Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Шрамов, Элементарные бирациональные отображения между трехмерными торическими расслоениями Мори, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 132–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:46:55

УДК 512.763

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕЖДУ ТРЕХМЕРНЫМИ ТОРИЧЕСКИМИ РАССЛОЕНИЯМИ МОРИ

К. А. Шрамов

В данной работе классифицируются элементарные эквивариантные бирациональные отображения – линки – между трехмерными торическими Мори расслоениями. Все они естественно подразделяются на несколько классов в зависимости от размерностей баз расслоений. В тех случаях, когда количество линков оказывается конечным, приводится их полный список, в других случаях дается их локальное описание (см. формулировки в разделе 4). Почти все доказательства комбинаторные, поэтому доказываются лишь вспомогательные утверждения раздела 3.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Напомним (см., например, [1]), что *Мори расслоенное пространство* (*Мори расслоение*) – это многообразие X с отображением $\phi: X \rightarrow S$, обладающее следующими свойствами:

- (i) X проективно, $\mathbb{Q}$ -факториально и имеет не более чем терминальные особенности;
- (ii) $\phi: X \rightarrow S$ – стягивание K_X -отрицательного экстремального луча;
- (iii) $\dim(S) < \dim(X)$.

Ответ на вопрос о том, как устроены бирациональные отображения между Мори расслоенными пространствами, дает алгоритм разложения таких отображений на элементарные (называемые линками), известный под названием программы Саркисова (см., например, [1]).

Линками типа I, II, III и IV называются коммутативные диаграммы следующего вида:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \xrightarrow{-\chi} X' \\
 & \swarrow p & \downarrow \phi' \\
 X & & S' \\
 \downarrow \phi & & \leftarrow \sigma \\
 S & &
 \end{array} \quad (I)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \xrightarrow{-\chi} Z' \\
 & \swarrow p & \searrow p' \\
 X & & X' \\
 \searrow \phi & & \swarrow \phi' \\
 & S &
 \end{array} \quad (II)$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\chi} & Z' \\
 \downarrow \phi & & \searrow p' \\
 & & X' \\
 & & \downarrow \phi' \\
 S & \xrightarrow{\sigma} & S'
 \end{array} \quad (\text{III})$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\chi} & X' \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\
 S & & S' \\
 \searrow \psi & & \swarrow \psi' \\
 & T &
 \end{array} \quad (\text{IV})$$

В каждой из этих диаграмм отображения $\phi: X \rightarrow S$ и $\phi': X' \rightarrow S'$ – Мори расслоения, отображения $p: Z \rightarrow X$ и $p': Z' \rightarrow X'$ – экстремальные дивизориальные стягивания, отображение χ является последовательностью лог-флипов (быть может, тривиальной), σ, ψ и ψ' – сюръективные морфизмы со связными слоями. Особенности многообразий X, X', Z и Z' всегда предполагаются терминальными.

Доказательства основных фактов, относящихся к программе Саркисова в размерностях 2 и 3, можно найти в [1].

2. Обозначения и соглашения. В дальнейшем все многообразия предполагаются проективными, нормальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными. Основное поле – поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определения и информация об основных свойствах торических многообразий содержится, например, в [1] или [2].

Для каждого n -мерного торического многообразия M символ $\mathbb{F}_M \subset \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathcal{N} = \mathbb{Z}^n$, обозначает его веер, а $\mathbb{F}_M^{(k)}$ – множество k -мерных конусов этого веера. Все вееры считаются вложенными в одно и то же пространство, чтобы некоторые их элементы можно было отождествлять друг с другом. Элементы $\mathbb{F}_M^{(1)}$, т.е. одномерные конусы, для сокращения формулировок отождествляются с лежащими на них примитивными векторами. Конус из $\mathbb{F}_M^{(k)}$, порожденный векторами $v_1, \dots, v_k$, обозначается $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

При рассмотрении линков предполагается, что обозначения всех многообразий и отображений такие же, как в определениях (см. выше). Все линки рассматриваются с точностью до послыного изоморфизма.

