Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Ночка, Лемма о весах, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 115–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:41:28

УДК 512

ЛЕММА О ВЕСАХ

Е. И. Ночка

В статье впервые приводится полное авторское доказательство леммы о весах, которая составляет основу доказательства гипотезы Картана из теории мероморфных кривых.

Библиография: 8 названий.

0. Введение

В статье впервые приводится полное авторское доказательство леммы о весах, которая составляет основу доказательства гипотезы Картана из теории мероморфных кривых (формулировку гипотезы Картана см. [1, с. 17]). Н. С. Чекалкин [2] и В. Чен [3] применили лемму о весах в случае более общих мероморфных отображений, М. Ру и П. М. Уонг [4] применили лемму в теории диофантовых приближений, у П. Войты [5, с. 15] можно найти ссылку о применении леммы при доказательстве теоремы Вирзинга, Х. Фуджимото [6] применил лемму о весах в теории минимальных поверхностей при изучении отображений Гаусса.

Первоначальный (к тому же сокращенный) вариант доказательства леммы (см. [7]) претерпел за прошедшее время серьезные изменения. В начале 80-х годов формулировка и доказательство леммы были серьезно переработаны Б. В. Шабатом в процессе подготовки к защите диссертации автора; в частности, обозначения приобрели нынешний, более удобный вид. Позднее были учтены некоторые замечания Б. В. Шабата и Е. А. Полещкого. В последнее время мы возвращались к лемме о весах в поиске ее модификаций для случая присоединенных кривых, точнее для случая условия общего положения инцидентного вида Г. Вейля. В настоящей статье мы используем общий подход, основанный на понятии “ограниченного вырождения при проектировании” (см. определение 2.2).

Формулировка леммы о весах формальна и неочевидна как с точки зрения теории функций, так и с точки зрения линейной алгебры, а ее доказательство длинное и громоздкое. Оба эти обстоятельства прямо ставят вопрос о нахождении простой интерпретации леммы и ее доказательства. Б. Шиффман предложил простое истолкование значений весов [8, с. 11]. Мы начнем изложение леммы с изложения своего варианта геометрического смысла леммы и геометрической интерпретации ее доказательства.

1. Геометрический смысл леммы о весах и ее доказательства

1.1. Пусть в проективном пространстве $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ заданы линейное пространство M размерности m , $0 < m < n$, и множество S точек $a_1, \dots, a_q$, причем каждой точке a_i сопоставлен вес w_i , $0 \leq w_i \leq 1$. Пусть еще

$$p_M: \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow M \quad (1.1)$$

обозначает проекцию с центром в пространстве $M^\perp$, полярном M проекция p_M порождена ортогональным проектированием $\mathbb{C}^{n+1}$ на поднятие M в $\mathbb{C}^{n+1}$. Введем три функции на множествах точек $G \subset S$:

- $c(G)$ – число точек множества G ;
- $w(G) = \sum_{a_i \in G} w_i$ – суммарный вес точек множества G ;
- $d(G)$ – число линейно независимых точек среди проекций точек из множества G на M .

Присвоим специальное название “маленьким” множествам точек из S , которые представляют основной интерес в дальнейшем. Будем называть *набором* множество точек $G \subset S$, если проекции точек G на M содержатся в собственном подпространстве M , т.е. если $d(G) < m + 1$. Сформулируем лемму о весах в приведенных выше обозначениях.

