Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Коновалов, О порядках нелинейных приближений классов функций заданной формы, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 98–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:35:09

УДК 517.5

О ПОРЯДКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

В. Н. Коновалов

Пусть Δ_+^s – множество функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ на конечном интервале I таких, что разделенные разности $[x; t_0, \dots, t_s]$ порядка $s \in \mathbb{N}$ этих функций являются неотрицательными для всех наборов из $(s+1)$ различных точек $t_0, \dots, t_s \in I$. При всех $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ установлены точные порядки наилучших приближений сплайнами со свободными узлами и рациональными функциями в метриках L_p классов $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \cap B_p$, где B_p – единичный шар в L_p . Также установлена асимптотика псевдо-размерностных поперечников в L_p этих классов функций.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Формулировки основных результатов. При $s \in \mathbb{N}$ функцию $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *s-монотонной* на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ (интервале, полуинтервале или отрезке), если для всех наборов из $(s+1)$ различных точек $t_0, \dots, t_s \in I$ соответствующие разделенные разности $[x; t_0, \dots, t_s]$ порядка s этой функции являются неотрицательными. Очевидно, что *s-монотонные* функции при $s=1$ и $s=2$ это, соответственно, неубывающие и выпуклые функции на I . Следовательно, параметр s характеризует форму функций. По поводу свойств *s-монотонных* функций смотри [1]–[3].

Класс всех *s-монотонных* на I функций будем обозначать через $\Delta_+^s(I)$. Кроме того, если на I определен некоторый класс функций $W(I)$, то полагаем $\Delta_+^s W(I) := \Delta_+^s(I) \cap W(I)$. Через $L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаем, как обычно, линейное пространство всех измеримых по Лебегу функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|x\|_{L_p(I)}$. При $p = \infty$ под $\|x\|_{L_\infty(I)}$ понимается *ess sup-* или *sup-*норма. Единичный шар пространства $L_p(I)$ обозначаем через $B_p(I)$. Для промежутка I с концами в точках $a := -1$ и $b := 1$ его обозначение будет иногда опускаться. Например, если $I = (-1, 1)$, то $W := W(I)$.

Обозначим через $P_n(I)$, где $n \in \mathbb{N}$, множество всех алгебраических многочленов π_n порядка $\leq n$ (т.е. степени $\leq n-1$), определенных на промежутке I . Через $R_n(I)$ обозначаем множество всех рациональных функций на I , имеющих вид $\rho_n = \hat{\pi}_n / \tilde{\pi}_n$, где $\hat{\pi}_n, \tilde{\pi}_n \in P_n$. При этом предполагается, что $\tilde{\pi}_n \neq 0$. В тех точках $t \in I$, где $\tilde{\pi}_n(t) = 0$, функция ρ_n может принимать произвольные конечные значения. Если на промежутке I с концами в точках $a := -1$ и $b := 1$ задан некоторый класс W функций x такой, что $W \subset L_q$, то через

$$E(W, R_n)_{L_q} := \sup_{x \in W} \inf_{\rho_n \in R_n} \|x - \rho_n\|_{L_q}$$

обозначим величину его наилучшего приближения в L_q множеством R_n .

А. П. Булановым [4] было установлено, что для множества $\Delta_+^2 B_\infty$ всех выпуклых на интервале $I := (-1, 1)$ функций x , удовлетворяющих ограничению $\|x\|_{L_\infty} \leq 1$, справедливы двухсторонние оценки

$$c_1 n^{-1} \leq E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c_2 n^{-1} \log^2(n+1), \quad n \geq 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ – абсолютные постоянные.

Затем В. А. Попов и П. П. Петрушев [5] усилили оценку сверху, доказав, что

$$E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c n^{-1}, \quad n \geq 1,$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная. Таким образом, был найден точный порядок

$$c_1 n^{-1} \leq E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c_2 n^{-1}, \quad n \geq 1,$$

наилучших приближений в L_∞ класса $\Delta_+^2 B_\infty$ рациональными функциями.

В связи с этим результатом возникает ряд вопросов. Например, можно ли получить подобную оценку для наилучших приближений классов $\Delta_+^2 B_p$ в метриках L_p при $1 \leq p < \infty$? Каковы порядки наилучших приближений рациональными функциями в L_p при $1 \leq p \leq \infty$ классов $\Delta_+^s B_p$ для $s \neq 2$? Могут ли сплайны обеспечить приближения по порядку лучшие, чем рациональные функции? Реализуют ли множества рациональных функций и сплайнов наилучший порядок приближения, по сравнению с другими нелинейными многообразиями функций, имеющими заданную “размерность”?

В данной работе предлагаются ответы на эти вопросы. Точнее, решается задача о порядковой асимптотике наилучших приближений классов $\Delta_+^s B_p$ при всех $s \in \mathbb{N}$ в метриках L_p , $1 \leq p \leq \infty$, сплайнами со свободными узлами и рациональными функциями. Кроме того, для этих классов устанавливаются точные порядки псевдо-размерностных перечников.

Через $\Sigma_{r,n}(I)$, где $r, n \in \mathbb{N}$, обозначим множество всех определенных на промежутке I кусочно-полиномиальных сплайнов $\sigma_{r,n}$ порядка $\leq r$ с не более чем $(n-1)$ свободными узлами. По определению $\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}(I)$, если существует некоторый набор $\{I_i\}_{i=1}^m$ из $m \leq n$ попарно непересекающихся интервалов $I_i \subseteq I$, суммарная длина которых равна длине I , и таких, что на каждом из интервалов I_i сплайн $\sigma_{r,n}$ совпадает с некоторым многочленом $\pi_r(\cdot; I_i) \in P_r(I_i)$. Точки промежутка I , в которых сплайн $\sigma_{r,n}$ или хотя бы одна из его производных имеют разрыв, называются *узлами*. Узлы, лежащие внутри промежутка I , будем называть *свободными*.

Псевдо-размерность совокупности $M := \{x\} \neq \emptyset$ функций $x: T \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на произвольном множестве $T \neq \emptyset$, определяется следующим образом (см. [6, раздел 4, определение 3]). Для чисел $a \in \mathbb{R}$ полагаем $\operatorname{sgn} a := 1$ при $a > 0$ и $\operatorname{sgn} a := 0$ при $a \leq 0$. Псевдо-размерностью $\dim_{ps}(M)$ множества функций M называется наибольшее из чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что для каждого из них существуют набор точек $t_1, \dots, t_n \in T$ и вектор $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\operatorname{card}\{(\operatorname{sgn}(x(t_1) + a_1), \dots, \operatorname{sgn}(x(t_n) + a_n)) \mid x \in M\} = 2^n.$$

Если конечного n не существует, то $\dim_{ps}(M) := \infty$, а если M состоит лишь из одной функции, то $\dim_{ps}(M) := 0$.

Псевдо-размерность обобщает понятие обычной размерности $\dim(M)$ линейных пространств M действительно-значных функций, так как известно (см. [6, раздел 4, теорема 4]), что в этом случае $\dim(M) = \dim_{ps}(M)$.

Известно также, что для множеств $\Sigma_{r,n} = \Sigma_{r,n}(I)$ сплайнов и множеств $R_n = R_n(I)$ рациональных функций имеют место соотношения

$$n \leq \dim_{ps}(\Sigma_{r,n}) \leq cn, \quad n \leq \dim_{ps}(R_n) \leq cn, \quad n \geq 1,$$

где $c > 0$ не зависит от n . Оценки снизу в этих соотношениях очевидны, так как множество $\Sigma_{r,n}$ содержит пространство сплайнов (с фиксированными узлами) размерности n , а множество R_n содержит n -мерное пространство P_n многочленов порядка n . Оценки сверху нетрудно получить непосредственно из определения псевдо-размерности, если учесть, что сплайны из $\Sigma_{r,n}(I)$ и рациональные функции из $R_n(I)$ могут менять знак на промежутке I не более, чем cn раз, где c не зависит от n .