Основное предположение: если противное не оговорено явно, то все объекты предполагаются торическими.

3. Специфика торической программы Саркисова. Обсуждение торической программы Саркисова можно найти в [1]. Отметим лишь то, что любые два торических многообразия одинаковой размерности бирационально эквивалентны, так что алгоритм можно применять к любой паре торических Мори расслоений.

Торические многообразия обладают рядом свойств, сильно упрощающих описание элементов программы Саркисова. Ниже перечислены некоторые из них.

ЛЕММА 1. Пусть X – гладкое трехмерное торическое многообразие, $\phi: X \rightarrow S = \mathbb{P}^1$ – эquivариантное расслоение со связными слоями и $\rho(X/S) = 1$. Тогда $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\rho(X/S) = 1$, то $\rho(X) = 2$. Пусть $\mathbb{F}_X^{(1)} = \{v_1, \dots, v_5\}$, причем векторы v_1, v_2 и v_3 лежат в плоскости P , проекция вдоль которой переводит $\mathbb{F}_X$ в $\mathbb{F}_S$. Так как точки, соответствующие $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ и $\langle v_1, v_2, v_5 \rangle$, гладкие, можно считать $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 0)$, $v_4 = (0, 0, -1)$, $v_5 = (a, b, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предыдущее утверждение остается верным и при более слабых условиях на X : достаточно требовать терминальности особенностей и существования двух гладких инвариантных точек, лежащих на различных слоях. В частности, из этих условий следует гладкость X . Именно в таком виде это утверждение удобно использовать в дальнейшем.

Терминальность особенностей накладывает сильные ограничения на торические Мори расслоения. Именно, имеют место следующие утверждения, которые используются для локального описания линков над базами, отличными от точки.

ЛЕММА 2. Пусть $\tilde{X} = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_n(a : b : 0, 1)$, где $n > 1$, $(a, n) = (b, n) = 1$, имеет лишь терминальные особенности. Тогда $n = 3$, $a = 2$, $b = 1$ (или $a = 1$, $b = 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие $\tilde{X}$ имеет три особые точки типа $\frac{1}{n}(a, b, 1)$, $\frac{1}{n}(a - b, -b, 1)$ и $\frac{1}{n}(-a, b - a, 1)$ соответственно. Так как первая из них терминальна, то возможны лишь следующие случаи.

Случай $b = -a$. Тогда, чтобы особая точка типа $\frac{1}{n}(a - b, -b, 1) = \frac{1}{n}(2a, a, 1)$ была терминальна, необходимо либо $a = -1$ (тогда из терминальности точки типа $\frac{1}{n}(-a, b - a, 1) = \frac{1}{n}(1, 2, 1)$ следует, что $n = 3$), либо $2a = -1$ (тогда из терминальности точки типа $\frac{1}{n}(-a, b - a, 1) = \frac{1}{n}(-a, 1, 1)$ следует $a = 1$, т.е. $n = 3$), либо $a = -2a$ (тогда $3a = 0$, и из $(a, n) = 1$ следует $n = 3$).

Случай $a = -1$. Тогда, чтобы особая точка типа $\frac{1}{n}(a - b, -b, 1) = \frac{1}{n}(-1 - b, -b, 1)$ была терминальна, необходимо либо $-b = -1$ (тогда $b = 1$, и из терминальности точки типа $\frac{1}{n}(-a, b - a, 1) = \frac{1}{n}(1, 2, 1)$ следует $n = 3$), либо $-1 - b = -1$ (тогда $b = 0$; противоречие), либо $-1 - b = b$ (тогда $2b = -1$, что дает $b = 1$, и $n = 3$).

Случай $b = -1$ разбирается аналогично.

ЛЕММА 3. Пусть $\phi: X \rightarrow S = \mathbb{P}^1$ – трехмерное торическое Мори расслоение, $\tilde{S} = \mathbb{A}^1 \subset S$ и $\tilde{X} = \phi^{-1}(\tilde{S})$. Тогда $\tilde{X}$ изоморфно либо $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$, либо $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_3(2 : 1 : 0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\tilde{X}$ является фактором $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ (или совпадает с ним), следует из строения веера торического многообразия X . То, что соответствующая группа циклическая, следует из терминальности особенностей X . Оставшаяся часть утверждения содержится в лемме 2.

