Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Соколов, Об аппроксимируемости конечными p -группами свободных произведений групп с нормальным объединением, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 125–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:09:55

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p -ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Е. В. Соколов

Получено достаточное условие аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ конечных p -групп свободного произведения $G = (A * B; H)$ групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H . С его помощью доказано, что если A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}$ -аппроксимируемых групп при помощи $\mathcal{F}_p$ -групп, где $\mathcal{N}$ обозначает класс конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, и H является нормальной p' -изолированной полициклической подгруппой, то группа G аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$, как только $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой является факторгруппа $G/H^p H'$.

Библиография: 10 названий.

1. Формулировка результатов. Напомним, что *свободным произведением* групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi: H \rightarrow K$, называется группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$, задаваемая образующими и определяющими соотношениями групп A и B , а также всеми соотношениями вида $h = h\varphi$, где элемент h пробегает подгруппу H . Как известно, группы A и B вкладываются в группу G , поэтому их можно считать ее подгруппами. При этом подгруппы H и K оказываются совпадающими, что позволяет записывать группу G в виде $G = (A * B; H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H (считая изоморфизм φ заданным). Введенные обозначения мы будем предполагать фиксированными на протяжении всей работы.

Напомним далее, что согласно общему определению А. И. Мальцева [1] подгруппа Y некоторой группы X называется *отделимой в классе групп $\mathcal{K}$* , или, короче, *$\mathcal{K}$ -отделимой*, если для всякого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм ψ группы X на некоторую $\mathcal{K}$ -группу такой, что $x\psi \notin Y\psi$. Если мы возьмем здесь в качестве Y единичную подгруппу, то получим определение *аппроксимируемости* группы X в классе $\mathcal{K}$ (*$\mathcal{K}$ -аппроксимируемости*).

В настоящей работе речь идет об аппроксимируемости группы $G = (A * B; H)$ классами $\mathcal{F}$ всех конечных групп и $\mathcal{F}_p$ всех конечных p -групп. Традиционно эти свойства изучаются при тех или иных ограничениях, накладываемых на свободные множители A , B и, в особенности, на объединенную подгруппу. Здесь рассматривается ситуация, когда подгруппа H является “почти нормальной” в группе G , т.е. содержит подгруппу конечного индекса, нормальную в группах A и B .

Если X – некоторая группа, то через $\Omega(X)$ и $\Omega_p(X)$ мы будем обозначать семейства всех нормальных подгрупп группы X , имеющих в ней, соответственно, конечный индекс и конечный p -индекс. В работе [2] Р.Б. Д. Т. Олленби и Р.С. Грегорах показали, что обобщенное свободное произведение $G = (A * B; H)$ двух почти полициклических групп аппроксимируется классом $\mathcal{F}$, как только семейство $\Omega(H)$ содержит подгруппу, нормальную во всей группе G . Повторяя почти дословно их рассуждение, мы приходим к следующему более общему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}$ -аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega(H)$ являются $\mathcal{F}$ -отделимыми в этих группах. Если каждая подгруппа $M \in \Omega(H)$ содержит подгруппу $L \in \Omega(H)$, нормальную в G , то группа G $\mathcal{F}$ -аппроксимируема.*

Попытаемся теперь получить аналогичное условие аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{F}_p$. Ситуация здесь оказывается сложнее, поскольку в доказательстве теоремы 1 использовался тот факт, что свободное произведение $\mathcal{F}$ -аппроксимируемых групп с конечным объединением всегда является $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой группой. Для класса $\mathcal{F}_p$ это уже не так: даже свободное произведение двух конечных p -групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группой, как показывает следующий

ПРИМЕР. Пусть $H = \langle a; a^2 = 1 \rangle \times \langle b; b^2 = 1 \rangle$, $\alpha, \beta \in \text{Aut}(H)$, $a\alpha = b$, $b\alpha = a$, $a\beta = ab$, $b\beta = b$. Пусть также $A = \langle \alpha \rangle H$ и $B = \langle \beta \rangle H$ – подгруппы голоморфа группы H и $G = (A * B; H)$ (изоморфизм φ здесь является тождественным отображением). Предположим, что группа G $\mathcal{F}_2$ -аппроксимируема и, следовательно, существует гомоморфизм ψ этой группы на конечную 2-группу, инъективный на множестве $A \cup B$.

Заметим, что произвольная конечная p -группа F является нильпотентной и, как легко видеть, обладает некоторым нормальным рядом, все факторы которого имеют порядок p . В силу теоремы Шрайера любой нормальный ряд группы F может быть уплотнен до ряда с такими свойствами.