ЛЕММА 1.1. Пусть в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ задано множество S точек $a_1, \dots, a_q$ в общем положении, причем вес каждой точки равен 1, и m -мерное подпространство M . Тогда существует число p ,

$$\frac{n+1}{m+1} < p \leq \frac{2n-m+1}{m+1}, \quad (1.2)$$

и веса w_j , $0 \leq w_j \leq 1$, точек a_j , удовлетворяющие равенству

$$q - w(S) + p(m+1) = 2n - m + 1, \quad (1.3)$$

такие, что для любого набора $G \subset S$ выполняется неравенство

$$w(G) \leq pd(G). \quad (1.4)$$

1.2. Переходим к выяснению геометрического смысла леммы о весах. Каждому набору $G \subset S$ поставим в соответствие на двумерной действительной плоскости точку $P(G)$ с координатами $(w(G), d(G))$. Добавим к точкам, порождаемым наборами $G \subset S$, начало координат двумерной плоскости, точку с координатами $(0, m+1)$, а также точку $P_S = (2n - m + 1, m + 1)$. Выделим одно из характеристических свойств точки P_S , которое доказывается прямым вычислением: если два набора G_1 и G_2 таковы, что точки $P(G_1)$ и $P(G_2)$ лежат не выше прямой l , проходящей через P_S и начало координат, причем одна из точек $P(G_i)$ лежит строго ниже l , то объединение $G_1 \cup G_2$ обязательно является набором, т.е. $d(G_1 \cup G_2) < m + 1$. Полученное множество точек на плоскости обозначим через $\mathcal{S}$.

С геометрической точки зрения первым этапом доказательства леммы о весах является нахождение выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$, содержащего все точки $\mathcal{S}$. Алгоритм

нахождения $\mathcal{P}$ прост. Если все точки множества $\mathcal{S}$ содержатся в треугольнике Δ , вершинами которого являются начало координат, точка с координатами $(0, m+1)$ и P_S , то искомым многоугольником является треугольник Δ .

Если существуют точки множества $\mathcal{S}$, лежащие ниже прямой l , проходящей через P_S и начало координат, то находим цепочку наборов $S_1, \dots, S_{i_0}$ такую, что точки $P(S_i)$ являются вершинами выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$. Общий шаг процедуры построения цепочки наборов заключается в следующем. Пусть $P(S_{i-1})$ – последняя из числа построенных вершин многоугольника $\mathcal{P}$, начальной вершиной является точка P_S . Если все точки, соответствующие наборам $G \subset S$, лежат не ниже прямой, проходящей через начало координат и точку $P(S_{i-1})$, то $P(S_{i-1})$ последняя вершина многоугольника $\mathcal{P}$, которую нужно найти.

Если существуют точки из $\mathcal{S}$, лежащие ниже прямой, проходящей через $P(S_{i-1})$ и начало координат, то строим очередную вершину $P(S_i)$ многоугольника $\mathcal{P}$. Для этого мы находим наборы $G \subset S$, для которых точка $P(G)$ лежит на стороне многоугольника $\mathcal{P}$; такие наборы характеризуются тем, что угловой коэффициент прямой, проходящей через вершину $P(S_{i-1})$ и точку $P(G)$, максимален, а среди всех наборов, лежащих на стороне многоугольника, в качестве вершины S_i выбираем набор с минимальным значением углового коэффициента прямой, проходящей через вершину $P(S_i)$ и начало координат.

Отметим, что при определенном выше способе построения многоугольника автоматически выполняется дополнительное условие $S_i \subset S_{i-1}$ (см. следствие 2.6 ниже). Поэтому мы упрощаем доказательство леммы, рассматривая при построении очередного набора S_{i+1} в качестве кандидатов на роль набора, определяющего вершину, только наборы $G \subset S_i$. В результате мы получаем тот же выпуклый многоугольник, какой получили, если бы рассматривали произвольные наборы $G \subset S$ при построении S_{i+1} . Так как множество S конечно, конечен и процесс построения выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$.

1.3. В геометрических терминах лемма 1.1 утверждает, что с помощью присвоения весов точкам множества S можно преобразовать многоугольник $\mathcal{P}$ в треугольник Δ' , имеющий общие с многоугольником $\mathcal{P}$ стороны по оси ординат и по прямой $y = m+1$, вершина P'_S которого отстоит от P_S влево на величину $q - w(S)$ суммарного уменьшения веса всех точек множества S , причем одновременно с преобразованием многоугольника в треугольник можно добиться выполнения ряда количественных ограничений на присваиваемые веса.