ЛЕММА 4. Пусть $\tilde{X} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_n(a : 0, b : 0, 1)$, где $n > 1$, $(a, n) = (b, n) = 1$, имеет лишь терминальные особенности. Тогда $n = 2$, $a = b = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие $\tilde{X}$ имеет особые точки типа $\frac{1}{n}(a, b, 1)$, $\frac{1}{n}(a, -b, 1)$, $\frac{1}{n}(-a, b, 1)$ и $\frac{1}{n}(-a, -b, 1)$ соответственно. Разбор случаев устроен так же, как в доказательстве леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичное лемме 4 локальное по базе описание трехмерных торических расслоений на коники таково: проекция $\phi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ есть либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$, либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^2 / \mathbb{Z}_n(a, -a, 1) \rightarrow \mathbb{A}^2 / \mathbb{Z}_n(1, -1)$, где $n > 1$, $(a, n) = 1$.

Для описания дивизориальных стягиваний в линках используется следующая теорема, доказанная в [3].

ТЕОРЕМА (Кавамата [3]). Пусть (X, P) – факторособенность $\mathbb{C}^3 / \mathbb{Z}_r(s, -s, 1)$, $0 < s < r$, $(r, s) = 1$, и $\mu: Y \rightarrow X$ – проективный бирациональный морфизм из многообразия Y с терминальными особенностями. Предположим, что исключительное множество E морфизма μ является неприводимым $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором, $-E$

μ -обилен и $P \in \mu(E)$. Тогда μ совпадает со взвешенным раздутием P с весами $(s/r, (r-s)/r, 1/r)$.

Имеется полный список трехмерных торических Мори расслоений над точкой (т.е. многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$) с терминальными особенностями (см. [4]). Это следующие многообразия: $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$, $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$, $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$, а также торическое многообразие $\mathcal{V}$, для которого примитивные векторы одномерных конусов веера $\mathbb{F}_{\mathcal{V}}$ суть $(1, 0, 1)$, $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 0)$ и $(0, 1, -2)$ (это многообразие является фактором $\mathbb{P}^3$ по группе $\mathbb{Z}_5$).

4. Формулировки утверждений о торических линках. В следующем предложении описываются торические линки типа I. Так как линки типа III являются обратными преобразованиями к линкам типа I, их описание отличается от описания линков типа I лишь переобозначениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X \rightarrow S$, $X' \rightarrow S'$ – трехмерные торические Мори расслоения. Тогда для линков типа I имеются лишь следующие возможности.

1) $\rho(X) = 1$, $S = pt$, $\dim(S') = 2$, p – раздутие точки, χ – изоморфизм. Все торические линки такого вида исчерпываются приведенным ниже списком из шести примеров.

- а) Раздутие точки на $X = \mathbb{P}^3$.
- б) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. Раздутие гладкой точки на X приводит к расслоению на коники над $\mathbb{P}(1, 1, 2)$. Раздутие особой точки (особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$) приводит к неособому расслоению над $\mathbb{P}^2$.
- в) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 2, 1)$ с весами $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ приводит к расслоению над $\mathbb{P}(1, 1, 2)$. Взвешенное раздутие гладкой точки с весами $(1, 2, 3)$ приводит к расслоению над $\mathbb{P}(1, 2, 3)$.
- г) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. Взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ приводит к расслоению над $\mathbb{P}(1, 2, 3)$.

2) $\rho(X) = 1$, $S = pt$, $\dim(S') = 1$, p – раздутие точки, χ – один лог-флип. Все торические линки такого вида исчерпываются приведенным ниже списком из четырех примеров.

