фундаментальная матрица решений $\mathcal{W}$, столбцы которой имеют следующую структуру:

$$\mathbf{Y}_i(\theta), \quad i = 0, 1, 2, \quad \mathbf{Y}_i(\theta) = \hat{\mathbf{Y}}_i(\theta) + \theta \sum_{m=0}^2 \nu_{i,m} \mathbf{Y}_m(\theta), \quad i = 3, 4, 5. \quad (9)$$

Вектор-функции $\mathbf{Y}_i(\theta)$, $i = 0, 1, 2$, и $\hat{\mathbf{Y}}_i(\theta)$, $i = 3, 4, 5$, являются периодическими по θ с частотой $\Omega(\mathbf{E})$. Число линейно независимых неперiodических решений равно r – рангу матрицы $\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)/\partial(\mathbf{E})$, через элементы которой выражаются коэффициенты $\nu_{i,m} = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одна тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании вектор-функции $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ по переменным S_i и имеет вид

$$\mathbf{Y}_0 = \partial_\theta \{ \overset{0}{R}_j, \overset{0}{\Psi}_j \}^\top, \quad \mathbf{Y}_1 = (0, 0, 0, 1, 0, -1)^\top, \quad \mathbf{Y}_2 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^\top.$$

Другая тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании по параметрам $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{Y}_i = \partial_{E_{i-2}} \overset{0}{\mathbf{Y}} = \widehat{\mathbf{Y}}_i(\theta) + \theta \sum_{m=0}^2 \nu_{i,m} \mathbf{Y}_m(\theta), \quad \nu_{i,m} = \text{const}, \quad i = 3, 4, 5. \quad (10)$$

Периодическая часть здесь выделена в $\widehat{\mathbf{Y}}_i(\theta)$. Непериодические слагаемые обязаны зависимости частот от параметров $\mathbf{E}$; ранг матрицы $\{\nu_{i,m}\}$ равен r . Легко понять, что построенные таким образом решения будут линейно независимыми. Вронскиан вычисляется через след матрицы линеаризованной системы и для определенной выше системы решений выражается по формуле $\det \mathcal{W} = -(4\overset{0}{R}_1\overset{0}{R}_2\overset{0}{R}_3)^{-1}$.

Наличие фундаментальной системы решений позволяет выписать решения соответствующих неоднородных уравнений через интегралы

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathcal{W}(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathcal{W}^{-1}(\vartheta) \mathbf{H}(\vartheta) d\vartheta, \quad \theta_0 = \text{const}. \quad (11)$$

Получаемое по этой формуле решение, вообще говоря, не будет ограниченным при $\theta \rightarrow \infty$, даже для периодической правой части $\mathbf{H}$. Ниже будут сформулированы условия ограниченности и предъявлена конструкция общего условно периодического решения. Поскольку в этой процедуре используется метод вариации произвольных постоянных, то основными объектами являются определители $W_i[\mathbf{H}]$, которые получаются из вронскиана $W = \det \mathcal{W}$ заменой i -го столбца $\mathbf{Y}_i$ на столбец правых частей $\mathbf{H}$. Чтобы не затемнять существо дела, ограничимся ситуацией общего положения, рассматривая те значения параметров $\mathbf{E}$, где частоты функционально независимы, т.е. при $r = 3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и число непериодических базисных решений $r = 3$. Если вектор-функция правых частей $\mathbf{H}(\theta)$ имеет период Θ , совпадающий с периодом решения нелинейной системы, то линеаризованная неоднородная система (8) имеет ограниченное (частное) решение $\tilde{\mathbf{Y}}(\theta)$ тогда и только тогда, когда выполняются три условия ортогональности

$$\int_0^\Theta W_i[\mathbf{H}] \overset{0}{R}_1 \overset{0}{R}_2 \overset{0}{R}_3(\theta) d\theta = 0, \quad i = 3, 4, 5. \quad (12)$$

Общее ограниченное решение содержит три произвольные константы

$$\mathbf{Y}(\theta) = \tilde{\mathbf{Y}}(\theta) + \sum_{i=0}^2 \mathcal{C}_i \mathbf{Y}_i(\theta) \quad \forall \mathcal{C}_i = \text{const}. \quad (13)$$

Доказательство сводится к идентификации растущих (секулярных) слагаемых в интеграле (11). Условия (12) обеспечивают исключение таких членов.