В простейшем случае все точки множества $\mathcal{S}$ лежат в треугольнике Δ . Тогда все требования леммы и, в частности, неравенства (1.2)–(1.4) выполняются, если положить $p = (2n - m + 1)/(m + 1)$, а все веса точек оставить равными 1. Изменение веса точки $a \in S$ с 1 на w , $0 \leq w < 1$, сдвигает все точки $P(G)$, где $a \in G$, влево на $1 - w$. Так как наборы цепочки, определяющие вершины многоугольника, вложенные, то изменение веса точек, сдвигающее влево вершину $P(S_i)$ на расстояние w , сдвигает на w и все вершины $P(S_j)$, лежащие выше, т.е. имеющие номер j меньше i ; считаем, что точка P_S движется при присваивании любой точке веса w на расстояние $1 - w$ влево по определению.

Присвоим веса точкам из S_1 так, чтобы преобразовать многоугольник $\mathcal{P}$ в треугольник Δ' , который получается из Δ заменой вершины P_S на P'_S , где прямая l' , проходящая через начало координат и P'_S , параллельна прямой, проходящей через $P(S_1)$ и P_S . Для этого присвоим точкам наборов $S_j \setminus S_{j+1}$, одинаковые веса так, чтобы вершины $P(S_j)$

попали на прямую l' , $j = i_0, \dots, 1$ и по определению $S_{i_0+1} = \emptyset$. Таким условием веса точек $S_j \setminus S_{j+1}$ определены однозначно и множество $\mathcal{S}$ после присваивания весов преобразуется в множество $\mathcal{S}'$. Заключает доказательство леммы доказательство того, что все точки множества $\mathcal{S}'$ попадают в треугольник Δ' , и проверка выполнения неравенств для констант леммы.

Таким образом, схематически доказательство леммы о весах сводится к построению выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$, определению с помощью $\mathcal{P}$ константы p , весов w_j и доказательству неравенств (1.2)–(1.4). В опубликованных ранее доказательствах леммы о весах построение многоугольника $\mathcal{P}$ велось снизу вверх, отправляясь от начала координат, двигаясь вверх к точке P_S (см., например, [7]). Здесь при построении многоугольника мы будем двигаться сверху вниз.

2. Базовые определения и леммы

2.1. Сформулируем определение понятия общего положения для точек с весами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что множество точек S из $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, где каждой точке $a \in S$ сопоставлен вес w_a , $0 < w_a \leq 1$, в *общем положении*, если для любого набора G выполняется неравенство $w(G) \leq \dim \hat{G} + 1$, где $\hat{G}$ – линейная оболочка точек из G .

Обычное для алгебраической геометрии и теории равномерного распределения условие общего положения получается, когда все $w_i = 1$ и, следовательно, $w(G) = c(G)$. В дополнение к определенным в п. 1.1 функциям на множестве наборов $G \subset S$ определим показатель вырождения при проектировании на M :

$$e(G) = \max(0, w(G) - d(G)).$$

Когда все веса равны 1, то $e(G) = c(G) - d(G)$ или, говоря геометрическим языком, показатель вырождения равен уменьшению размерности $\hat{G}$, линейной оболочки точек G , при проектировании $\hat{G}$ на M .

Сформулируем определение условия ограниченного вырождения при проектировании на M для множеств точек из $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ с весами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Множество точек S *вырождается с показателем λ при проектировании на M* (или λ -вырождено при проектировании на M), если для любого набора точек $G \subset S$ выполняется неравенство $e(G) \leq \lambda$ и существует хотя бы один набор $G \subset S$, для которого $e(G) = \lambda$.