Д. Ратсаби и В. Майоров [7], [8], используя понятие псевдо-размерности, ввели новые нелинейные поперечники, определив их следующим образом. Пусть $X = X(T)$ – линейное пространство функций $x: T \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_X$, а $W = W(T)$ – произвольное непустое подмножество в X . Тогда величина

$$d_n(W)_X^{psd} := \inf_{M^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум взят по всем $M^n \subseteq X$ псевдо-размерности $\leq n$, называется *псевдо-размерностным n -поперечником* множества W в X .

Прежде чем сформулировать полученные результаты, условимся еще о некоторых обозначениях. Через $|I|$ будут обозначаться длины промежутков I , а через $c := c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ – различные положительные “постоянные”, зависящие от параметров $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Если заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительных чисел a_n и b_n , то эти последовательности удовлетворяют соотношению $a_n \asymp b_n$, $n \geq 1$, тогда и только тогда, когда существуют, не зависящие от n , постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$ для всех $n \geq 1$.

Основные результаты приведены в следующей теореме, где предполагается, что классы $\Delta_+^s B_p$ заданы на интервале $I := (-1, 1)$. В формулировку теоремы включен и результат о наилучшем равномерном приближении класса $\Delta_+^2 B_\infty$ рациональными функциями, принадлежащий А. П. Буланову [4], В. А. Попову и П. П. Петрушеву [5].

ТЕОРЕМА 1. Если $r, s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ и $p = \infty$, то

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty)_{L_\infty}^{psd} \asymp E(\Delta_+^s B_\infty, \Sigma_{r,n})_{L_\infty} \asymp E(\Delta_+^s B_\infty, R_n)_{L_\infty} \asymp n^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

Если $r \in \mathbb{N}$, $s = 1$ и $p = \infty$, то

$$d_n(\Delta_+^1 B_\infty)_{L_\infty}^{psd} \asymp E(\Delta_+^1 B_\infty, \Sigma_{r,n})_{L_\infty} \asymp n^{-1}, \quad n \geq 1, \quad (1.2)$$

но при этом

$$E(\Delta_+^1 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \asymp 1, \quad n \geq 1. \quad (1.3)$$

Если $r, s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p < \infty$, то

$$d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_p}^{psd} \asymp E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_p} \asymp E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_p} \asymp 1, \quad n \geq 1. \quad (1.4)$$

2. Вспомогательные утверждения. При доказательстве оценок снизу в теореме 1 будут использоваться следующие свойства псевдо-размерности.

ЛЕММА 2. Пусть на множестве $T \neq \emptyset$ задано семейство $X = X(T)$ функций $x: T \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

- 1) если y – фиксированная функция, а $y + X := \{z \mid z = y + x, x \in X\}$, то $\dim_{ps}(y + X) = \dim_{ps}(X)$;
- 2) если $y(t) > 0$ при всех $t \in T$, а $y \cdot X := \{z \mid z = y \cdot x, x \in X\}$, то $\dim_{ps}(y \cdot X) = \dim_{ps}(X)$;
- 3) если отображение $\theta: T \rightarrow T$ является взаимно-однозначным, а

$$X(\theta) := \{x(\theta) \mid x(\theta)(t) := x(\theta(t)), t \in T, x \in X\},$$

- то $\dim_{ps}(X(\theta)) = \dim_{ps}(X)$;
- 4) если $T_* \subseteq T$, а $X|_{T_*} := \{x|_{T_*} \mid x|_{T_*}(t) := x(t), t \in T_*, x \in X\}$, то $\dim_{ps}(X|_{T_*}) \leq \dim_{ps}(X)$;
- 5) если $a > 0$, а $X_a := \{x_a\}$ – множество функций-срезок x_a таких, что $x_a(t) := x(t)$ в случае $|x(t)| \leq a$ и $x_a(t) := a \operatorname{sgn} x(t)$ в случае $|x(t)| > a$, то $\dim_{ps}(X_a) \leq \dim_{ps}(X)$.

По поводу свойства 1) см. [6, раздел 4, теорема 5], а свойства 2) – 5) легко выводятся непосредственно из определения псевдо-размерности.

Если $m \in \mathbb{N}$, то через l_1^m обозначаем, как обычно, пространство векторов $x := (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ с нормой $\|x\|_{l_1^m} := \sum_{i=1}^m |x_i|$.

Приведенная ниже лемма 3 является немедленным следствием из [9, гл. 15, § 2, лемма 2.2]. Доказательство леммы 3 дано также в [10, раздел 4, лемма 1].

ЛЕММА 3. Пусть $\{-1, 1\}^m := \{v \mid v := (v_1, \dots, v_m), v_i = \pm 1, i = 1, \dots, m\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует подмножество $V^{(m)} \subset \{-1, 1\}^m$ такое, что $\operatorname{card}(V^{(m)}) \geq 2^{m/16}$, и при этом

$$\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^m} \geq \frac{m}{2}, \quad \hat{v}, \check{v} \in V^{(m)}, \quad \hat{v} \neq \check{v}.$$

Пусть X – линейное пространство элементов x с нормой $\|x\|_X$. При заданном $\varepsilon > 0$ точки $\hat{x}$ и $\check{x}$ называются ε -различимыми по норме X , если $\|\hat{x} - \check{x}\|_X \geq \varepsilon$. Для каждого подмножества $M \neq \emptyset$ из X обозначим через $\mathcal{N}_\varepsilon(M)$ максимальное натуральное число ε -различимых по норме X точек $\mu \in M$, если такое число существует. А если конечного $\mathcal{N}_\varepsilon(M)$ не существует, то полагаем $\mathcal{N}_\varepsilon(M) := \infty$.

Следующая лемма, является немедленным следствием из [11, раздел 3.3, следствие 3]. Эта лемма приведена в [12, раздел 3, лемма 1].

ЛЕММА 4. Пусть $I = (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, а $M_a^n := M_a^n(I)$ – множество функций $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}$ из $L_\infty(I)$ таких, что $\|\mu\|_{L_\infty(I)} \leq a$ и $\dim_{ps}(M_a^n) \leq n$. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\mathcal{N}_\varepsilon(M_a^n)_{L_1(I)} \leq e(n+1) \left(\frac{4ea}{\varepsilon} \right)^n.$$

Доказательство следующей леммы базируется на рассуждениях, которые применялись для получения оценок снизу в [12, теорема 1].

ЛЕММА 5. Пусть $I := (0, 1)$, а числа $m \in \mathbb{N}$, $a > 0$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют неравенству $m \geq 16(8 + \log_2(a/\alpha))$. Пусть $\Phi^{(m)} = \Phi^{(m)}(I)$ – множество функций $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ из $L_\infty(I)$ такое, что $\text{card}(\Phi^{(m)}) \geq 2^{m/16}$, $\|\varphi\|_{L_\infty(I)} \leq a$, и

$$\|\hat{\varphi} - \check{\varphi}\|_{L_1(I)} \geq \alpha, \quad \hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \Phi^{(m)}, \quad \hat{\varphi} \neq \check{\varphi}.$$

Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ таком, что $n \leq (16(8 + \log_2(a/\alpha)))^{-1}m$, будет справедлива оценка

$$d_n(\Phi^{(m)})_{L_1(I)}^{psd} \geq \frac{\alpha}{8}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксировав натуральные числа $m \geq 16(8 + \log_2(a/\alpha))$ и $n \leq (16(8 + \log_2(a/\alpha)))^{-1}m$, зафиксируем также произвольное множество $M^n := M^n(I)$ из $L_1(I)$ такое, что $\dim_{ps}(M^n) \leq n$. Полагаем

$$\delta := E(\Phi^{(m)}, M^n)_{L_1(I)} := \sup_{\varphi \in \Phi^{(m)}} \inf_{\mu \in M^n} \|\varphi - \mu\|_{L_1(I)}. \quad (2.1)$$

Сопоставляя каждой функции $\varphi \in \Phi^{(m)}$ функцию $\mu_\delta(\cdot; \varphi) \in M^n$ такую, что

$$\|\varphi(\cdot) - \mu_\delta(\cdot; \varphi)\|_{L_1(I)} \leq 2\delta, \quad (2.2)$$

полагаем $M_\delta^n := M_\delta^n(I) := \{\mu_\delta(\cdot; \varphi), \varphi \in \Phi^{(m)}\}$. Очевидно, что $M_\delta^n \subseteq M^n$.

