Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Проективные представления и чистые псевдопредставления эрмитово симметрических простых групп Ли, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 140–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:45:36

УДК 517.986.6

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЧИСТЫЕ ПСЕВДОПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭРМИТОВО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

А. И. Штерн

Показано, что любое неприводимое непрерывное унитарное проективное представление простой эрмитово симметрической группы Ли порождено сильно непрерывным чистым унитарным псевдопредставлением присоединенной группы данной группы Ли.

Библиография: 12 названий.

1. Формулировка основного результата. Напомним некоторые определения.

Простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр ее универсальной накрывающей группы бесконечен (см. [1]). Семейство некомпактных простых эрмитово симметрических групп Ли состоит из связных простых групп Ли, присоединенная группа которых изоморфна присоединенной группе одной из следующих групп Ли (см. [1]):

- (i) $SU(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$;
- (ii) $SO_0(2, q)$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$ (напомним, что группа $SO_0(2, 2)$ не является простой);
- (iii) $Sp(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$;
- (iv) $SO^*(2n)$, $n > 1$ (напомним, что группа $SO^*(2)$ не является простой);
- (v) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_6 , удовлетворяющая условию $\dim \mathfrak{k} = 46$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли максимальной компактной подгруппы присоединенной группы этой вещественной формы;
- (vi) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_7 , удовлетворяющая условию $\dim \mathfrak{k} = 79$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли максимальной компактной подгруппы присоединенной группы этой вещественной формы.

Мы рассматриваем проективные унитарные представления таких групп. Напомним, что если G – группа, а H – гильбертово пространство, то *проективным представлением* группы G в H называется гомоморфизм группы G в факторгруппу $P(G)$ группы $U(H)$ унитарных операторов в H по ее центру (образованному скалярными кратными единичного оператора). Если G – топологическая группа, то в определение ее проективного представления включается условие, что соответствующий гомоморфизм непрерывен, если группа $P(G)$ снабжена фактортопологией сильной (или, что равносильно, слабой) операторной топологии на $U(H)$. Проективное представление называется *неприводимым*, если коммутант любого семейства представителей элементов образа группы состоит из операторов, кратных единичному (напомним, что образы элементов являются классами унитарных операторов, отличающихся лишь числовым множителем).

Очевидно, что любое (непрерывное в указанном выше смысле) проективное представление (связной) группы Ли можно рассматривать как (непрерывное в том же смысле) проективное представление универсальной накрывающей данной группы Ли. Хорошо известно [2], что любое проективное представление σ связной односвязной полупростой¹ группы Ли G определяется некоторым обычным сильно непрерывным линейным представлением τ группы G в том же гильбертовом пространстве, т.е.

$$\tau(g) \in \sigma(g) \quad \text{для любого } g \in G. \quad (1)$$

С другой стороны, имеются примеры (включающие, в частности, пример знаменитого метаблектического представления симплектической группы), показывающие, что последнее утверждение о возможности подъема проективного представления до линейного представления не всегда справедливо за пределами односвязных групп. Поэтому представляет интерес вопрос о возможной структуре отображений τ группы G в $U(H)$, удовлетворяющих условию (1). С целью поиска таких отображений мы расширим класс допустимых отображений за счет так называемых чистых псевдопредставлений рассматриваемой группы.

Напомним теперь [3], что для данного $\varepsilon \geq 0$ отображение $\pi: G \rightarrow L(H)$ группы G в пространство линейных операторов в гильбертовом пространстве H называется *унитарным* (ε -) *псевдопредставлением* группы G в пространстве H , если оператор $\pi(g)$ унитарен для любого $g \in G$,

$$\|\pi(gh) - \pi(g)\pi(h)\| \leq \varepsilon \quad \text{для любых } g, h \in G,$$

и для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$ операторы $\pi(g^n)$ и $\pi(g)^n$ подобны с помощью оператора, ε -близкого по норме к единичному оператору (см. [3]). Псевдопредставление π называется *чистым*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным унитарным представлением группы H . Это условие является весьма ограничительным, так как обычное псевдопредставление может не удовлетворять этому условию даже на подгруппах, порожденных одним элементом (см. [4]). С другой стороны, если π – чистое псевдопредставление, то, в частности,

$$\pi(g^n) = \pi(g)^n \quad \text{для любых } g \in G \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Класс чистых псевдопредставлений – это очень естественный класс отображений групп в группы операторов. Кроме того, этот класс богат. В частности, оказывается, что неприводимые унитарные представления простых эрмитово симметрических групп Ли с конечным центром (в том числе неприводимые унитарные представления дискретной серии для таких групп Ли, не допускающие непрерывной деформации в классе унитарных представлений рассматриваемой группы) допускают нетривиальную непрерывную деформацию в классе чистых унитарных псевдопредставлений этой группы [5].