Базовым случаем в определении 2.2 является случай, когда веса всех точек из S равны 1. Пусть S есть λ -вырожденное при проектировании на M множество точек. Если $\lambda = 0$, то проекции точек из S на M в общем положении в смысле определения 2.1 в M . Множество точек S , вырождающееся при проектировании на заданное пространство M с показателем, отличным от 0, может не быть в общем положении в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Например, при $\lambda \geq 1$ множество S может содержать две одинаковые точки, суммарный вес которых превосходит 1 (что влечет невыполнение условия общего положения для S), но при этом быть λ -вырожденным при проектировании на M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Точки множества S в общем положении в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ в обычном смысле (когда все веса равны 1) тогда и только тогда, когда для произвольного l -мерного пространства $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ вырождение множества S при проектировании на L (см. (1.1) с $M = L$) ограничено числом $\lambda = n - l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(n - l - 1)$ -мерное пространство L_C , центр проекции на L , содержит строго более $n - l$ точек из S , то S не является $(n - l)$ -вырожденным при проектировании на L . Следовательно, если точки множества $\mathcal{S}$ не в общем положении, то найдется подпространство L такое, что точки из $\mathcal{S}$ не являются $(n - l)$ -вырожденными при проектировании на L .

Обратно, если точки множества $\mathcal{S}$ в общем положении, то для любого подпространства L и любого набора $G \subset \mathcal{S}$ выполняется неравенство $e(G) \leq n - l$. В самом деле, если $e(G) > n - l$, то точки G не могут быть в общем положении в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Так как $\hat{G}$ содержится в линейной оболочке L_C и $\hat{G}_L$, где $\hat{G}_L$ – линейная оболочка проекций точек из G на L , то $c(G) \leq n - l + d(G)$, а по определению показателя вырождения $c(G) = e(G) + d(G)$. Таким образом, неравенство $e(G) > n - l$ невозможно и предложение доказано.

2.2. Важную роль в доказательстве леммы о весах играет следующая функция пар наборов из S :

$$f(G_1, G_2) = \frac{d(G_1, G_2)}{w(G_1, G_2)}, \quad (2.1)$$

где $w(G_1, G_2) = w(G_1 \cup G_2) - w(G_2)$, $d(G_1, G_2) = d(G_1 \cup G_2) - d(G_2)$, и мы полагаем, что $G_1 \not\subset G_2$ и, следовательно, $w(G_1, G_2) \neq 0$. Если $G_2 = \emptyset$, то $w(G_1, G_2)$ и $d(G_1, G_2)$ сводятся к функциям $w(G_1)$ и $d(G_1)$ соответственно. Докажем два свойства функции $f(G_1, G_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если $H_1 \not\subset H_2$, то $f(H_1, H_1 \cap H_2) \geq f(H_1, H_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$(H_1 \cup H_2) \setminus H_2 = H_1 \setminus (H_1 \cap H_2),$$

прямо из определений функций веса следует

$$w(H_1, H_2) = w(H_1, H_1 \cap H_2). \quad (2.2)$$

Выберем $d(H_1 \cap H_2)$ точек, составляющих множество $G \subset (H_1 \cap H_2)$ так, что проекции точек G на M в общем положении в M . Дополним точки множества G точками из H_2 до множества $G_2 \subset H_2$ так, что $c(G_2) = d(H_2)$ и проекции точек G_2 на M в общем положении в M . Дополним точки множества G_2 точками набора $G_3 \subset (H_1 \setminus H_2)$ так, что $c(G_2 \cup G_3) = d(H_1 \cup H_2)$ и проекции точек $G_2 \cup G_3$ на M в общем положении в M . Так как точки множества $G \cup G_3$ также в общем положении в M , то

$$d(H_1, H_1 \cap H_2) \geq d(H_1, H_2). \quad (2.3)$$

Из неравенств (2.2) и (2.3) следует предложение.

Следующее предложение будет часто использоваться при построении выпуклого многоугольника.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 (неравенства треугольника). Пусть три набора G_i таковы, что $G_3 \supset G_2 \supset G_1$, где все включения строгие. Тогда имеет место один из трех случаев¹.