Секулярные слагаемые в решении могут возникать лишь при совпадении частот правой части $\mathbf{H}(\theta)$ с собственными частотами $m\Omega$, $m \in \mathbb{Z}$, базисных решений. В том случае, когда такого совпадения нет, решение будет ограничено при дополнительном условии отсутствия малых знаменателей в соответствующих рядах Фурье. В частности, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть вектор-функция правой части $\mathbf{H}(\theta)$ является гладкой, условно периодической функцией и ее разложение Фурье

$$\mathbf{H}(\theta) = \sum_{m,p,q,r} \mathbf{H}_{m,p,q,r} \exp(i\theta[m\Omega + p(\Omega_1 + \omega_1) + q(\Omega_2 + \omega_2) + r(\Omega_3 + \omega_3)])$$

содержит конечное число гармоник на дополнительных частотах: $|p|, |q|, |r| \leq M < \infty$. Если выполнены условия (12), то общее условно периодическое решение имеет разложение Фурье такого же типа и содержит три произвольные константы $\mathcal{C}_j$ в форме (13).

3. Асимптотика ограниченных на бесконечности решений. Исходные неавтономные уравнения (1), называемые далее *возмущенными*, в общем случае не интегрируются. Для их исследования используется предъявленное выше невозмущенное решение (4). Оно берется в качестве главного (неубывающего) члена асимптотики возмущенного решения на бесконечности. В получаемой таким образом конструкции правая часть уравнений (1) проявляется лишь в поправках порядка $\mathcal{O}(\theta^{-1})$ при том, что амплитуды возмущений $f_j(\theta)$ вовсе не убывают на бесконечности¹. Эффект слабого влияния правых частей уравнений объясняется быстрыми осцилляциями рассматриваемого возмущения (1) с заданными фазовыми функциями $\varphi_j \approx \theta^2$, $\theta \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и $\mathbf{E} \notin \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_0$. Для уравнений (1) существует шестипараметрическое решение $\rho_j, \psi_j(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$, $j = 1, 2, 3$, которое для любого $N \geq 1$ имеет асимптотическое разложение на бесконечности

$$\begin{aligned} \rho_j &= \overset{0}{R}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}) + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^{-n} \overset{n}{R}_j(\theta^2, \theta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) + \mathcal{O}(\theta^{-N}), \\ \psi_j &= \overset{0}{\Psi}_j(\theta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^{-n} \overset{n}{\Psi}_j(\theta^2, \theta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) + \mathcal{O}(\theta^{-N}) \end{aligned} \quad (14)$$

при $S_1 + S_2 + S_3 = 0$. Коэффициенты $\overset{n}{\Psi}, \overset{n}{R}(\eta, \theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ являются условно периодическими функциями по переменным η, θ . Вне резонансных поверхностей $\mathbf{E} \notin \mathcal{E}_{N+2} \cup \mathcal{E}_0$ оценки остатков асимптотики являются равномерными по всем параметрам на любом компакте.

¹Надо иметь ввиду, что те же самые возмущенные уравнения (1) имеют растущие решения, асимптотика которых в главном определяется параметрами правых частей.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Первые поправки выражаются через тригонометрические функции и невозмущенное решение по формулам*

$$\begin{aligned} {}^1R_j &= -\frac{f_j}{2\alpha_j} \cos({}^0\Psi_j + (\Omega_j + \omega_j)\theta + S_j + \alpha_j\theta^2), \\ {}^1\Psi_j &= \frac{f_j}{2\alpha_j} ({}^0R_j)^{-1} \sin({}^0\Psi_j + (\Omega_j + \omega_j)\theta + S_j + \alpha_j\theta^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Старшие поправки имеют подобную структуру в виде тригонометрических полиномов по “быстрым” переменным $\alpha_j\theta^2$.