Полагая $\mu_{\delta,a}(t; \varphi) := \mu_\delta(t; \varphi)$ в случае $|\mu_\delta(t; \varphi)| \leq a$ и $\mu_{\delta,a}(t; \varphi) := a \operatorname{sgn} \mu_\delta(t; \varphi)$ в случае $|\mu_\delta(t; \varphi)| > a$, обозначим через $M_{\delta,a}^n := \{\mu_{\delta,a}(\cdot; \varphi), \varphi \in \Phi^{(m)}\}$ множество соответствующих функций-срезок. Очевидно, что

$$\|\mu_{\delta,a}(\cdot; \varphi)\|_{L_\infty(I)} \leq a, \quad \varphi \in \Phi^{(m)}. \quad (2.3)$$

Так же ясно, что из включения $M_\delta^n \subseteq M^n$ и утверждения 4) леммы 2 следуют неравенства

$$\dim_{ps}(M_{\delta,a}^n) \leq \dim_{ps}(M_\delta^n) \leq \dim_{ps}(M^n) \leq n. \quad (2.4)$$

Докажем теперь, что $\delta > \alpha/8$. Допуская от противного, что $\delta \leq \alpha/8$, и зафиксировав произвольные функции $\hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \Phi^{(m)}$ такие, что $\hat{\varphi} \neq \check{\varphi}$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mu_{\delta,a}(\cdot; \hat{\varphi}) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \check{\varphi})\|_{L_1(I)} &\geq \|\hat{\varphi} - \check{\varphi}\|_{L_1(I)} - \|\hat{\varphi}(\cdot) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \hat{\varphi})\|_{L_1(I)} \\ &\quad - \|\check{\varphi}(\cdot) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \check{\varphi})\|_{L_1(I)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

А так как нормы $\hat{\varphi}$ и $\check{\varphi}$ в $L_\infty(I)$ не превосходят a , то

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}(\cdot) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \hat{\varphi})\|_{L_1(I)} &\leq \|\hat{\varphi}(\cdot) - \mu_\delta(\cdot; \hat{\varphi})\|_{L_1(I)}, \\ \|\check{\varphi}(\cdot) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \check{\varphi})\|_{L_1(I)} &\leq \|\check{\varphi}(\cdot) - \mu_\delta(\cdot; \check{\varphi})\|_{L_1(I)}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств, а также из (2.2) и (2.5) следует, что

$$\|\mu_{\delta,a}(\cdot; \hat{\varphi}) - \mu_{\delta,a}(\cdot; \check{\varphi})\|_{L_1(I)} \geq \|\hat{\varphi} - \check{\varphi}\|_{L_1(I)} - 4\delta \geq \frac{\alpha}{2}. \quad (2.6)$$

Если положить $\varepsilon := \alpha/2$, то из (2.6) следует, что множество $M_{\delta,a}^n$ состоит из ε -различимых по норме $L_1(I)$ функций. Кроме того, для этих функций выполняются неравенства (2.3). Учитывая также (2.4) и воспользовавшись леммой 4, получаем

$$\mathcal{N}_{\alpha/2}(M_{\delta,a}^n)_{L_1(I)} \leq e(n+1) \left(\frac{8ea}{\alpha} \right)^n < 2^{3n} \left(\frac{2^5 a}{\alpha} \right)^n = 2^{(8+\log_2(a/\alpha))n}.$$

А так как $\text{card}(M_{\delta,a}^n) \geq 2^{m/16}$, где $m \geq 16(8+\log_2(a/\alpha))n$, мы приходим к неравенствам

$$2^{(8+\log_2(a/\alpha))n} \leq \mathcal{N}_{\alpha/2}(M_{\delta,a}^n)_{L_1(I)} < 2^{(8+\log_2(a/\alpha))n},$$

которые не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $\delta > \alpha/8$, где δ определено согласно (2.1).

Но тогда в силу произвольности выбора множества M^n получаем

$$d_n(\Phi^{(m)})_{L_1(I)} \geq \frac{\alpha}{8}.$$

Лемма 5 доказана.

Приведенная ниже лемма 6 доказана в [13, лемма 3]. В этой лемме и далее для функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих в точке $t \in I$ интервала I конечные односторонние производные $x_-^{(k)}(t)$ и $x_+^{(k)}(t)$ порядка $k \in \mathbb{N}$, полагаем

$$x^{(k)}(t) := \frac{1}{2}(x_-^{(k)}(t) + x_+^{(k)}(t)).$$

Ясно, что если в какой-либо точке интервала I существует обычная производная порядка $k \in \mathbb{N}$, то она совпадает с так определяемой обобщенной производной. При $k = 0$ полагаем $x^{(0)}(t) := x(t)$, $t \in I$. Отметим также, что если $x \in \Delta_+^s(I)$, где $s > 1$, то в каждой точке $t \in I$ существуют при всех $k = 1, \dots, s-1$ односторонние производные $x_-^{(k)}(t)$ и $x_+^{(k)}(t)$. При этом на I существует обычная производная $x^{(s-2)}$, являющаяся выпуклой и локально абсолютно непрерывной на I функцией. Ясно, что обобщенная производная $x^{(s-1)}$ является неубывающей на I функцией. Эти известные факты следуют, например, из [2, гл. VIII, раздел 83, теорема А].

ЛЕММА 6. Пусть $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, где $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, а $I := (-1, 1)$. Пусть

$$\pi_s(t; x) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in I.$$

Тогда для функции

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x), \quad t \in I,$$

будет справедливо неравенство

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c} \|x\|_{L_p(I)},$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s, p)$.

3. Доказательство оценок снизу в теореме 1. Для того, чтобы оценить снизу поперечники $d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_p}^{psd}$ на интервале $I := (-1, 1)$, будем строить некоторые конечномерные множества, принадлежащие классам $\Delta_+^s B_p(I)$, а затем оценивать снизу псевдо-размерностные поперечники этих множеств.

Если $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$, то полагаем

$$\chi_{s,p}(t; \tau) := (sp + 1)^{1/p} (1 - \tau)^{-s-1/p} (t - \tau)_+^s, \quad \tau, t \in I, \quad (3.1)$$

где $(s\infty + 1)^{1/\infty} := 1$ и $(t - \tau)_+ := \max\{t - \tau, 0\}$. Ясно, что $\chi_{s,p}(\cdot; \tau) \in \Delta_+^s B_p(I)$ при любом фиксированном $\tau \in I$. Очевидно, что функции $\chi_{s,p}(\cdot; \tau)$ являются неотрицательными на I , и строго возрастают на промежутке $[\tau, 1)$. Кроме того,

$$\|\chi_{s,p}(\cdot; \tau)\|_{L_p(I)} = 1, \quad \tau \in I, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $s \in \mathbb{N}$ и $p = \infty$. Зафиксировав число ε , $0 < \varepsilon < 1/2$, и полагая $\tilde{\tau}_{\varepsilon,0} := 0$, найдем точку $\tilde{\tau}_{\varepsilon,1} := \tilde{\tau}_{s,\varepsilon,1}$, решив уравнение

$$\chi_{s,\infty}(\tilde{\tau}_{\varepsilon,1}; \tilde{\tau}_{\varepsilon,0}) = 1 - \varepsilon.$$

Затем найдем точку $\hat{\tau}_{\varepsilon,1} := \hat{\tau}_{s,\varepsilon,1}$, решая уравнение

$$\chi_{s,\infty}(\hat{\tau}_{\varepsilon,1}; \tilde{\tau}_{\varepsilon,1}) = \varepsilon.$$

Точку $\tilde{\tau}_{\varepsilon,2} := \tilde{\tau}_{s,\varepsilon,2}$ найдем из уравнения

$$\chi_{s,\infty}(\tilde{\tau}_{\varepsilon,2}; \tilde{\tau}_{\varepsilon,1}) = 1 - \varepsilon,$$

а точку $\hat{\tau}_{\varepsilon,2} := \hat{\tau}_{s,\varepsilon,2}$ — из уравнения

$$\chi_{s,\infty}(\hat{\tau}_{\varepsilon,2}; \tilde{\tau}_{\varepsilon,2}) = \varepsilon.$$

Продолжая этот процесс, найдем две последовательности точек $\{\tilde{\tau}_{\varepsilon,i}\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\tau}_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^{\infty}$ таких, что $\tilde{\tau}_{\varepsilon,0} < \tilde{\tau}_{\varepsilon,1} < \hat{\tau}_{\varepsilon,1} < \tilde{\tau}_{\varepsilon,2} < \hat{\tau}_{\varepsilon,2} < \dots < \tilde{\tau}_{\varepsilon,i} < \hat{\tau}_{\varepsilon,i} < \dots < 1$.