I. Набор G_2 “граничный”.

Справедливы следующие три попарно эквивалентные неравенства:

$$\begin{aligned} f(G_3, G_1) &> f(G_2, G_1), \\ f(G_3, G_2) &> f(G_3, G_1), \\ f(G_3, G_2) &> f(G_2, G_1). \end{aligned}$$

II. Набор G_2 “внутренний”.

Справедливы следующие три попарно эквивалентные неравенства:

$$\begin{aligned} f(G_3, G_1) &< f(G_2, G_1), \\ f(G_3, G_2) &< f(G_3, G_1), \\ f(G_3, G_2) &< f(G_2, G_1). \end{aligned}$$

III. Вырожденный случай.

Справедливы следующие три попарно эквивалентные равенства:

$$\begin{aligned} f(G_3, G_1) &= f(G_2, G_1), \\ f(G_3, G_2) &= f(G_3, G_1), \\ f(G_3, G_2) &= f(G_2, G_1). \end{aligned}$$

Доказательство предложения представляет собой простое упражнение по элементарной алгебре, поэтому мы его опускаем. Формальное запоминание и применение неравенств предложения 2.5 облегчает представление наборов точками действительной двумерной плоскости.

Следствием двух последних предложений является следующее описание наборов, соответствующих вершинам многоугольника $\mathcal{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть S_i и S_{i+1} – два набора такие, что точки $P(S_i)$ и $P(S_{i+1})$ являются двумя последовательными вершинами многоугольника $\mathcal{P}$ при движении сверху вниз. Тогда набор S_i содержит любой набор G такой, что $P(G) \in [P(S_{i+1}), P(S_i)]$, где квадратные скобки обозначают отрезок. В частности, $S_i \supset S_{i+1}$ и если $P(G) = P(S_i)$, то $G = S_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное; пусть существует такой набор G , что одновременно выполняются два утверждения:

- 1) $P(G) \in [P(S_{i+1}), P(S_i)]$;
- 2) $G \not\subset S_i$.

¹Название первых двух случаев объясняет геометрическая интерпретация доказательства леммы о весах; мы будем применять предложение, когда $P(G_1)$ и $P(G_3)$ вершины многоугольника $\mathcal{P}$, а $P(G_2)$ либо вершина, либо внутренняя точка многоугольника. В третьем случае треугольник, определяемый тремя точками, вырождается в отрезок.

Из второго утверждения выводим, что очевидные включения $S_i \subset S_i \cup G$ и $G \cap S_i \subset S_i$ должны быть строгими (равенства исключаются). Так как обе точки $P(S_i)$ и $P(G)$ лежат ниже прямой l , проходящей через начало координат и точку P_S , прямое вычисление показывает, что $d(S_i \cup G) < m + 1$. Так как $[P(S_{i+1}), P(S_i)]$ – сторона выпуклого многоугольника, содержащего все точки $\mathcal{S}$, то точки $P(S_i \cap G)$ и $P(S_i \cup G)$ не могут лежать строго справа от прямой l' , содержащей отрезок $[P(S_{i+1}), P(S_i)]$, причем точка $P(S_i \cup G)$ лежит строго слева от l' . В терминах предложения 2.5 набор S_i из тройки наборов $S_i \cap G$, S_i и $S_i \cup G$ является граничным. Но из предложения 2.4 следует

$$f(S_i \cup G, S_i \cap G) \geq f(S_i \cup G, S_i),$$

что в терминологии предложения 2.5 означает, что набор S_i либо внутренний, либо рассматриваемый случай вырожденный. Мы получили противоречие; следовательно, если $P(G) \in [P(S_{i+1}), P(S_i)]$, то $S_i \supset G$. Таким образом, $S_i \supset S_{i+1}$ и если $P(G) = P(S_i)$, то должно быть $G \supset S_i$ и $S_i \supset G$. Следствие доказано.