- а) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. Раздутие гладкой точки $P \in X$ приводит к многообразию Z с одной терминальной особенностью. При этом $\rho(Z) = 2$, и один из экстремальных лучей конуса $NE(Z)$ порожден кривой на исключительном дивизоре стягивания p . Пусть $D_1, D_2 \subset X$ – неприводимые инвариантные дивизоры, содержащие P и особую точку $P' \in X$. Пусть $\tilde{D}_i = p_*^{-1}D_i$, $i = 1, 2$, $C = D_1 \cap D_2$. Тогда C порождает экстремальный луч, $K_Z C = -3/2$, и флип в C приводит к неособому многообразию $X' = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2))$.
- б) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Раздутие особой точки P_2 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ с последующим лог-флипом в пересечении собственных прообразов неприводимых инвариантных дивизоров, содержащих P_2 и особую точку P_3 индекса 3, приводит к многообразию $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3))$. Взвешенное раздутие гладкой точки с весами $(1, 1, 3)$ приводит к особому Мори расслоению.
- в) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$. Взвешенное раздутие особой точки индекса 4 приводит к особому Мори расслоению.

3) $\rho(X) = 1$, $S = pt$, $\dim(S') = 1$, p – раздутие кривой, χ – изоморфизм. Единственный пример такого линка – раздутие прямой $l \subset \mathbb{P}^3$.

4) $\rho(X) = 2$, $\dim(S) = 1$, $\dim(S') = 2$, p – раздутие сюръективно проецирующей на S кривой, χ – изоморфизм. Таких линков бесконечно много, все участвующие в них многообразия гладкие, и все они могут быть описаны следующим образом.

Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq b$. Пусть M – тавтологический обратимый пучок на X , дивизор L – слой расслоения $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть кривая s – сечение, соответствующее проекции расслоения $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ на $\mathcal{O}$. Пусть $p: X' \rightarrow X$ – раздутие кривой s . Тогда $S' = F_{a-b} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a-b))$, а отображение $\sigma: S' \rightarrow S$ – соответствующее $\mathbb{P}^1$ -расслоение $F_{a-b} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Исключительный дивизор E отображения p проецируется на S' изоморфно.

Представляя X в таком виде различными способами (число способов не более трех), получаем все возможности для X' .

5) $\rho(X) \geq 2$, $\dim(S) = 2$, $\dim(S') = 2$, p – раздутие точки, χ – один лог-флип. Таких линков бесконечно много, и им можно дать следующее локальное (по S) описание. Если X/S локально изоморфно $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 / \mathbb{A}^2$, то p – взвешенное раздутие с весами $(a, 1, b)$, $(a, b) = 1$, соответствующее отображение баз σ – взвешенное раздутие с весами $(a, 1)$. Если же X/S локально изоморфно $(\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 / \mathbb{Z}_r(s, -s, 1: 0)) / (\mathbb{A}^2 / \mathbb{Z}_r(1, -1))$, то единственная возможность для p описывается теоремой Каваматы (см. раздел 3), соответствующее отображение баз – взвешенное раздутие с весами $(s/r, (r-s)/r, 1/r)$.

6) $\rho(X) \geq 2$, $\dim(S) = 2$, $\dim(S') = 2$, p – раздутие слоя ϕ над гладкой точкой, χ – изоморфизм, отображение $\sigma: S' \rightarrow S$ – раздутие соответствующей точки на базе.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $S = pt$. Пусть $\mathbb{F}_X^{(1)} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathbb{F}_Z^{(1)} = \mathbb{F}_X^{(1)} \cup \{v_5\}$. Предположим, что $\dim(S') = 2$. Тогда, так как существует проекция $\mathbb{F}_{X'}$ на $\mathbb{F}_{S'}$, веер $\mathbb{F}_{X'}$ должен содержать прямую. Так как $\mathbb{F}_{X'}^{(1)} = \mathbb{F}_Z^{(1)}$, отсюда следует, что $v_5 = -v_i$ для некоторого i , в частности, p – стягивание в точку. Окончательное описание в этом случае получается в результате небольшого перебора, выделяющего среди всех возникающих так многообразий имеющие лишь терминальные особенности.