При каждом $m \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\psi_{\varepsilon,i}(t) := \psi_{s,\varepsilon,m,i}(t) := \chi_{s,\infty}(t; \tilde{\tau}_{\varepsilon,i-1}), \quad i = 1, \dots, m, \quad \psi_{\varepsilon,m+1}(t) := 0, \quad t \in I.$$

Очевидно, что $\psi_{\varepsilon,i} \in \Delta_+^s B_{\infty}(I)$, $i = 1, \dots, m+1$. Кроме того, эти функции являются неотрицательными и неубывающими на I .

С помощью функций $\psi_{\varepsilon,i}$ определяем функции

$$\xi_{\varepsilon,i}(t) := \xi_{s,\varepsilon,m,i}(t) := (2m)^{-1}(\psi_{\varepsilon,i}(t) - \psi_{\varepsilon,i+1}(t)), \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, m,$$

и множество

$$\Xi_{s,\varepsilon}^m := \Xi_{s,\varepsilon}^m(I) := \left\{ \xi_{\varepsilon,v} \mid \xi_{\varepsilon,v} := \sum_{i=1}^m v_i \xi_{\varepsilon,i}, \quad v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m \right\},$$

состоящее из 2^m функций $\xi_{\varepsilon,v}$, $v \in \{-1, 1\}^m$. Считая, что $m > 1$, и полагая

$$x_{\varepsilon,m}(t) := x_{s,\varepsilon,m}(t) := (2m)^{-1}\psi_{\varepsilon,1}(t) + m^{-1}\sum_{i=2}^m \psi_{\varepsilon,i}(t), \quad t \in I,$$

рассмотрим на I следующее множество:

$$x_{\varepsilon,m} + \Xi_{s,\varepsilon}^m := \{\zeta_{\varepsilon,v} \mid \zeta_{\varepsilon,v} := x_{\varepsilon,m} + \xi_{\varepsilon,v}, v \in \{-1, 1\}^m\},$$

состоящее из 2^m функций $\zeta_{\varepsilon,v}$, $v \in \{-1, 1\}^m$.

Убедимся, что все функции $\zeta_{\varepsilon,v} = x_{\varepsilon,m} + \xi_{\varepsilon,v}$, $v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m$, принадлежат классу $\Delta_+^s B_\infty(I)$. Действительно, учитывая определения функций $x_{\varepsilon,m}$ и $\xi_{\varepsilon,v}$, имеем

$$x_{\varepsilon,m}(t) + \xi_{\varepsilon,v}(t) = (2m)^{-1}(1 + v_1)\psi_{\varepsilon,1}(t) + (2m)^{-1}\sum_{i=2}^m (2 - v_{i-1} + v_i)\psi_{\varepsilon,i}(t).$$

Очевидно, что $1 + v_1 \geq 0$ и $2 - v_{i-1} + v_i \geq 0$, $i = 2, \dots, m$. А так как $\psi_{\varepsilon,i} \in \Delta_+^s B_\infty(I)$, $i = 1, \dots, m$, то каждая функция $x_{\varepsilon,m} + \xi_{\varepsilon,v}$ является s -монотонной на I . Ясно также, что

$$\begin{aligned} \|x_{\varepsilon,m} + \xi_{\varepsilon,v}\|_{L_\infty(I)} &\leq (2m)^{-1}(1 + v_1) + (2m)^{-1}\sum_{i=2}^m (2 - v_{i-1} + v_i) \\ &= (2m)^{-1}(2m - 1 + v_m) \leq 1. \end{aligned}$$

Поэтому все функции $x_{\varepsilon,m} + \xi_{\varepsilon,v}$, $v \in \{-1, 1\}^m$, принадлежат классу $\Delta_+^s B_\infty(I)$.

Таким образом, доказано, что множество $x_{\varepsilon,m} + \Xi_{s,\varepsilon}^m$ содержится в $\Delta_+^s B_\infty(I)$. Но тогда

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty)_{L_\infty}^{psd} \geq d_n(x_{\varepsilon,m} + \Xi_{s,\varepsilon}^m)_{L_\infty}^{psd}, \quad n \geq 1. \quad (3.3)$$

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что сдвиг любого функционального класса на произвольную фиксированную функцию не меняет его псевдо-размерности. Для непустых подмножеств $W := W(I)$ и $M := M(I)$ из $L_p := L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, будем обозначать через

$$E(W, M)_{L_p} := \sup_{x \in W} \inf_{y \in M} \|x - y\|_{L_p}$$

величину наилучшего приближения в L_p множества W множеством M .

Пусть $M^n := M^n(I)$ — произвольное многообразие функций из L_∞ такое, что $\dim_{ps}(M^n) \leq n$. Очевидно, что

$$E(x_{\varepsilon,m} + \Xi_{s,\varepsilon}^m, M^n)_{L_\infty} = E(\Xi_{s,\varepsilon}^m, -x_{\varepsilon,m} + M^n)_{L_\infty}. \quad (3.4)$$

Воспользовавшись утверждением 1) леммы 2, имеем

$$\dim_{ps}(-x_{\varepsilon,m} + M^n) = \dim_{ps}(M^n). \quad (3.5)$$

Но тогда в силу произвольности выбора M^n из (3.4) и (3.5) следует, что

$$d_n(x_{\varepsilon,m} + \Xi_{s,\varepsilon}^m)_{L_\infty}^{psd} \geq d_n(\Xi_{s,\varepsilon}^m)_{L_\infty}^{psd}. \quad (3.6)$$

Докажем, что если $m := n + 1$ и $0 < \varepsilon < (n + 2)^{-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, то

$$d_n(\Xi_{s,\varepsilon}^{n+1})_{L_\infty}^{psd} \geq (2n + 2)^{-1}(1 - (n + 2)\varepsilon). \quad (3.7)$$

Допустим от противного, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ неравенство (3.7) не выполняется. Тогда должно существовать множество $M^n = M^n(I)$ функций такое, что $\dim_{ps}(M^n) \leq n$ и

$$E(\Xi_{s,\varepsilon}^{n+1}, M^n)_{L_\infty} < (2n + 2)^{-1}(1 - (n + 2)\varepsilon).$$

А следовательно, для каждой функции $\xi_{\varepsilon,v}$, где $v \in \{-1, 1\}^{n+1}$, должна найтись функция $\mu(\cdot; \xi_{\varepsilon,v}) \in M^n$ такая, что

$$\|\xi_{\varepsilon,v}(\cdot) - \mu(\cdot; \xi_{\varepsilon,v})\|_{L_\infty(I)} < (2n + 2)^{-1}(1 - (n + 2)\varepsilon). \quad (3.8)$$

Полагая

$$I_{\varepsilon,i} := I_{s,\varepsilon,i} := (\tilde{\tau}_{\varepsilon,i}, \hat{\tau}_{\varepsilon,i}), \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

отметим, что из определений функций $\psi_{\varepsilon,i}$ и $\xi_{\varepsilon,i}$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \xi_{\varepsilon,i}(t) &\geq (2n + 2)^{-1}(1 - 2\varepsilon), \quad t \in I_{\varepsilon,i}, \quad i = 1, \dots, n + 1, \\ 0 \leq \xi_{\varepsilon,i}(t) &\leq (2n + 2)^{-1}\varepsilon, \quad t \in I_{\varepsilon,j}, \quad i, j = 1, \dots, n + 1, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Поэтому при любом $v := (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \{-1, 1\}^{n+1}$ будут верны неравенства

$$\xi_{\varepsilon,v}(t) \operatorname{sgn} v_i \geq (2n + 2)^{-1}(1 - (n + 2)\varepsilon) > 0, \quad t \in I_{\varepsilon,i}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Но из этих неравенств и (3.8) будет следовать, что

$$\operatorname{sgn} \mu(t; \xi_{\varepsilon,v}) = \operatorname{sgn} v_i, \quad \text{п. в. } t \in I_{\varepsilon,i}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

А из этих равенств и определения псевдо-размерности сразу же следует неравенство $\dim_{ps}(M^n) \geq n + 1$, хотя предполагалось, что $\dim_{ps}(M^n) \leq n$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (3.7).