Приводимое ниже доказательство теоремы представляет собой описание процедуры построения коэффициентов асимптотических рядов. Обоснование асимптотики с оценкой остаточных членов может быть выполнено аналогично [17] и здесь не приводится. Построение коэффициентов сводится к решению дифференциальных уравнений и состоит из нескольких этапов. На разных этапах находится зависимость от разных фазовых переменных, что можно интерпретировать, как разделение движений с разными временными масштабами. В асимптотическом решении идентифицируются три масштаба, характерные для далеких времен $\theta \rightarrow \infty$. Самый быстрый масштаб задается быстрыми вынуждающими колебаниями с фазами $\varphi_j(\theta) \approx \theta^2$, $\theta \rightarrow \infty$. Второй масштаб определяется собственными колебаниями невозмущенной системы с частотами Ω, Ω_j . Третий (медленный) масштаб характеризуется обратной степенью θ^{-1} . Процедуру получения дифференциальных уравнений для коэффициентов асимптотики на каждом последующем (медленном) масштабе можно рассматривать, как усреднение на предыдущем (быстром) масштабе.

3.1. *Усреднение в масштабе внешней накачки.* С формальной точки зрения первый этап построения асимптотики состоит в замене переменных, которая выполняется в асимптотическом приближении.

Вводится дополнительная переменная $\eta = \theta^2/2$. Решение ищется в виде функций нескольких переменных: $\rho_j = \tilde{\rho}_j(\eta, \theta; \mathbf{Y})$, $\psi_j = \tilde{\psi}_j(\eta, \theta; \mathbf{Y})$. Фигурирующий здесь вектор $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^6$ рассматривается, как новый набор неизвестных функций $\mathbf{Y} = \{R_j(\theta), \Psi_j(\theta)\}^T$, а введенные соотношения интерпретируются, как замена переменных. Требуется подыскать функции замены $\tilde{\rho}_j, \tilde{\psi}_j$ так, чтобы уравнения для $\mathbf{Y}$ не содержали зависимость от $\eta = \theta^2/2$ в осциллирующих частях.

Поставленная таким образом задача решается не в точной постановке, а в асимптотическом приближении при $\theta \rightarrow \infty$. С этой целью вводится асимптотический анзац, аналог анзатца Крылова–Боголюбова:

$$\{\rho_j(\theta), \psi_j(\theta)\}^T = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \mathbf{y}^n(\eta; \mathbf{Y}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Требуется определить коэффициенты $\mathbf{y}^n(\eta; \mathbf{Y})$ в классе вектор-функций, ограниченных по $\eta \in \mathbb{R}$ так, чтобы исходные уравнения (1) перешли в систему

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\theta} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \theta), \quad (17)$$

в которой правая часть представляется в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \mathbf{F}^n(\mathbf{Y}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (18)$$

ЛЕММА 1. Из требования асимптотического выполнения уравнений (1) коэффициенты рядов (16), (18) определяются однозначно по рекуррентным формулам. Они представляют собой условно периодические функции по η с тремя независимыми частотами α_j . Получаемая при этом система (17) оказывается асимптотически эквивалентна исходным уравнениям (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки асимптотического ряда (16) в уравнения (1) и приравнивания выражений при одинаковых степенях θ получаются уравнения для коэффициентов $\overset{n}{\mathbf{y}}(\eta; \mathbf{Y})$, которые выглядят тривиально

$$\partial_{\eta} \overset{n}{\mathbf{y}} = \overset{n}{\mathbf{f}}(\eta; \mathbf{Y}).$$

Правые части на каждом шаге определяются через предыдущие приближения. На исходном шаге уравнения оказываются однородными $\overset{0}{\mathbf{f}} \equiv 0$. Поэтому главный член асимптотического решения не зависит от η , и без ограничения общности можно положить $\overset{0}{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{Y}$.