Отсюда вытекает, что подгруппа $H\psi$, нормальная в группе $G\psi$, должна содержать нормальную и, следовательно, центральную циклическую подгруппу порядка 2. Непосредственная проверка показывает, что это невозможно и, таким образом, группа G не является $\mathcal{F}_2$ -аппроксимируемой.

Вместе с тем Г. Хигмен в работе [3] получил критерий $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$ -групп, который без труда можно распространить на свободные произведения произвольных $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемых групп с конечным объединением. Поэтому все приводимые ниже результаты будут сводить задачу к вопросу о том, является ли $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемым то или иное свободное произведение с конечной объединенной подгруппой.

Для удобства обозначим через $\Sigma_p(H)$ семейство всех таких подгрупп из $\Omega_p(H)$, которые нормальны в группах A и B (а следовательно, и в группе G).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega_p(H)$ являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми в этих группах. Пусть также каждая подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$. Если существует такая подгруппа $Q \in \Sigma_p(H)$, что подгруппа $Q^p Q'$ имеет в ней конечный индекс и факторгруппа $G/Q^p Q'$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то группа G является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой.*

Сформулированная теорема представляет собой обобщение основных результатов работы [4]. Применяя ее к свободным произведениям с конечным объединением, мы получаем следующий критерий.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, подгруппа H конечна и нормальна в свободных множителях. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой является факторгруппа $G/H^p H'$.

Достаточность этого утверждения следует непосредственно из теоремы 2, для доказательства же необходимости заметим, что если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то этим свойством будет обладать и ее факторгруппа по конечной подгруппе $H^p H'$.

В действительности, условие теоремы 2 позволяет утверждать несколько большее, нежели $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость группы G .

Пусть X – некоторая группа; через $\Delta_p(X)$ мы будем обозначать семейство всех ее $\mathcal{F}_p$ -отделимых циклических подгрупп.

Легко видеть, что если подгруппа Y принадлежит семейству $\Delta_p(X)$, то все корни p' -степеней, извлекающиеся в группе X из ее элементов, должны снова принадлежать Y (здесь и далее p' обозначает множество всех простых чисел, не равных p). Подгруппу, обладающую этим свойством, называют p' -изолированной в группе X .

Таким образом, если X содержит хотя бы один элемент, порядок которого не является p -числом, то все циклические подгруппы группы X уже заведомо не будут $\mathcal{F}_p$ -отделимыми. Поэтому в качестве аналога свойства $\mathcal{F}$ -отделимости всех циклических подгрупп данной группы имеет смысл рассматривать утверждение об $\mathcal{F}_p$ -отделимости всех ее p' -изолированных циклических подгрупп. Мету отклонения группы X от этого условия характеризует семейство $\overline{\Delta}_p(X)$ всех p' -изолированных циклических подгрупп, не являющихся $\mathcal{F}_p$ -отделимыми.

Обратимся теперь к группе $G = (A * B; H)$. Очевидно, что если циклическая подгруппа группы A не является $\mathcal{F}_p$ -отделимой в A , то она не будет $\mathcal{F}_p$ -отделимой и во всей группе G . Отсюда следует, что $\overline{\Delta}_p(A) \subseteq \overline{\Delta}_p(G)$ и точно так же $\overline{\Delta}_p(B) \subseteq \overline{\Delta}_p(G)$.

Мы будем говорить, что семейство $\Delta_p(G)$ максимально, если оно содержит все p' -изолированные циклические подгруппы группы G , не сопряженные ни с какой подгруппой из семейства $\overline{\Delta}_p(A) \cup \overline{\Delta}_p(B)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. При выполнении условий теоремы 2 семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Отметим, что если группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, то максимальность семейства $\Delta_p(G)$ влечет за собой $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость группы G и, таким образом, теорема 4 представляет собой более сильное утверждение, нежели теорема 2.

В самом деле, если свободные множители являются $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемыми группами, то семейства $\Delta_p(A)$ и $\Delta_p(B)$ содержат единичную подгруппу. Ввиду максимальной эту подгруппу содержит и семейство $\Delta_p(G)$, поэтому группа G также является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой.

Оказывается, что в случае конечной объединенной подгруппы имеет место и обратное утверждение; оно вытекает из теоремы 4, если положить $Q = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если подгруппа H конечна и группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Применим теперь теорему 4 к обобщенным свободным произведениям групп, аппроксимируемых классом $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения.

В работе [5] установлено, что в $\mathcal{N}$ -аппроксимируемых группах все p' -изолированные полициклические подгруппы являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми. Используя стандартное рассуждение из [1], нетрудно показать, что аналогичный результат справедлив и для расширений групп указанного вида при помощи конечных p -групп [6].