Число ε может быть выбрано сколь угодно малым. Поэтому из (3.3), (3.6) и (3.7) следует, что

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty)_{L_\infty}^{psd} \geq 4^{-1}n^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Таким образом, в случае $p = \infty$ необходимая оценка снизу в соотношениях (1.1) и (1.2) для псевдо-размерностных поперечников доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p < \infty$. Зафиксировав число ε , $0 < \varepsilon < 1$, и полагая $\tau_{\varepsilon,0}^* := \tau_{s,p,\varepsilon,0}^* := 0$, определим точки $\tau_{\varepsilon,i}^* := \tau_{s,p,\varepsilon,i}^*$, $i = 1, 2, \dots$, решая одно за другим уравнения

$$\|\chi_{s,p}(\cdot; \tau_{\varepsilon,i-1}^*)\|_{L_p[\tau_{\varepsilon,i}^*, 1)} = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

где $\chi_{s,p}(\cdot; \tau)$ — функция из (3.1). Ясно, что полученная последовательность $\{\tau_{\varepsilon,i}^*\}_{i=0}^\infty$ строго возрастает, т.е. $0 = \tau_{\varepsilon,0}^* < \tau_{\varepsilon,1}^* < \dots < \tau_{\varepsilon,i}^* < \dots < 1$. Нетрудно также проверить, что

$$\tau_{\varepsilon,i}^* = \tau_{\varepsilon,i-1}^* + (1 - \varepsilon^p)^{1/(sp+1)}(1 - \tau_{\varepsilon,i-1}^*), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Полагая

$$I_{\varepsilon,i}^* := I_{s,p,\varepsilon,i}^* := [\tau_{\varepsilon,i-1}^*, 1), \quad i = 1, 2, \dots,$$

определим при каждом $m > 1$ следующие промежутки

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,i}^* &:= I_{s,p,\varepsilon,m,i}^* := [\tau_{\varepsilon,i-1}^*, \tau_{\varepsilon,i}^*), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ I_{\varepsilon,m}^* &:= I_{s,p,\varepsilon,m,m}^* := [\tau_{\varepsilon,m-1}^*, 1). \end{aligned}$$

Очевидно, что $I_{\varepsilon,i}^* \subseteq I_{\varepsilon,i}^*$, $i = 1, \dots, m$. Отметим, что в силу (3.11) имеют место равенства

$$|I_{\varepsilon,i}^*| = (1 - \varepsilon^p)^{1/(sp+1)} |I_{\varepsilon,i}^*|, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad |I_{\varepsilon,m}^*| = |I_{\varepsilon,m}^*|. \quad (3.12)$$

Определим теперь при каждом $m > 1$ следующие функции:

$$y_{\varepsilon,m}(t) := y_{s,p,\varepsilon,m}(t) := 2^{-2} m^{-1/p} \sum_{i=1}^m \chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,i-1}^*), \quad t \in I, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.13)$$

и оценим сверху их нормы в $L_p(I)$. Очевидно, что

$$y_{\varepsilon,m}(t) = 2^{-2} m^{-1/p} \sum_{j=1}^i \chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,j-1}^*), \quad t \in I_{\varepsilon,i}^*, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

Кроме того, если $1 < i \leq m$, то будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \int_{I_{\varepsilon,i}^*} \left(\sum_{j=1}^i \chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,j-1}^*) \right)^p dt \\ & \leq 2^{p-1} \int_{I_{\varepsilon,i}^*} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,j-1}^*) \right)^p dt + 2^{p-1} \int_{I_{\varepsilon,i}^*} (\chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,i-1}^*))^p dt \\ & \leq 2^{p-1} (i-1)^{p-1} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{I_{\varepsilon,j+1}^*} (\chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,j-1}^*))^p dt + 2^{p-1} \int_{I_{\varepsilon,i}^*} (\chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,i-1}^*))^p dt \\ & = 2^{p-1} ((i-1)^p \varepsilon^p + 1). \end{aligned}$$

В этих оценках кроме известного неравенства $(\sum_{i=1}^n |a_i|)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n |a_i|^p$ использовались равенства (3.2) и (3.10). Отметим также, что

$$\int_{I_{\varepsilon,1}^*} (\chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,0}^*))^p dt \leq \int_{I_{\varepsilon,1}^*} (\chi_{s,p}(t; \tau_{\varepsilon,0}^*))^p dt = 1.$$

Учитывая полученные оценки и равенства (3.14), приходим к неравенству

$$\|y_{\varepsilon,m}\|_{L_p(I)} \leq 2^{-1-1/p} (1 + (m\varepsilon)^p)^{1/p}. \quad (3.15)$$

Построим теперь на интервале I некоторые множества $\Phi_{s,\varepsilon}^m := \Phi_{s,p,\varepsilon}^m(I)$ функций, связанные с разбиениями промежутка $[0, 1]$ на промежутки $I_{\varepsilon,i}^*$. Полагая

$$\phi_0(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } t \in (-1, 1), \\ 0 & \text{для } t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1), \end{cases}$$

рассмотрим функции

$$\phi_s(t) := \int_{-\infty}^t (\phi_{s-1}(2\tau+1) - \phi_{s-1}(2\tau-1)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Ясно, что $\text{supp } \phi_s = [-1, 1]$. Нетрудно также проверить, что при $s \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\|\phi_s\|_{L_\infty(I)} = 2^{-s+1}, \quad \|\phi_s\|_{L_1(I)} = 2^{-s+1}, \quad \|\phi_s^{(s)}\|_{L_\infty(I)} = 2^{(s-1)s/2}. \quad (3.17)$$

Обозначая через $\bar{\tau}_{\varepsilon,i}^*$ середины промежутков $I_{\varepsilon,i}^*$, определим на интервале I при $i = 1, \dots, m$ следующие функции:

$$\varphi_{\varepsilon,i}(t) := \varphi_{s,p,\varepsilon,m,i}(t) := \frac{|I_{\varepsilon,i}^*|^s}{2^{s(s+1)/2+2} m^{1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^{s+1/p}} \phi_s\left(\frac{2(t - \bar{\tau}_{\varepsilon,i}^*)}{|I_{\varepsilon,i}^*|}\right). \quad (3.18)$$

Очевидно, что каждая из функций $\varphi_{\varepsilon,i}$ неотрицательна на соответствующем промежутке $I_{\varepsilon,i}^*$, а ее носитель совпадает с замыканием этого промежутка. Воспользовавшись равенствами (3.17), нетрудно проверить, что при $s \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\|\varphi_{\varepsilon,i}\|_{L_\infty(I_{\varepsilon,i}^*)} = 2^{-s(s+3)/2-1} m^{-1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^{-s-1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^s, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.19)$$

и

$$\|\varphi_{\varepsilon,i}^{(s)}\|_{L_\infty(I_{\varepsilon,i}^*)} = 2^{-2} m^{-1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^{-s-1/p}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.20)$$

Кроме того, из (3.19) следуют неравенства

$$\|\varphi_{\varepsilon,i}\|_{L_p(I_{\varepsilon,i}^*)} \leq 2^{-s(s+3)/2-1} m^{-1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^{-s-1/p} |I_{\varepsilon,i}^*|^{s+1/p}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

С помощью функций $\varphi_{\varepsilon,i}$ определяем на интервале I множества

$$\Phi_{s,\varepsilon}^m := \Phi_{s,\varepsilon}^m(I) := \left\{ \varphi_{\varepsilon,v} \mid \varphi_{\varepsilon,v} := \sum_{i=1}^m v_i \varphi_{\varepsilon,i}, \quad v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m \right\},$$

каждое из которых состоит из 2^m функций.