3. Построение выпуклого многоугольника

Следующая лемма позволяет определить основные константы из леммы о весах. С геометрической точки зрения в ней находится выпуклая оболочка множества точек $\mathcal{S}$.

ЛЕММА 3.1 (о выпуклом многоугольнике). *Пусть S – конечное множество точек из $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ – вырождается с показателем λ при проектировании на M . Тогда существует строго убывающая цепочка вложенных наборов точек из S*

$$S_1 \supset \dots \supset S_{i_0} \supset \emptyset$$

такая, что

$$f(S_{i-1}, S_i) > f(S_i, S_{i+1}), \quad i = 1, \dots, i_0, \quad (3.1)$$

где по определению $S_0 = S$, $S_{i_0+1} = \emptyset$ и $f(S_0, S_1) = [m+1-d(S_1)]/[m+1+2\lambda-w(S_1)]$. Для любого набора H такого, что $S_{i-1} \supset H$, $H \not\subset S_i$ и при $i = 1$ выполняется дополнительное условие, что $d(H \cup S_1) < m + 1$, справедливо неравенство

$$f(H, S_i) \geq f(S_{i-1}, S_i), \quad i = 1, \dots, i_0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем последовательно строить цепочку, добавляя в нее новые элементы. Если для всех наборов точек из S выполняется неравенство

$$f(G) \geq \frac{m+1}{m+1+2\lambda}, \quad (3.3)$$

то наша цепочка состоит из одного множества $S_1 = \emptyset$ и (3.3) эквивалентно (3.2) для $i = 1$.

Если для набора G справедливо неравенство $f(G) < (m+1)/(m+1+2\lambda)$, то найдем минимальный набор S_1 такой, что

$$f(S_0, S_1) = \max_{G \subset S} f(S_0, G), \quad (3.4)$$

где минимальность означает, что если $f(S_0, S_1) = f(S_0, G)$, то набор S_1 удовлетворяет неравенству $f(S_1) \leq f(G)$. Так как множество точек S конечно, такой набор S_1 существует.

Докажем (3.2) для $i = 1$. Из неравенства (3.4) выводим, что

$$f(S_0, S_1) \geq f(S_0, H \cup S_1) \quad (3.5)$$

для любого набора H , для которого множество $H \cup S_1$ является набором. Если $H \not\subset S_i$, то из (3.5) и предложения 2.5, второй случай, следует неравенство (3.2).

Если для любого набора $G \subset S_1$ выполняется неравенство

$$f(G) \geq f(S_1), \quad (3.6)$$

то построение цепочки закончено и неравенство (3.6) эквивалентно неравенству (3.2) для $i = 2$. Если неравенство (3.6) не выполняется, то переходим к построению набора S_2 . Построение набора S_2 аналогично построению i -го элемента цепочки, поэтому мы ограничимся описанием построения набора S_i .

Пусть мы построили $(i-1)$ -й набор цепочки вложенных наборов S_{i-1} и условие окончания построения цепочки не выполняется, т.е. существует набор $G \subset S_{i-1}$ такой, что

$$f(G) < f(S_{i-1}). \quad (3.7)$$

Так как S конечно, определено число $\max_{G \subset S_{i-1}} f(S_{i-1}, G)$. В качестве S_i выбираем минимальный набор, удовлетворяющий равенству

$$f(S_{i-1}, S_i) = \max_{G \subset S_{i-1}} f(S_{i-1}, G), \quad (3.8)$$

где минимальность S_i означает, что для всякого набора G' такого, что

$$f(S_{i-1}, G') = \max_{G \subset S_{i-1}} f(S_{i-1}, G),$$

выполняется неравенство $f(S_i) \leq f(G')$. В силу конечности S такой набор S_i существует. Отметим, что из (3.8) для набора S_i следует выполнение (3.7). В самом деле, из (3.8) следует, что $f(S_{i-1}, S_i) > f(S_{i-1}, \emptyset) = f(S_i)$. Применяя первый случай предложения 2.5, получим $f(S_i) < f(S_{i-1})$.