Предположим теперь, что $\dim(S') = 1$. Тогда $\mathbb{F}_{X'}$ проецируется на $\mathbb{F}_{S'} = \mathbb{F}_{\mathbb{P}^1}$ вдоль плоскости, и три вектора из $\mathbb{F}_{X'}^{(1)} = \mathbb{F}_Z^{(1)}$, например, v_3, v_4 и v_5 , должны быть компланарны. Так как X' имеет лишь терминальные особенности, то $v_5 = -(v_3 + v_4)$, что снова дает конечное количество возможностей для Z . При этом то, является ли p стягиванием на кривую или в точку, в терминах $\mathbb{F}_Z$ определяется тем, компланарны v_5, v_1 и v_2 или нет.

Пусть теперь $\dim(S) = 1$, т.е. $S = \mathbb{P}^1$. Из коммутативности диаграммы, описывающей линк, и строения $\mathbb{F}_X$ нетрудно видеть, что образ исключительного дивизора p не может содержаться в слое ϕ , т.е. это с необходимостью кривая, сюръективно проецирующаяся на S . По теореме Каваматы она не проходит через особые точки X , а по лемме 1 (см. замечание 1) отсюда следует, что $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))$.

В оставшихся случаях ($\dim(S) = 2$) из строения $\mathbb{F}_X$ очевидно, что p должно быть либо стягиванием на слой ϕ (тогда по теореме Каваматы такой слой не проходит через особые точки X), либо стягиванием в точку. Дальнейшее описание получается применением теоремы Каваматы к локальному описанию торических расслоений на коники.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Многие утверждения о тривиальности (нетривиальности) отображения χ в общем (неторическом) случае перестают быть верными. Например, раздутие кривой степени 7 рода 5 на $\mathbb{P}^3$ является расслоением на коники (в торическом случае

раздутие кривой на многообразии X с $\rho(X) = 1$ может привести только к расслоению над $\mathbb{P}^1$).

Наиболее многочисленную группу составляют линки типа II (для перечисления линков из пункта 1) предложения 2 был использован компьютерный перебор).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $X \rightarrow S$, $X' \rightarrow S'$ – трехмерные торические Мори расслоения. Тогда для линков типа II имеются лишь следующие возможности.

1) $\rho(X) = \rho(X') = 1$, $S = pt$, p, p' – раздутия точек, χ – один лог-флип. Все торические линки такого вида исчерпываются приведенным ниже списком из тридцати восьми (содержательно – девятнадцати) примеров.

- а) Пусть $X = \mathbb{P}^3$. Если p – взвешенное раздутие с весами $(1, 2, 3)$, то описанный линк приводит к $X' = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Если p – взвешенное раздутие с весами $(1, 2, 5)$, то $X' = \mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$.
- б) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. При некотором выборе координат взвешенные раздутия гладкой точки с весами $(2, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(4, 1, 3)$, $(2, 1, 5)$ и $(2, 1, 7)$ приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ и $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$ соответственно.
- в) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. При некотором выборе координат взвешенные раздутия гладкой точки с весами $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 5, 4)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 1, 4)$ и $(1, 1, 5)$ приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$ и $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$ соответственно.
- г) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. При некотором выборе координат взвешенные раздутия гладкой точки с весами $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 4)$ и $(1, 2, 5)$ приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$, $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$ и $\mathcal{V}$ соответственно, а взвешенные раздутия особых точек индекса 2 и 3 – к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ и $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$.
- д) Пусть $X = \mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$. При некотором выборе координат взвешенные раздутия гладкой точки с весами $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 1, 2)$ и $(1, 1, 3)$ приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$, $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ и $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$ соответственно, а взвешенные раздутия особых точек индекса 3 и 5 – к многообразиям $\mathbb{P}^3$ и $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.
- е) Пусть $X = \mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$. Тогда взвешенные раздутия особых точек индекса 2, 3, 5 и 7 приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$ и $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ соответственно.
- ж) Пусть $X = \mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$. Тогда взвешенные раздутия особых точек индекса 3, 4, 5 и 7 приводят посредством описанного линка к многообразиям $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$, $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ и $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$ соответственно.
- з) Пусть $X = \mathcal{V}$. Тогда взвешенное раздутие особой точки приводит посредством описанного линка к многообразию $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$.