Полагая

$$y_{\varepsilon,m} + \Phi_{s,\varepsilon}^m := \{\zeta_{\varepsilon,v} \mid \zeta_{\varepsilon,v} := y_{\varepsilon,m} + \varphi_{\varepsilon,v}, \quad v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m\},$$

где $y_{\varepsilon,m}$ определены в (3.13), убедимся, что при условии $0 < \varepsilon \leq m^{-1}$ эти множества функций принадлежат классу $\Delta_+^s B_p(I)$.

Пусть $y_{\varepsilon,m} + \varphi_{\varepsilon,v}$ — произвольная функция из множества $y_{\varepsilon,m} + \Phi_{s,\varepsilon}^m$. Тогда, учитывая (3.15) и (3.21), получаем

$$\begin{aligned} \|y_{\varepsilon,m} + \varphi_{\varepsilon,v}\|_{L_p(I)} &\leq \|y_{\varepsilon,m}\|_{L_p(I)} + \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_{\varepsilon,i}\|_{L_p(I_{\varepsilon,i}^*)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{-1} + 2^{-s(s+3)/2-1} m^{-1/p} \left(\sum_{i=1}^m |I_{\varepsilon,i}^*|^{-sp-1} |I_{\varepsilon,i}^*|^{sp+1} \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{-1} + 2^{-s(s+3)/2-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $y_{\varepsilon, m} + \varphi_{\varepsilon, v}$ принадлежит единичному шару $B_p(I)$. Отметим теперь, что из (3.2) и (3.14) при всех $i = 1, \dots, m$ следуют равенства

$$y_{\varepsilon, m}^{(s)}(t) = 2^{-2} s! (sp + 1)^{1/p} m^{-1/p} \sum_{j=1}^i |I_{\varepsilon, j}^*|^{-s-1/p}, \quad t \in (\tau_{\varepsilon, i-1}^*, \tau_{\varepsilon, i}^*). \quad (3.22)$$

Дифференцируя функцию $y_{\varepsilon, m} + \varphi_{\varepsilon, v}$ и учитывая соотношения (3.20) и (3.22), видим, что для почти всех $t \in I_{\varepsilon, i}^*$, где $i = 1, \dots, m$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} y_{\varepsilon, m}^{(s)}(t) + \varphi_{\varepsilon, v}^{(s)}(t) &\geq 2^{-2} s! (sp + 1)^{1/p} m^{-1/p} \sum_{j=1}^i |I_{\varepsilon, j}^*|^{-s-1/p} - \|\varphi_{\varepsilon, i}^{(s)}\|_{L_\infty(I_{\varepsilon, i}^*)} \\ &\geq 2^{-2} m^{-1/p} |I_{\varepsilon, i}^*|^{-s-1/p} - 2^{-2} m^{-1/p} |I_{\varepsilon, i}^*|^{-s-1/p} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $y_{\varepsilon, m} + \varphi_{\varepsilon, v}$ имеет почти всюду на I неотрицательную (кусочно-постоянную) производную порядка s . Поэтому эта функция является s -монотонной на I . Таким образом, установлено, что множество $y_{\varepsilon, m} + \Phi_{s, \varepsilon}^m$ принадлежит классу $\Delta_+^s B_p(I)$.

Но тогда очевидно, что при условии $0 < \varepsilon \leq m^{-1}$ имеет место оценка

$$d_n(\Delta_+^s B_p)^{psd} \geq d_n(y_{\varepsilon, m} + \Phi_{s, \varepsilon}^m)^{psd}. \quad (3.23)$$

Воспользовавшись затем утверждением 1) леммы 2, приходим к неравенству

$$d_n(y_{\varepsilon, m} + \Phi_{s, \varepsilon}^m)^{psd} \geq d_n(\Phi_{s, \varepsilon}^m)^{psd}. \quad (3.24)$$

Задачу об оценке снизу в L_p поперечников множеств $\Phi_{s, \varepsilon}^m$ сведем к задаче об оценке снизу в L_1 поперечников других конечномерных множеств Φ_s^m . Для этого разобьем промежутки $[0, 1]$ точками $\tau_i := \tau_{m, i} := i/m$, $i = 0, 1, \dots, m$, на m промежутков $I_i := I_{m, i} := [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, m$, равной длины, и обозначим через $\bar{\tau}_i$, $i = 1, \dots, m$, середины этих промежутков. Определим затем функции

$$\varphi_i(t) := \varphi_{s, m, i}(t) := 2^{-s(s+1)/2-2} \phi_s(2m(t - \bar{\tau}_i)), \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.25)$$

где ϕ_s – функции из (3.16). Очевидно, что носители функций $\varphi_i(t)$ совпадают с замыканиями соответствующих промежутков I_i .

Полагая

$$\Phi_s^m := \Phi_s^m(I) := \left\{ \varphi_v \mid \varphi_v := \sum_{i=1}^m v_i \varphi_i, v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m \right\},$$

докажем, что

$$d_n(\Phi_{s, \varepsilon}^m)^{psd}_{L_p(I)} \geq (1 - \varepsilon^p)^{1/p} d_n(\Phi_s^m)^{psd}_{L_1(0,1)}. \quad (3.26)$$

Пусть $M^n := M^n(I)$ – произвольное множество функций $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}$ из $L_p(I)$ такое, что $\dim_{ps}(M^n) \leq n$. Очевидно, что для любых функций $\varphi_{\varepsilon, v} \in \Phi_{s, \varepsilon}^m$ и $\mu \in M^n$ имеют место соотношения

$$\|\varphi_{\varepsilon, v} - \mu\|_{L_p(I)} \geq \|\varphi_{\varepsilon, v} - \mu\|_{L_p[0,1]} = \left(\sum_{i=1}^m \int_{I_{\varepsilon, i}^*} |v_i \varphi_{\varepsilon, i}(t) - \mu(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (3.27)$$

где $v := (v_1, \dots, v_m) \in \{-1, 1\}^m$, а функции $\varphi_{\varepsilon, i}$ определены в (3.18). Произведем замены переменных

$$\theta = \bar{\tau}_i + m^{-1}|I_{\varepsilon, i}^*|^{-1}(t - \bar{\tau}_{\varepsilon, i}^*), \quad t \in I_{\varepsilon, i}^*, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\bar{\tau}_i$ – середины промежутков I_i , а $\bar{\tau}_{\varepsilon, i}^*$ – середины промежутков $I_{\varepsilon, i}^*$. Ясно, что при этом каждый промежуток $I_{\varepsilon, i}^*$ взаимно-однозначным образом отображается на промежуток I_i . Учитывая определения (3.18) и (3.25) соответственно функций $\varphi_{\varepsilon, i}$ и φ_i , а также равенства (3.12), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{I_{\varepsilon, i}^*} |v_i \varphi_{\varepsilon, i}(t) - \mu(t)|^p dt \\ &= \left(\frac{|I_{\varepsilon, i}^*|}{|I_{\varepsilon, i}^*|} \right)^{sp+1} \int_{I_i} \left| v_i \varphi_i(\theta) - \frac{m^{1/p} |I_{\varepsilon, i}^*|^{s+1/p}}{|I_{\varepsilon, i}^*|^s} \mu(\bar{\tau}_{\varepsilon, i}^* + m |I_{\varepsilon, i}^*|(\theta - \bar{\tau}_i)) \right|^p d\theta \\ &\geq (1 - \varepsilon^p) \int_{I_i} \left| v_i \varphi_i(\theta) - \frac{m^{1/p} |I_{\varepsilon, i}^*|^{s+1/p}}{|I_{\varepsilon, i}^*|^s} \mu(\bar{\tau}_{\varepsilon, i}^* + m |I_{\varepsilon, i}^*|(\theta - \bar{\tau}_i)) \right|^p d\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции $\mu_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемые на каждом из промежутков $I_i, i = 1, \dots, m$, согласно равенствам

$$\mu_\varepsilon(\theta) := \mu_{s, p, \varepsilon, m}(\theta) := \frac{m^{1/p} |I_{\varepsilon, i}^*|^{s+1/p}}{|I_{\varepsilon, i}^*|^s} \mu(\bar{\tau}_{\varepsilon, i}^* + m |I_{\varepsilon, i}^*|(\theta - \bar{\tau}_i)), \quad \theta \in I_i. \quad (3.28)$$