Докажем неравенство (3.1) в общем случае. Из определения S_{i-1} (см. (3.8)) следует

$$f(S_{i-2}, S_i) \leq f(S_{i-2}, S_{i-1}). \quad (3.9)$$

Равенство в (3.9) не может иметь место; в самом деле, если в (3.9) равенство, то в качестве $(i-1)$ -го набора на $(i-1)$ -м шаге построения цепочки мы должны были бы выбрать набор S_i , так как одновременно выполнены (3.9) со знаком равенства и $f(S_i) < f(S_{i-1})$. Из (3.9) со строгим знаком неравенства и предложения 2.5 следует

$$f(S_{i-2}, S_{i-1}) > f(S_{i-1}, S_i).$$

Перейдем к доказательству неравенства (3.2) для построенного набора S_i . Из равенства (3.8) следует, что для любого набора $H \subset S_{i-1}$

$$f(S_{i-1}, S_i) \geq f(S_{i-1}, H),$$

и если $H \not\subset S_i$, то из предложения 2.5 (случай II и III) следует неравенство (3.2).

Таким образом, мы доказали существование очередного i -го набора цепочки и выполнение для построенного набора неравенств из (3.1) и (3.2). Так как множество S конечно, то и процесс построения цепочки конечен. Лемма о выпуклом многоугольнике доказана.

4. Доказательство леммы о весах

ЛЕММА 4.1. Пусть в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ задано подпространство M размерности m и множество точек $S = (a_1, \dots, a_q)$ с весами $w_1, \dots, w_q$ соответственно, $0 \leq w_i \leq 1$ для всех i , которое вырождается с показателем λ при проектировании на M . Тогда существует число p ,

$$\frac{m+1+\lambda}{m+1} \leq p \leq \frac{m+1+2\lambda}{m+1}, \quad (4.1)$$

и веса w'_j , $0 \leq w'_j \leq w_j$, точек a_j , удовлетворяющие равенству

$$w(S) - w'(S) + p(m+1) = m+1+2\lambda, \quad (4.2)$$

где мы обозначаем через $w(G)$ первоначальный вес множества G , а через $w'(G)$ вес точек G , подсчитанный с новыми весами, такие, что для любого набора $G \subset S$ выполняется неравенство

$$w'(G) \leq pd(G). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{i_0} \supset \emptyset$ — строго убывающая цепочка подмножеств точек, построенная в лемме 3.1 для M и S . Полагаем

$$p = \frac{m+1+2\lambda - w(S_1)}{m+1 - d(S_1)},$$

меняем веса точек a_j из наборов $S_i \setminus S_{i+1}$ с w_j на $w'_j = pf(S_i, S_{i+1})w_j$, $i = 1, \dots, i_0$, а у точек $a_j \in S \setminus S_1$ оставляем вес без изменений: $w'_j = w_j$. Так как все $w_j \geq 0$, из (3.1) и равенства $p = 1/f(S_0, S_1)$ следует, что $w'_j \leq w_j$.

Докажем теперь (4.1)–(4.3). Начнем с (4.2). Так как вес точек множества $S \setminus S_1$ не меняется и

$$\sum_{i=1}^{i_0} w'(S_i \setminus S_{i+1}) = \sum_{i=1}^{i_0} pf(S_i, S_{i+1})w(S_i \setminus S_{i+1}) = pd(S_1),$$

где $S_{i_0+1} = \emptyset$, то при вычислении левой части (4.2) получим

$$w(S_1) - w'(S_1) + p(m+1) = w(S_1) + p(m+1 - d(S_1)) = m+1+2\lambda.$$

Из (4.2) и того, что все новые веса точек не больше старых, т.е. $w(S_1) - w'(S_1) \geq 0$, следует, что $p \leq (m+1+2\lambda)/(m+1)$, а так как $e(S_1) \leq \lambda$, то

$$p \geq 1 + \frac{\lambda}{m+1 - d(S_1)} \geq \frac{m+1+\lambda}{m+1},$$

где второе неравенство следует из того, что $\lambda d(S_1) \geq 0$.