Во всех последующих приближениях зависимость от η входит в виде комбинаций тригонометрических функций. Дополнительные условия ограниченности по η сводятся к требованию обращения в нуль средних значений от правых частей $\langle \overset{n}{\mathbf{f}} \rangle = 0$. Как раз эти требования приводят к определению коэффициентов $\overset{n}{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})$. В частности, при решении задачи для первой поправки $\overset{1}{\mathbf{y}}$ находится $\overset{0}{\mathbf{F}} = -\mathbf{L}(\mathbf{Y})$.

Отметим, что при интегрировании уравнений в быстрой переменной η не возникает проблемы малых знаменателей, характерной для многомерных систем, поскольку получаемые здесь разложения Фурье представляют собой тригонометрические полиномы, а не бесконечные ряды.

В заключение выпишем формулы, которые дают выражения для правых частей усредненных уравнений. Первая поправка оказывается нулевой $\overset{1}{\mathbf{F}} \equiv 0$. Вторая поправка представима в виде суммы двух слагаемых, из которых первое определяется через нелинейную часть невозмущенной системы

$$\overset{2}{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}) = \lambda \mathbf{L}(\mathbf{Y}) + \mathbf{G}(\mathbf{Y}), \quad \lambda = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{f_j}{8\alpha_j R_j} \right). \quad (19)$$

Вектор второго слагаемого содержит компоненты, из которых ненулевыми могут быть лишь последние три: $\mathbf{G} = \{0, 0, 0, F_{\psi,1}, F_{\psi,2}, F_{\psi,3}\}^T$ при

$$F_{\psi,j} = \gamma_j \frac{2}{R_j^2} \left(R_l \langle \overset{1}{\rho}_j \overset{1}{\rho}_k \rangle + R_k \langle \overset{1}{\rho}_j \overset{1}{\rho}_l \rangle - \frac{R_k R_l}{R_j} \frac{f_j^2}{8\alpha_j^2} \right) \cos \Psi, \quad j+k+l=6, \quad j=1,2,3, \quad k \neq l.$$

Эти формулы содержат средние (по η) значения от произведений первых поправок

$$\overset{1}{\rho}_j(\eta; \mathbf{Y}) = -\frac{f_j}{2\alpha_j} \cos(\Psi_j + \omega_j \theta + \alpha_j \eta).$$

Поэтому среди первых двух слагаемых встречаются ненулевые лишь в резонансном случае, когда совпадает хотя бы пара “быстрых” частот в вынуждающих колебаниях: $\exists p \neq q: \alpha_p^2 = \alpha_q^2$. Таким способом получают векторы $\overset{n}{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})$ на любом шаге. Лемма доказана.

3.2. *Усреднение в масштабе свободных колебаний.* Асимптотическое интегрирование усредненных уравнений (17) составляет второй этап построения асимптотики решения исходных уравнений (1). По своей форме усредненная система мало отличается от исходной. В самом деле, если главный член разложения $\mathbf{F}(\mathbf{Y}; \theta)$ перенести в левую часть, то получим уравнения, которые совпадают по форме с (1)

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{d\theta} + \gamma_j R_k R_l \sin \Psi &= F_{\rho,j}(\mathbf{Y}, \theta), & \frac{d\Psi_j}{d\theta} + \gamma_j (R_k R_l / R_j) \cos \Psi &= F_{\psi,j}(\mathbf{Y}, \theta), \\ \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, & j &= 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad k \neq l. \end{aligned} \quad (20)$$

Основное отличие содержится в векторе правых частей $\tilde{\mathbf{F}} = \{F_{\rho,j}, F_{\psi,j}\}^\top$, который в силу (18) имеет разложение по отрицательным степеням:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_{n=2}^{\infty} \theta^{-n} \tilde{\mathbf{F}}^n(\mathbf{Y}), \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (21)$$

и не содержит каких-либо осцилляций.