2) $\rho(X) = \rho(X') = 1$, $S = pt$, одно из отображений p, p' – раздутие кривой, другое – раздутие точки, χ – изоморфизм. Существует лишь два торических линка такого вида. Первый связывает многообразия $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ и $X' = \mathbb{P}^3$, причем p' – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$. Вторым связывает $X = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ и $X' = \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, причем p' – взвешенное раздутие гладкой точки с весами $(1, 1, 3)$.

3) $\rho(X) = \rho(X') = 2$, $\dim(S) = 1$, p, p' – раздутия точек, χ — один лог-флип. Таких линков бесконечно много, и им можно дать следующее локальное описание. Пусть X/S локально (по S) изоморфно $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{A}^1$. Тогда p – либо взвешенное раздутие с весами $(a, b, 1) \neq (1, 1, 1)$, $(a, b) = 1$, причем в результате снова получается (локально) гладкое многообразие X' , либо взвешенное раздутие с весами $(1, 3a + 2, 3)$, $a \geq 0$, причем в результате получается особое многообразие. Если же X/S локально изоморфно $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_3(2 : 1 : 0, 1)) / \mathbb{A}^1$, то p описывается теоремой Каваматы и X' (локально) гладко.

4) $\rho(X) = \rho(X') = 2$, $\dim(S) = 1$, одно из отображений p, p' – раздутие точки, другое – раздутие кривой в слое ϕ , χ – изоморфизм. Таких линков бесконечно много, участвующие в них многообразия гладкие, и им можно дать локальное (по S) описание: X/S локально изоморфно $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{A}^1$, при этом p – раздутие прямой в слое, X' (локально) гладко и p' – стягивание собственного прообраза соответствующего слоя в точку.

5) $\rho(X) = \rho(X') \geq 2$, $\dim(S) = 2$, $\dim(S') = 2$, p, p' – раздутия кривых C и C' , изоморфно проецирующихся на свои образы $\phi(C)$ и $\phi'(C')$, χ – изоморфизм. При этом исключительным дивизором p' является собственный прообраз при p дивизора $D = \phi^*(\phi(C))$, X гладко в точках D , а S гладко в точках $\phi(C)$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $S = pt$, $\mathbb{F}_X^{(1)} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathbb{F}_Z^{(1)} = \mathbb{F}_{Z'}^{(1)} = \mathbb{F}_X^{(1)} \cup \{v_5\}$, $\mathbb{F}_{X'}^{(1)} = \mathbb{F}_Z^{(1)} \setminus \{v_4\}$. Так как многообразие X' снова должно быть одним из восьми перечисленных в конце раздела 3, то для v_5 при фиксированном X есть лишь конечное число возможностей. Как и в доказательстве предложения 1, окончательный ответ в этом случае получается конечным перебором.

В случае $\dim(S) = 1$ локальное описание многообразия X дается леммой 3. Если X особо, p описывается теоремой Каваматы; если X неособо, ограничения на p возникают из требования терминальности особенностей Z .

Если $\dim(S) = 2$, то образ p не может содержаться в слое ϕ , что легко увидеть, например, из строения $\mathbb{F}_X$. Оставшаяся часть описания получается применением теоремы Каваматы.

Наконец, самая малочисленная и наиболее просто описываемая группа – линки типа IV. Отметим, что среди них встречаются линки с $\chi = \text{id}$, которые являются просто выбором другой структуры расслоения Мори на многообразии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $X \rightarrow S$, $X' \rightarrow S'$ – трехмерные торические Мори расслоения. Тогда для линков типа IV имеются лишь следующие возможности.

1) $\rho(X) = 2$, $\dim(S) = \dim(S') = 1$, $T = pt$, χ – один лог-флип. Существует лишь один такой линк, причем X и X' изоморфны $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$.