Цель настоящей работы состоит в доказательстве еще одного свойства чистых псевдопредставлений, которое тоже свидетельствует о богатстве этого класса. А именно,

¹Условие полупростоты не является здесь обязательным. Менее ограничительным условием существования линейного представления, порождающего любое данное неприводимое проективное унитарное представление, является условие тривиальности группы вторых когомологий алгебры Ли группы G с коэффициентами в группе $\mathbb{T}$ с тривиальным действием (ср. [2]).

оказывается, что любое неприводимое (непрерывное унитарное) проективное представление простой эрмитовой симметрической группы Ли порождено сильно непрерывным чистым унитарным псевдопредставлением присоединенной группы данной группы. Таким образом, мы доказываем, что имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – простая эрмитова симметрическая группа Ли, Z – ее центр, $G_0 = G/Z$ – соответствующая присоединенная группа. Для любого (сильно непрерывного унитарного) неприводимого проективного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует (сильно непрерывное) чистое неприводимое унитарное псевдопредставление ρ группы G_0 в том же пространстве H , удовлетворяющее условию

$$\rho(gZ) \in \sigma(g) \quad \text{для любого } g \in G.$$

Заметим, что утверждение теоремы нетривиально даже для случая, когда группа G односвязна.

Теорема 1 усиливает основной результат статьи [6], где было доказано, что для любого (сильно непрерывного унитарного) неприводимого проективного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует (сильно непрерывное) чистое неприводимое унитарное псевдопредставление ρ той же группы G в том же пространстве H , удовлетворяющее условию

$$\rho(g) \in \sigma(g) \quad \text{для любого } g \in G.$$

Усиление состоит в том, что искомое чистое неприводимое псевдопредставление можно всегда выбрать среди чистых неприводимых псевдопредставлений, тривиальных на центре данной группы.

2. Псевдохарактер Гишарде–Вигнера простой эрмитовой симметрической группы Ли. Напомним, что вещественная функция f на группе G называется (вещественным) квазихарактером на этой группе, если числовое множество

$$\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$$

ограничено. Кроме того, квазихарактер f называется псевдохарактером на G , если

$$f(g^n) = nf(g) \quad \text{для любых } g \in G \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

Понятие псевдохарактера было введено в 1983 г. [7]. Напомним, что для любого квазихарактера f на группе G формула

$$\varphi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(g^n), \quad g \in G, \quad (2)$$

корректно определяет псевдохарактер φ на G , который называется псевдохарактером, связанным с квазихарактером f . Этот псевдохарактер φ непрерывен, если G – топологическая группа и квазихарактер f непрерывен [8].

Пусть $\tilde{G}$ – произвольная связная односвязная простая некомпактная группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство

является эрмитово симметрическим), и пусть $\tilde{K}$ – аналитическая подгруппа группы $\tilde{G}$, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Осу-ществим изоморфное отождествление центра $Z_{\tilde{K}}$ аналитической группы $\tilde{K}$ с аддитив-ной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального парамет-ра на кривой). Рассмотрим разложение Ивасавы группы $\tilde{G}$. Пусть A – абелева, а N – нильпотентная группа в этом разложении, и пусть

$$g = k(g)an, \quad g \in \tilde{G}, \quad k(g) \in \tilde{K}, \quad a \in A, \quad n \in N,$$

– соответствующее разложение элемента $g \in \tilde{G}$. Как хорошо известно, отображение

$$\varpi: g \mapsto k(g), \quad g \in \tilde{G},$$

переводящее каждый элемент $g \in \tilde{G}$ в “компактную” компоненту $k(g) \in \tilde{K}$ его раз-ложения Ивасавы, является непрерывным. Рассмотрим композицию ψ отображения $\varpi: t \mapsto k(t)$ и непрерывной проекции π , отображающей каждый элемент $k \in K_T$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_{K_T}$. Как доказано в [9], эта композиция $\psi = \pi \circ \varpi$ определяет некоторый квазихарактер на $\tilde{G}$. Напомним также, что псевдохарактер φ , соответствующий квазихарактеру ψ (см. (2)), мы называем *псевдохарактером Гишарде–Вигнера* (ср. [9]–[11]). Согласно приведенному выше замечанию о непрерывнос-ти псевдохарактеров, псевдохарактер Гишарде–Вигнера автоматически непрерывен на всей группе G .

3. Доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{G}$ – простая эрмитово симметрическая группа Ли, Z – ее центр, а φ – псевдохарактер Гишарде–Вигнера на $\tilde{G}$. Для любого (унитарного) характера θ группы Z существует (непрерывный унитарный) характер χ вве-денной выше группы Z_{K_T} , ограничение композиции которого с псевдохарактером Гишарде–Вигнера φ на центр Z совпадает с характером θ :

$$\chi \circ \varphi|_Z = \theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение непосредственно следует из того факта, что огра-ничение псевдохарактера Гишарде–Вигнера φ на Z_{K_T} является изоморфизмом этой группы на числовую прямую, а любой (непрерывный) характер замкнутой подгруппы абелевой группы допускает продолжение до (непрерывного) характера самой группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть G – простая эрмитово симметрическая груп-па Ли, $\tilde{G}$ – ее универсальная накрывающая группа, Z – центр группы G , $Z_{\tilde{G}}$ – центр группы $\tilde{G}$, $G_0 = G/Z$ – соответствующая присоединенная группа, которую можно отожд-ествить с факторгруппой $\tilde{G}/Z_{\tilde{G}}$, а σ – (сильно непрерывное унитарное) неприводимое проективное представление группы G в некотором гильбертовом пространстве H .

Продолжим проективное представление σ до сквозного отображения группы $\tilde{G}$. По-лученное таким образом отображение снова является (сильно непрерывным унитар-ным) неприводимым проективным представлением группы G в том же гильбертовом пространстве H . По этой причине мы вправе считать, что исходная группа G односвяз-на. Таким образом, в дальнейшем полагаем $\tilde{G} = G$.

Поскольку группа G полупроста, связна и односвязна, то согласно теоремам 3.2 и 7.1 в [2] сильно непрерывное унитарное неприводимое проективное представление σ группы G порождено некоторым сильно непрерывным унитарным линейным представлением τ группы G в том же гильбертовом пространстве H по формуле (1), т.е.

$$\tau(g) \in \sigma(g) \quad \text{для любого } g \in G.$$

Рассмотрим ограничение представления τ на группу Z . Из неприводимости проективного представления σ следует, что представление τ также неприводимо. Следовательно, ограничение представления τ на Z состоит из операторов, кратных единичному. Таким образом, это ограничение определяет унитарный характер θ группы Z .

Согласно теореме 2 существует такой (непрерывный унитарный) характер χ группы Z_{K_T} , композиция которого с псевдохарактером Гизарде–Вигнера φ имеет ограничение на центр Z , совпадающее с характером θ . Рассмотрим отображение

$$\lambda = \overline{(\chi \circ \varphi)},$$

где черта означает комплексное сопряжение, и введем произведение

$$\rho = \lambda\tau. \quad (3)$$

Это отображение ρ группы G в группу $U(H)$ сильно непрерывно как произведение непрерывной числовой функции на сильно непрерывную операторнозначную функцию.

Докажем теперь, что для любой группы G , любого ограниченного представления τ группы G в банаховом пространстве, любого псевдохарактера φ группы G и любого вещественного числа α отображение $\rho = \lambda\tau$, где $\lambda(g) = \exp(i\alpha\varphi(g))$ для всех $g \in G$, является чистым псевдопредставлением группы G . Так как τ – ограниченное представление, а φ – псевдохарактер, то при $g, h \in G$ с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$\|\rho(gh) - \rho(g)\rho(h)\| = \|\lambda(gh) - \lambda(g)\lambda(h)\| \leq M |\exp(i\alpha(\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h))) - 1|,$$

если $\|\tau(g)\| \leq M$ для всех $g \in G$ и $\chi(x) = \exp(ix)$, $x \in \mathbb{R}$, при нашем отождествлении группы Z_{K_T} с $\mathbb{R}$. В частности, отсюда следует, что если

$$|\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h)| \leq C \quad \text{при всех } g, h \in G,$$

то

$$\|\rho(gh) - \rho(g)\rho(h)\| \leq M |\exp(iC\alpha) - 1| \quad \text{при всех } g, h \in G.$$

Кроме того, поскольку ограничение любого псевдохарактера φ на любую аменабельную подгруппу является обычным гомоморфизмом (см., например, [9], [11]), ограничение произведения $\rho = \lambda\tau$ на любую аменабельную подгруппу является обычным гомоморфизмом, т.е. представлением этой аменабельной подгруппы. Таким образом, ρ – чистое псевдопредставление группы G .

От общей ситуации вернемся к ситуации, рассматриваемой в теореме. По построению, псевдопредставление ρ сильно непрерывно и значение псевдопредставления ρ на

любом элементе центра Z группы G есть единичный оператор в пространстве H представления τ группы G .