Поскольку правая часть стремится к нулю при $\theta \rightarrow \infty$, ясно, что главную роль в асимптотике играет решение невозмущенной системы уравнений $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$. На его основе можно построить асимптотическое решение в виде ряда по отрицательным степеням θ^{-n} с коэффициентами, которые вычисляются в терминах вектор-функции $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$. Однако прямое конструирование асимптотики в такой, наиболее простой, форме наталкивается на трудности при исключении секулярных слагаемых. Трудности связаны с исследованием возникающих систем нелинейных алгебраических уравнений. Эти проблемы можно обойти, если использовать идеи Крылова–Боголюбова–Кузмака. Для асимптотического решения вводится анзац

$$\mathbf{Y}(\theta) = \overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S}), \quad (22)$$

коэффициенты которого содержат дополнительную зависимость от θ в сдвигах фаз: $S_j = S_j(\theta)$, $j = 0, 1, 2$, $S_1 + S_2 + S_3 \equiv 0$; параметры $\mathbf{E}$ остаются постоянными. В этом асимптотическом решении требуется определить коэффициенты $\overset{n}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ в классе функций, ограниченных по быстрой переменной $\theta \in \mathbb{R}$. Требования ограниченности будут удовлетворяться за счет подходящего выбора вектора $\mathbf{S}(\theta) = \{S_0(\theta), S_1(\theta), S_2(\theta)\}$. Для этих функций фазовых сдвигов вводятся уравнения, которые являются отдаленными аналогами уравнений эйконала:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\theta} = \mathbf{Z}(\theta, \mathbf{S}; \mathbf{E}). \quad (23)$$

На первом этапе будут получены не сами сдвиги $\mathbf{S}$, а правые части уравнений в виде асимптотических рядов

$$\mathbf{Z}(\theta, \mathbf{S}; \mathbf{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{\mathbf{Z}}(\mathbf{S}, \mathbf{E}). \quad (24)$$

Асимптотика для вектора $\mathbf{S}(\theta)$ будет строиться на втором этапе.

ЛЕММА 2. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$. Тогда из требования асимптотического выполнения уравнений (20) коэффициенты рядов (22), (24) определяются по рекуррентным формулам. Векторы $\overset{n}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ представляют собой условно периодические функции по θ с периодами $\Omega, \Omega_j + \omega_j$. Структура рядов (24) в старших поправках меняется при выходе параметров $\mathbf{E}$ на резонансные поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поправки $\overset{n}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ определяются из линейризованных уравнений (8), которые для краткости запишем в векторной форме

$$\frac{d\overset{n}{\mathbf{Y}}}{d\theta} + L_1(\overset{0}{\mathbf{Y}})\overset{n}{\mathbf{Y}} = \overset{n}{\mathbf{H}}(\theta; \mathbf{S}, \mathbf{E}). \quad (25)$$

Переменные $\mathbf{S}, \mathbf{E}$ присутствуют здесь в качестве параметров; в частности, от них зависит линейризованная часть оператора $L_1(\overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{S}, \mathbf{E}))$. Правые части $\overset{n}{\mathbf{H}}$ на разных шагах $n = 1, 2, 3, \dots$ вычисляются по рекуррентным формулам через предыдущие приближения и содержат три неопределенные компоненты вектора $\overset{n}{\mathbf{Z}} = \{\overset{n}{Z}_0, \overset{n}{Z}_1, \overset{n}{Z}_2\}$ в комбинации с базисными решениями $\mathbf{Y}_i$. В частности,