Переходим к доказательству (4.3). Мы рассмотрим два взаимно исключающих случая: $d(G \cup S_1) < m+1$ и $d(G \cup S_1) = m+1$. Сначала предположим, что $d(G \cup S_1) < m+1$. Обозначим $G_i = G \cap S_i$, $i = 0, \dots, i_0$. Мы будем доказывать, что

$$w'(G_i \setminus G_{i+1}) \leq pd(G_i, G_{i+1}), \quad i = 0, \dots, i_0 - 1. \quad (4.4)$$

Неравенство (4.3) получается суммированием неравенств (4.4) по всем i . Из (3.2) следует $f(G_i, S_{i+1}) \geq f(S_i, S_{i+1})$. Левую часть неравенства оценим с помощью предложения 2.4, где $H_1 = G_i$, $H_2 = S_{i+1}$, и мы используем равенство $G_{i+1} = G_i \cap S_{i+1}$, которое следует из определения множеств G_i . В результате получаем $f(G_i, G_{i+1}) \geq f(S_i, S_{i+1})$. Точки a_j из набора $G_i \setminus G_{i+1}$ имеют вес равный $w'_j = pf(S_i, S_{i+1})w_j$; следовательно, из определения $f(G_i, G_{i+1})$ (см. (2.1)) получим

$$\sum_{a_j \in G_i \setminus G_{i+1}} w'_j \leq pd(G_i, G_{i+1}).$$

Нам осталось доказать неравенство (4.3), когда $d(G \cup S_1) = (m + 1)$. В этом случае $d(G) \geq m + 1 - d(S_1)$, так как иначе $d(G \cup S_1) < m + 1$. Из определения константы p и неравенства $e(G) < \lambda$, справедливого для любого набора точек из S , в частности, и для S_1 , выводим неравенство $\lambda \leq (p - 1)d(G)$. Так как $e(G) = \max(0, w(G) - d(G))$ и $w'_j \leq w_j$, из определения 2.2 следует $w'(G) \leq pd(G)$. Неравенство (4.3) и лемма о весах полностью доказаны.

В качестве следствия доказанной леммы, предложения 2.3, когда все $w_j = 1$, а $\lambda = n - m$, получаем сформулированную в самом начале лемму 1.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cartan H. Sur les zéros de combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données // *Mathematica (Cluj)*. 1933. V. 7. P. 5–31.
- [2] Чекалкин Н. С. Теоремы единственности теории распределения значений и специальные классы голоморфных отображений. Дисс. ... к.ф.-м.н., 1987.
- [3] Chen W. Defect relation for degenerate meromorphic maps // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 319. P. 499–515.
- [4] Ru M., Wong P. M. Integral points of $\mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \setminus \{2n + 1 \text{ hyperplanes in general position}\}$ // *Invent. Math.* 1991. V. 106. P. 195–216.
- [5] Vojta P. On Cartan's theorem and Cartan's conjecture // *Amer. J. Math.* 1997. V. 119. P. 1–17.
- [6] Fujimoto H. Value Distribution Theory of the Gauss Maps of Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^m$. *Aspects of Math.* V. E21. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1993.
- [7] Ночка Е. И. Об одной теореме из линейной алгебры // *Изв. АН МССР. Сер. физ. -мат. и техн. наук.* 1982. № 3. С. 29–33.
- [8] Shiffman B. The second main theorem for log canonical $\mathbb{R}$ -divisors // *Geometric Complex Analysis* / ed. J. Noguchi et al. Singapore: World Scientific, 1995. P. 1–13.