Тогда из полученных оценок для интегралов и соотношений (3.27) следует, что

$$\|\varphi_{\varepsilon, v} - \mu\|_{L_p(I)} \geq (1 - \varepsilon^p)^{1/p} \|\varphi_v - \mu_\varepsilon\|_{L_1(0,1)}.$$

Обозначая через $M_\varepsilon^n := M_{s, p, \varepsilon, m}^n(0, 1)$ множество всех функций $\mu_\varepsilon : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, полученных из функций $\mu \in M^n(I)$ путем преобразований (3.28), приходим к неравенству

$$E(\Phi_{s, \varepsilon}^m, M^n)_{L_p(I)} \geq (1 - \varepsilon^p)^{1/p} E(\Phi_s^m, M_\varepsilon^n)_{L_1(0,1)}. \quad (3.29)$$

Отметим, что в силу свойств псевдо-размерности 2)–4), указанных в лемме 2, будут справедливы неравенства $\dim_{ps}(M_\varepsilon^n) \leq \dim_{ps}(M^n) \leq n$. Поэтому из (3.29) в силу произвольности выбора множества M^n следует оценка (3.26).

Докажем теперь, что при $m := 160n$ будет справедлива оценка

$$d_n(\Phi_s^m)_{L_1(0,1)}^{psd} \geq 2^{-s(s+3)/2-6}, \quad n \geq 1. \quad (3.30)$$

Пусть $V^{(m)}$ – множество векторов $v \in \{-1, 1\}^m$ такое, что $\text{card}(V^{(m)}) \geq 2^{m/16}$, и при этом

$$\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^m} \geq \frac{m}{2}, \quad \hat{v}, \check{v} \in V^{(m)}, \quad \hat{v} \neq \check{v}. \quad (3.31)$$

Существование множества $V^{(m)}$ гарантировано леммой 3. Затем полагаем

$$\Phi_s^{(m)} := \Phi_s^{(m)}(I) := \left\{ \varphi_v \mid \varphi_v = \sum_{i=1}^m v_i \varphi_i, v := (v_1, \dots, v_m) \in V^{(m)} \right\}.$$

А так как $\Phi_s^{(m)} \subset \Phi_s^m$, то очевидно, что

$$d_n(\Phi_s^m)^{psd}_{L_1(0,1)} \geq d_n(\Phi_s^{(m)})^{psd}_{L_1(0,1)}. \quad (3.32)$$

Из (3.17) и (3.25) следует, что при всех $i = 1, \dots, m$ имеют место равенства

$$\|\varphi_i\|_{L_\infty(I_i)} = 2^{-s(s+3)/2-1}, \quad \|\varphi_i\|_{L_1(I_i)} = 2^{-s(s+3)/2-2}m^{-1}. \quad (3.33)$$

Но тогда из (3.33) следует, что

$$\|\varphi_v\|_{L_\infty(0,1)} = 2^{-s(s+3)/2-1}, \quad \varphi_v \in \Phi_s^{(m)}. \quad (3.34)$$

Кроме того, для любых двух функций $\varphi_{\hat{v}}, \varphi_{\check{v}} \in \Phi_s^{(m)}$ таких, что $\hat{v} \neq \check{v}$, в силу (3.31) и (3.33) будут справедливы соотношения

$$\|\varphi_{\hat{v}} - \varphi_{\check{v}}\|_{L_1(0,1)} = 2^{-s(s+3)/2-2}m^{-1}\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^m} \geq 2^{-s(s+3)/2-3}. \quad (3.35)$$

Учитывая (3.34) и (3.35), применим к множеству $\Phi_s^{(m)}$ лемму 5, полагая в ней $a := 2^{-s(s+3)/2-1}$, $\alpha := 2^{-s(s+3)/2-3}$ и $m := 160n$. После чего получаем

$$d_n(\Phi_s^{(m)})^{psd}_{L_1(0,1)} \geq 2^{-s(s+3)/2-6}.$$

А из этой оценки и (3.32) сразу же следует оценка (3.30).

Ясно, что при условии $0 < \varepsilon \leq (160n)^{-1}$ из (3.23), (3.24), (3.26) и (3.30) следует оценка

$$d_n(\Delta_+^s B_p)^{psd}_{L_p} \geq (1 - \varepsilon^p)^{1/p} 2^{-s(s+3)/2-6}.$$

А так как в этом неравенстве ε может быть сколь угодно малым, то

$$d_n(\Delta_+^s B_p)^{psd}_{L_p} \geq 2^{-s(s+3)/2-6}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Таким образом, в случае $1 \leq p < \infty$ доказана необходимая оценка снизу в (1.4) для псевдо-размерностных поперечников.

Остается доказать оценки снизу для наилучших приближений сплайнами и рациональными функциями. А это сделать легко.

В п. 1 уже отмечалось, что

$$\dim_{ps}(\Sigma_{r,n}) \asymp \dim_{ps}(R_n) \asymp n, \quad n \geq 1.$$

Поэтому

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_p} \geq c d_n(\Delta_+^s B_p)^{psd}_{L_p}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (3.37)$$

и

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_p} \geq c d_n(\Delta_+^s B_p)^{psd}_{L_p}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (3.38)$$

где $c > 0$ не зависит от n .

Но тогда в силу (3.37) и (3.36) следуют, соответственно, оценки

$$E(\Delta_+^s B_\infty, \Sigma_{r,n})_{L_\infty} \geq c n^{-1}, \quad n \geq 1, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

и

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_p} \geq c, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (3.40)$$

где $c > 0$ не зависит от n . Итак, для сплайнов необходимые оценки снизу в (1.1), (1.2) и (1.4) доказаны.

Кроме того, воспользовавшись оценками (3.38), (3.9) и (3.36), имеем

$$E(\Delta_+^s B_\infty, R_n)_{L_\infty} \geq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s > 1, \quad (3.41)$$

и

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_p} \geq c, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (3.42)$$

где $c > 0$ также не зависит от n . Таким образом, необходимые оценки снизу в соотношениях (1.1) и (1.4) получены и для рациональных функций.

Оценка же

$$E(\Delta_+^1 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \geq c, \quad n \geq 1, \quad (3.43)$$

в (1.3) является тривиальной, так как функция $z(t) := \operatorname{sgn} t$, $t \in I$, принадлежит классу $\Delta_+^1 B_\infty$, но ее наилучшие приближения в L_∞ множествами R_n равны $1/2$ при всех $n \geq 1$.

Доказательство оценок снизу в теореме 1 закончено.

4. Доказательство оценок сверху в теореме 1. Пусть $I := (-1, 1)$, $s \in \mathbb{N}$ и $p = \infty$. Будем вначале рассматривать функции $\tilde{x} \in \Delta_+^s L_\infty(I)$, удовлетворяющие условиям

$$\tilde{x}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, s-1. \quad (4.1)$$

Отметим, что, в силу монотонности производной $\tilde{x}^{(s-1)}$, из (4.1) следуют неравенства $\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$ для $t \in I_+ := [0, 1)$, где $k = 0, \dots, s-1$. Если же $t \in I_- := (-1, 0]$, то $(-1)^{s-k} \tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, где $k = 0, \dots, s-1$. При $s = 1$ это очевидно, а при $s > 1$ легко проверяется с помощью формулы Тейлора.