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathbf{H}} &= -\sum_{i=0}^2 \overset{1}{Z}_i \mathbf{Y}_i, \quad \overset{2}{\mathbf{H}} = \overset{1}{\mathbf{Y}} - L_2(\overset{0}{\mathbf{Y}})\overset{1}{\mathbf{Y}}\overset{1}{\mathbf{Y}} - \sum_{i=0}^2 [\overset{2}{Z}_i \mathbf{Y}_i + \overset{1}{Z}_i \partial_{S_i} \overset{1}{\mathbf{Y}}] + \overset{2}{\mathbf{F}}, \\ \overset{n+1}{\mathbf{H}} &= n\overset{n}{\mathbf{Y}} - 2L_2(\overset{0}{\mathbf{Y}})\overset{1}{\mathbf{Y}}\overset{n}{\mathbf{Y}} - \sum_{i=0}^2 [\overset{n+1}{Z}_i \mathbf{Y}_i + \overset{1}{Z}_i \partial_{S_i} \overset{n}{\mathbf{Y}}] + \overset{n+1}{\mathbf{F}} + \overset{n}{\mathbf{G}}(\overset{0}{\mathbf{Y}}, \dots, \overset{n-1}{\mathbf{Y}}), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Через L_2 здесь обозначен оператор квадратичной формы, который получается при разложении Тейлора исходного нелинейного оператора. В векторе $\overset{n}{\mathbf{G}}$ перечислена зависимость от предыдущих приближений.

Решения линейризованных уравнений выписываются через интегралы в терминах вектора $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\theta; \mathbf{S}, \mathbf{E})$. Требования ограниченности (12) удовлетворяются за счет произвола в $\overset{n}{Z}_i$. При этом выбор $\overset{n}{Z}_i$ затягивается на один шаг. Так, на первом шаге $n = 1$ условия (12) выполняются автоматически в силу специфики правой части $\overset{1}{\mathbf{H}}$. Ограниченное решение выписывается через осциллирующие слагаемые растущих базисных решений

$$\overset{1}{\mathbf{Y}} = \sum_{i=0}^2 \overset{1}{Z}_i \sum_{m=3}^5 \mu_{i,m} \hat{\mathbf{Y}}_m; \quad (26)$$

здесь $\{\mu_{i,m}\}$ – матрица, обратная к $\{\nu_{i,m}\}$.

Уравнения для $\overset{1}{Z}_i$ возникают на втором шаге из требований (12) и оказываются линейными:

$$\sum_{i=0}^2 \mu_{i,m} \overset{1}{Z}_i = \langle W_m[\overset{2}{\mathbf{F}}]/W \rangle, \quad m = 3, 4, 5. \quad (27)$$

Самое замечательное, что в этих соотношениях не проявляются квадратичные по $\overset{1}{Z}$ слагаемые², содержащиеся в $\overset{2}{H}$. Доказательство этого свойства хотя и громоздко, но не содержит принципиальных трудностей.

Выражения в правой части (27) представляют собой средние значения по θ известных функций. Решение алгебраических уравнений $\overset{1}{Z}_i = \overset{1}{Z}_i(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ выписывается в явной форме. После этого можно выписать ограниченное решение линеаризованной системы $\overset{2}{Y}(\theta; \mathbf{S}, \mathbf{E})$. Оно содержит неопределенные коэффициенты $\overset{2}{Z}_i$ в форме, аналогичной (26). Эти коэффициенты находятся на следующем шаге из алгебраических уравнений типа (27). Важно отметить, что средние значения в правых частях алгебраических уравнений крайне чувствительны к вариации параметров $\mathbf{E}$ и меняются скачком при выходе $\mathbf{E}$ на резонансные поверхности. Множество резонансных поверхностей расширяется с ростом номера приближения. При любом фиксированном $\mathbf{E}$ полное построение рядов (22), (24) выполняется по индукции. Лемма доказана.