2) $\rho(X) = 2$, $\dim(S) = 1$, $\dim(S') = 2$ (или наоборот), $T = pt$, χ – изоморфизм. Существует лишь два таких линка. В первом из них $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, а во втором – $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 / \mathbb{Z}_3(2 : 1 : 0, 1 : 0)$.

3) $\rho(X) = 3$, $\dim(S) = \dim(S') = 2$, $\dim(T) = 1$, χ – изоморфизм. Таких линков бесконечно много, но с локальной точки зрения возможны лишь две различных ситуации: локально (по T) X изоморфно $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_2(1 : 0, 1 : 0, 1)$ с естественными проекциями на два экземпляра $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ (соответственно $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z}_2(1 : 0, 1)$) и дальнейшими проекциями на $\mathbb{A}^1$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $T = pt$. Из строения $\mathbb{F}_X$ очевидно, что случай $\dim(S) = \dim(S') = 2$ не реализуется. Если $\dim(S) = 1, \dim(S') = 2$, то комбинаторная структура $\mathbb{F}_X$ однозначно определена тем, что $\mathbb{F}_X^{(1)}$ содержит пару коллинеарных и тройку компланарных векторов. Применение леммы 3 заканчивает описание в этом случае.

Предположим, что $\dim(S) = \dim(S') = 1$. Пусть $\mathbb{F}_X^{(1)} = \{v_1, \dots, v_5\}$. Так как $\mathbb{F}_{X'}^{(1)} = \mathbb{F}_X^{(1)}$, а $\mathbb{F}_X$ и $\mathbb{F}_{X'}$ обладают проекциями на $\mathbb{F}_{\mathbb{P}^1}$, то $\mathbb{F}_X^{(1)}$ содержит две тройки компланарных векторов, например, v_1, v_2, v_3 и v_3, v_4, v_5 . Так как особенности X и X' терминальны, то $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ и $v_3 + v_4 + v_5 = 0$. Можно считать, что $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 0)$. По лемме 3 можно считать, что либо $v_4 = (0, 0, 1)$ (тогда $v_5 = (1, 1, -1)$ и $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$), либо $v_4 = (1, 2, 3)$ (тогда $v_5 = (0, -1, -3)$ и X имеет не терминальные особенности; противоречие).

Если $\dim(T) = 1$, то локальное описание X и X' получается из леммы 4. Случай $\dim(T) = 2$, как нетрудно видеть, не реализуется.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что во всех перечисленных случаях отображение χ либо тривиально, либо состоит из одного лог-флипа.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Хотя самый простой способ доказательства приведенных выше утверждений комбинаторный, некоторые из них верны и в общем (не торическом) случае. Таковы, например, утверждения о том, что линков типа IV с $\dim(T) = 2$, а также линков типа I с $\dim(S) = 1$, для которых p – раздутие подмногообразия слоя ϕ , в случае трехмерных Мори расслоений не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Некоторые из приведенных выше линков можно описать более явно, как, например, линк из пункта 1) предложения 3. Пусть M – тавтологический обратимый пучок на $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$, дивизор L – слой расслоения $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть l – прямая в слое, s – сечение, соответствующее проекции расслоения $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathcal{O}$. Тогда $Ls = 1, Ll = 0, Ms = 0, Ml > 0$, т.е. s и l порождают экстремальные лучи конуса Мори $NE(X)$. Так как $K_X = -3M$, то $K_X s = 0$. В кривой s можно сделать флоп. Именно он и является отображением χ . Подробное описание этого флопа можно найти, например, в [5] (там он описывается как переход от одного малого разрешения особенности конуса над квадрикой $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ к другому малому разрешению).

Автор выражает благодарность В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Matsuki K. Introduction to the Mori Program. Universitext. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [2] Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 85–134.
- [3] Kawamata Y. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-Dimensional Complex Varieties (Trento, 1994). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 241–246.
- [4] Борисов А. А., Борисов Л. А. Особые торические многообразия Фано // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 2. С. 134–141.
- [5] Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. Многомерная комплексная геометрия. М.: Мир, 1993.