Функция $\tilde{x}$ является ограниченной и монотонной на каждом из промежутков I_+ и I_- . Поэтому существуют сплайны $\sigma_{1,n}(\cdot; \tilde{x}; I) \in \Sigma_{1,n}(I)$ такие, что

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{1,n}(\cdot; \tilde{x}; I)\|_{L_\infty(I)} \leq \|\tilde{x}\|_{L_\infty(I)} n^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Если $s > 1$, то полагая $\tilde{x}_+(t) := \max\{0, \tilde{x}(t)\}$ и $\tilde{x}_-(t) := \max\{0, (-1)^s \tilde{x}(t)\}$ для $t \in I$, отметим, что обе функции $\tilde{x}_+$ и $\tilde{x}_-$ являются выпуклыми на I . Поэтому, воспользовавшись результатом Попова и Петрушева [5], можем утверждать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ существуют рациональные функции $\rho_n(\cdot; \tilde{x}_+), \rho_n(\cdot; \tilde{x}_-) \in R_n(I)$ такие, что

$$\|\tilde{x}_+(\cdot) - \rho_n(\cdot; \tilde{x}_+; I)\|_{L_\infty(I)} \leq c \|\tilde{x}_+\|_{L_\infty(I)} n^{-1},$$

и

$$\|\tilde{x}_-(\cdot) - \rho_n(\cdot; \tilde{x}_-; I)\|_{L_\infty(I)} \leq c \|\tilde{x}_-\|_{L_\infty(I)} n^{-1},$$

где $c > 0$ не зависит от n . Но тогда существуют $\rho_{2n}(\cdot; \tilde{x}) \in R_{2n}(I)$ такие, что

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \rho_{2n}(\cdot; \tilde{x}; I)\|_{L_\infty(I)} \leq c \|\tilde{x}\|_{L_\infty(I)} n^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s > 1, \quad (4.3)$$

где $c > 0$ не зависит от n .

Оценки (4.2) и (4.3) установлены для функций $\tilde{x} \in \Delta_+^s L_\infty(I)$, удовлетворяющих условиям (4.1). Чтобы избавиться от ограничений (4.1), поступим следующим образом.

Для каждой функции $x \in \Delta_+^s L_\infty(I)$ обозначим через

$$\pi_s(t; x) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in I,$$

многочлен Тейлора порядка $\leq s$, построенный относительно точки $t = 0$. Затем полагаем

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x), \quad t \in I.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет условиям (4.1). Кроме того, из леммы 6 следует, что $\|\tilde{x}\|_{L_\infty(I)} \leq \tilde{c}\|x\|_{L_\infty(I)}$, где $\tilde{c} = \tilde{c}(s)$.

Если $r \geq s$, то для функций $x \in \Delta_+^s B_\infty(I)$ приближающие сплайны определяем, полагая

$$\sigma_{r,n}(t; x; I) := \sigma_{1,n}(t; \tilde{x}; I) + \pi_s(t; x), \quad t \in I.$$

Тогда $\sigma_{r,n}(\cdot; x; I) \in \Sigma_{r,n}(I)$, а из (4.2) будет следовать, что

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; I)\|_{L_\infty(I)} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad r \geq s, \quad (4.4)$$

где $c = c(s)$.

Если же $r < s$, то сплайны вида (4.4), вообще говоря, не принадлежат $\Sigma_{r,n}(I)$. Однако их легко подправить, заменив многочлены $\pi_s(x) := \pi_s(\cdot; x)$ на сплайны $\sigma_{1,n}(\cdot; \pi_s(x); I)$ из $\Sigma_{1,n}(I)$, хорошо приближающие эти многочлены.

Очевидно, что из леммы 6 следует оценка $\|\pi_s(\cdot; x)\|_{L_\infty(I)} \leq (1 + \tilde{c})\|x\|_{L_\infty(I)}$, где $\tilde{c} = \tilde{c}(s)$. Но тогда существуют сплайны $\sigma_{1,n}(\cdot; \pi_s(x); I) \in \Sigma_{1,n}(I)$ такие, что

$$\|\pi_s(\cdot) - \sigma_{1,n}(\cdot; \pi_s(x); I)\|_{L_\infty(I)} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1,$$

где $c = c(s)$. Определяя в случае $r < s$ сплайны

$$\sigma_{r,n}(t; x; I) := \sigma_{1,n}(t; \tilde{x}; I) + \sigma_{1,n}(t; \pi_s(x); I), \quad t \in I,$$

и учитывая неравенства (4.2), приходим к оценке

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; I)\|_{L_\infty(I)} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad r < s, \quad (4.5)$$

где $c = c(s)$. Но тогда из (4.4) и (4.5) следует, что

$$E(\Delta_+^s B_\infty, \Sigma_{r,n})_{L_\infty} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

где $c = c(s)$.

В случае $s > 1$ аналогичная (4.6) оценка верна и для наилучших приближений рациональными функциями. Действительно, полагая $\rho_n(t; x) \equiv 0$ при $n < s/2$, а при $n \geq s/2$ полагая

$$\rho_{2n}(t) := \rho_{2n}(t; \tilde{x}) + \pi_s(t; x), \quad t \in I,$$

где $\rho_{2n}(\cdot; \tilde{x})$ удовлетворяет неравенству (4.3), приходим к оценке

$$E(\Delta_+^s B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s > 1, \quad (4.7)$$

где $c = c(s)$.

Оценки же

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_p} \leq 1, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

$$E(\Delta_+^1 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq 1, \quad n \geq 1, \quad (4.9)$$

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_p} \leq 1, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

являются тривиальными.

Кроме того, из (4.6) и (4.8) в силу (4.42) следуют, соответственно, оценки

$$d_n(\Delta_+^s B_\infty)_{L_\infty}^{psd} \leq cn^{-1}, \quad n \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

и

$$d_n(\Delta_+^s B_p)_{L_p}^{psd} \leq c, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

где $c = c(s)$. Таким образом, все оценки сверху в теореме 1 установлены.

Объединяя при $s > 1$ оценки снизу (3.9), (3.39) и (3.41) с оценками сверху (4.6), (4.7) и (4.11), получаем соотношение (1.1). При $s = 1$ соотношение (1.2) следует из (3.9), (3.39), (4.6) и (4.11), а соотношение (1.3) – из (3.43) и (4.9). Объединив оценки (3.36), (3.40), (3.42), (4.8), (4.10) и (4.12), получаем соотношение (1.4). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bullen P. S. A criterion for n -convexity // Pacific J. Math. 1971. V. 36. P. 81–98.
- [2] Roberts A. W., Varberg D. E. Convex Functions. New York: Academic Press, 1973.
- [3] Pečarić J. E., Proschan F., Tong Y. L. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications. Mathematics in Science and Engineering. V. 187. Boston: Academic Press, 1992.
- [4] Буланов А. П. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 5. С. 1132–1148.
- [5] Попов В. А., Петрушев П. П. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). № 2(6). С. 285–292.
- [6] Haussler D. Decision theoretic generalizations of the PAC model for neural net and other learning applications // Information and Computation. 1992. V. 100. P. 78–150.
- [7] Ratsaby J., Maiorov V. Generalization of the PAC-model for learning with partial information // Proc. of the 3rd European Conference on Computational Learning Theory (EuroCOLT 97). Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [8] Ratsaby J., Maiorov V. On the value of partial information for learning from examples // J. Complexity. 1997. V. 13. P. 509–544.
- [9] Lorentz G. G., van Golitschek M., Makovoz Y. Constructive Approximation, Advanced Problems. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [10] Maiorov V., Ratsaby J. The degree of approximation of sets in Euclidian space using sets with bounded Vapnik–Chervonenkis dimension // Discrete Appl. Math. 1998. V. 88. P. 81–93.
- [11] Haussler D. Sphere packing numbers for subsets of the boolean n -cube with bounded Vapnik–Chervonenkis dimension // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69. P. 217–232.
- [12] Maiorov V., Ratsaby J. On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension // Constr. Approximation. 1999. V. 15. P. 291–300.
- [13] Конавалов В. Н. Формосохраняющие поперечники типа Колмогорова классов s -монотонных интегрируемых функций // Укр. матем. ж. 2004. Т. 55. № 7. С. 901–926.