После того, как построены ряды правых частей (24), можно переходить к решению уравнений для фаз (23) в асимптотическом приближении при $\theta \rightarrow \infty$. Коэффициенты рядов (24) являются гладкими функциями по $\mathbf{S}$, поэтому асимптотическое интегрирование уравнений не вызывает затруднений. Однако зависимость их по $\mathbf{E}$ оказывается крайне нерегулярной из-за резонансов. Например, первый коэффициент $\overset{1}{Z}(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ может содержать компоненты, отличные от нуля лишь на резонансной поверхности главного порядка $\mathcal{E}_2$. Для таких значений параметров фазовые сдвиги $\mathbf{S}(\theta)$ в главных членах асимптотики могут содержать логарифмы $\ln \theta$, как это случается, например, в одномерных системах, либо дробные степени, что определяется структурой $\overset{1}{Z}(\mathbf{S}, \mathbf{E})$. Если же из множества параметров $\mathbf{E}$ исключить резонансные поверхности главного порядка, то фазовые сдвиги $\mathbf{S}(\theta)$ разлагаются по целым отрицательным степеням.

ЛЕММА 3. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и $\mathbf{E} \notin \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_0$. Тогда существует асимптотическое решение уравнений (23), представимое в виде ряда

$$\mathbf{S}(\theta; \mathbf{E}) = \overset{0}{\mathbf{S}} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{\mathbf{S}}(\mathbf{E}), \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (28)$$

с тремя произвольными параметрами $\overset{0}{\mathbf{S}} = \{\overset{0}{S}_0, \overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2\}$. Структура рядов в старших поправках меняется при выходе параметров $\mathbf{E}$ на резонансные поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вне резонансной поверхности $\mathcal{E}_2$ уравнения (27) оказываются однородными и, следовательно, $\overset{1}{Z} = 0$. После этого построение асимптотического решения уравнений (23) в виде ряда (28) сводится к последовательному определению коэффициентов $\overset{n}{\mathbf{S}}(\mathbf{E})$ из рекуррентных формул. Вектор $\overset{0}{\mathbf{S}} = \text{const}$ играет роль константы интегрирования.

²В этом месте обнаруживается преимущество выбранного анзацта с переменными сдвигами фаз.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Ряды (22), (23) представляют асимптотическое решение для усредненных уравнений (20) при указанных значениях $\mathbf{E}$.*

Объединение последнего утверждения с леммой 1 заканчивает формальную часть доказательства теоремы 4. Требуемое разложение типа (14) в виде бесконечного ряда получается из рядов (16), (22), (23) путем переразложения коэффициентов. Первая поправка в форме (15) выделяется с учетом тождества $\dot{\mathbf{Y}} \equiv 0$, которое получается в силу $\dot{\mathbf{Z}} = 0$. Структура рядов зависит от параметров $\mathbf{E}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
- [2] Каплан Ф. Е., Кривцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Советское радио, 1966.
- [3] Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
- [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [5] Yariv Sh., Friedland L. Autoresonant interaction of three nonlinear adiabatic oscillators // Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 4. P. 3072–3076.
- [6] Rokni U., Friedland L. Double autoresonance in two-dimensional dynamical systems // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 5. P. 5242–5252.
- [7] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1977.
- [8] Fajans J., Friedland L. Autoresonant (nonstationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators // Amer. J. Phys. 2001. V. 69. № 10. P. 1096–1102.
- [9] Калякин Л. А. Асимптотический анализ модели авторезонанса // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 5. С. 594–597.
- [10] Калякин Л. А. Асимптотика решений уравнений главного резонанса на бесконечности // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 3. С. 305–308.
- [11] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Московского ун-та, 1996.
- [12] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
- [13] Кузмак Г. Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // ПММ. 1951. Т. 23. № 3. С. 519–506.
- [14] Федорюк М. В. Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 2. С. 196–210.
- [15] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
- [16] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [17] Kalyakin L. A. Justification of asymptotic expansion for the principal resonance equations // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2003. P. S108–S122.

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа
E-mail: klenru@mail.ru, yulya@mail.ru.ru

Поступило
20.05.2004
Исправленный вариант
17.12.2004