Вообще говоря, если G – группа, ρ – чистое псевдопредставление группы G в пространстве H и K – такая подгруппа группы G , что $\rho(k) = 1_H$, то отсюда не следует, что псевдопредставление ρ постоянно на классах сопряженных элементов по подгруппе K , поскольку под действием псевдопредставления ρ произведение элементов не обязательно переходит в произведение образов сомножителей. Примером такого псевдопредставления является одномерное отображение вида

$$\omega(g) = \exp(i\alpha\chi(g)), \quad g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

где χ – псевдохарактер на группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, определенный символом Радемахера [12]. Поэтому для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что утверждение о постоянстве псевдопредставления на классах смежности по подгруппе справедливо, если рассматриваемая подгруппа есть центр группы. Мы оформим этот факт в виде леммы и докажем несколько более общее утверждение, чем то, которое необходимо в доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА. Пусть G – группа, ρ – чистое псевдопредставление группы G в пространстве H , N – замкнутый разрешимый нормальный делитель в группе G . Если $\rho(n) = 1_H$ для любого $n \in N$, то

$$\rho(gn) = \rho(g) \quad \text{для любого } g \in G \text{ и любого } n \in N. \quad (4)$$

Убедимся в том, что эта лемма позволяет завершить доказательство теоремы 1. Действительно, если соотношение (4) выполнено для $N = Z$, то построенное выше псевдопредставление ρ постоянно на классах смежности по центру Z , и тогда из (3) и (4) получим искомое соотношение

$$\rho(gZ) \in \sigma(g) \quad \text{для любого } g \in G.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае, чистое псевдопредставление ρ можно рассматривать как сквозное отображение, определенное некоторым отображением факторгруппы группы G по ее центру, и это отображение автоматически оказывается сильно непрерывным чистым псевдопредставлением этой факторгруппы.

Итак, нам осталось доказать лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для любого элемента $g \in G$ рассмотрим алгебраическую подгруппу S_g группы G , порожденную элементом g и разрешимым нормальным делителем N группы G . Поскольку каждый внутренний автоморфизм группы G сохраняет N , то и каждый внутренний автоморфизм группы S_g сохраняет N , и поэтому группа N является нормальным делителем в S_g . Факторгруппа S_g/N монотетична, в частности, абелева, и, так как N разрешима, то и группа S_g разрешима. В частности, группа S_g аменабельна. По построению отображения ρ ограничение этого отображения на подгруппу S_g является обычным линейным представлением этой группы. Следовательно, в частности,

$$\rho(gn) = \rho(g)\rho(n) = \rho(g) \quad \text{для любого } g \in G \text{ и любого } n \in N,$$

поскольку $\rho(n) \equiv 1_H$ для любого $n \in N$ по условию, наложенному на отображение ρ . Это доказывает справедливость формулы (4), завершает доказательство леммы а, как мы видели выше, тем самым и теоремы 1.

4. Заключительные замечания. Интересно, справедлив ли аналог теоремы 1 для простых некомпактных групп Ли, не являющихся эрмитовыми. Для выяснения этого вопроса необходима другая техника. Дело в том, что простые некомпактные группы Ли, не являющиеся эрмитовыми, не имеют нетривиальных непрерывных псевдохарактеров [9], и если ограничение лифтинга (неприводимого представления универсальной накрывающей группы) на центр нетривиально, то нет возможности его тривиализировать путем домножения этого неприводимого представления на подходящий непрерывный псевдохарактер.

Кроме того, представляет несомненный интерес структура чистых псевдопредставлений симплектической группы, связанных с метаплектическим представлением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
- [2] Bargmann V. On unitary ray representations of continuous groups // *Ann. of Math.* (2). 1954. V. 59. № 1. P. 1–46.
- [3] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // *Функцион. анализ и его прилож.* 1991. Т. 25. № 2. С. 70–73.
- [4] Shtern A. I. Quasi-symmetry. I // *Russian J. Math. Phys.* 1994. V. 2. № 3. P. 353–382.
- [5] Штерн А. И. Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений // *Матем. заметки.* 2003. Т. 73. № 3. С. 478–490.
- [6] Shtern A. I. Projective irreducible unitary representations of Hermitian symmetric simple Lie groups are generated by pure pseudorepresentations // *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*. 2004. V. 9. № 1. P. 1–6.
- [7] Штерн А. И. Устойчивость представлений и псевдохарактеры // *Доклад на Ломоносовских чтениях.* М.: МГУ, 1983.
- [8] Shtern A. I. A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional // *Acta Appl. Math.* 2001. V. 68. № 1–3. P. 105–121.
- [9] Штерн А. И. Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп // *Функцион. анализ и его прилож.* 2001. Т. 35. № 4. С. 67–80.
- [10] Shtern A. I. Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications // *Russian J. Math. Phys.* 2001. V. 8. № 1. P. 115–126.
- [11] Shtern A. I. Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups // *Ann. Global Anal. Geom.* 2001. V. 20. № 3. P. 199–221.
- [12] Штерн А. И. Псевдохарактер, определенный символом Радемахера // *УМН.* 1990. Т. 45. № 4. С. 197–198.