ТЕОРЕМА 6. Пусть группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}$ -аппроксимируемых групп при помощи конечных p -групп, H является полициклической подгруппой, нормальной и p' -изолированной в свободных множителях. Если факторгруппа $G/H^p H'$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то все p' -изолированные циклические подгруппы группы G являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми и, в частности, группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Эта теорема представляет собой обобщение ряда результатов Д.Н. Азарова [7] и Г. Кима и С. Танга [8] об $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости свободных произведений с циклическим объединением, а также одного из утверждений работы [4]. Для ее доказательства нам необходимо лишь проверить, что произвольная подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит некоторую подгруппу из семейства $\Sigma_p(H)$.

Обозначим через n индекс подгруппы M в H . Поскольку группа H конечно порождена, она содержит лишь конечное число нормальных подгрупп индекса n . Следовательно, их пересечение L также имеет конечный индекс в H , являющийся к тому же p -числом. Остается заметить, что подгруппа L является характеристической в H и потому нормальной в группе G .

2. Достаточные условия максимальности семейства $\Delta_p(G)$. В работе [9] было получено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -отделима в этих группах, и пусть группа G удовлетворяет следующему условию:

$$\forall M \in \Omega_p(A) \quad \forall N \in \Omega_p(B) \quad \exists L \in \Omega_p(G) \quad (L \cap A \leq M \wedge L \cap B \leq N). \quad (1)$$

Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Сейчас мы покажем, что условие (1) этого предложения можно несколько ослабить.

Нормальный ряд конечной p -группы будем называть *главным*, если все его факторы – циклические группы порядка p . С учетом этого определения упомянутый ранее критерий Хигмена [3] $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$ -групп выглядит следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A и B – конечные p -группы. Группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда существуют главные ряды

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_m = A, \quad 1 = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = B$$

групп A и B такие, что множества подгрупп $\{A_i \cap H\}$ и $\{B_j \cap H\}$ совпадают.

Рассматривая пример выше, мы уже отмечали, что каждая конечная p -группа F обладает главным рядом и что произвольный нормальный ряд группы F может быть уплотнен до главного. Из последнего замечания и предложения 2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A и B – конечные p -группы, и пусть существуют нормальные ряды

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = A, \quad 1 = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = B$$

групп A и B такие, что $A_i \cap H = B_i \cap H$ и порядки всех факторов $A_{i+1} \cap H / A_i \cap H$ делят p . Тогда группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Действительно, поскольку порядок фактора $A_{i+1} \cap H / A_i \cap H$ делит p , для всякой подгруппы U такой, что $A_i \leq U \leq A_{i+1}$, пересечение $U \cap H$ должно совпадать либо с подгруппой $A_i \cap H$, либо с подгруппой $A_{i+1} \cap H$. Точно так же, если $B_i \leq V \leq B_{i+1}$, то $V \cap H = B_i \cap H$ или $V \cap H = B_{i+1} \cap H$. Таким образом, любые уплотнения исходных нормальных рядов групп A и B удовлетворяют условию предложения 2 и группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Теперь мы можем, наконец, привести несколько иную формулировку предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -отделима в этих группах, и пусть группа G удовлетворяет следующему условию:

$$\forall Q \in \Omega_p(H) \quad \exists L \in \Omega_p(G) \quad (L \cap H \leq Q). \quad (2)$$

Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Для доказательства нам в силу предложения 1 достаточно проверить, что для любых подгрупп $M \in \Omega_p(A)$ и $N \in \Omega_p(B)$ найдется подгруппа $U \in \Omega_p(G)$, удовлетворяющая соотношениям $U \cap A \leq M$ и $U \cap B \leq N$.

Обозначим пересечение $M \cap N \cap H$ через Q и, пользуясь условием (2), выберем подгруппу $L \in \Omega_p(G)$ таким образом, чтобы $L \cap H \leq Q$.

Пусть $1 = G_0/L \leq G_1/L \leq \dots \leq G_n/L = G/L$ – некоторый главный ряд факторгруппы G/L . Положим $R_0 = L \cap M$, $S_0 = L \cap N$ и $R_i = G_i \cap A$, $S_i = G_i \cap B$, где $i = 1, 2, \dots, n$. В результате мы получим неубывающие последовательности нормальных подгрупп конечного p -индекса $R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_n = A$ и $S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n = B$, удовлетворяющие соотношениям $R_i \cap H = S_i \cap H = L_i \cap H$ для любого $i \geq 0$.

Напомним, что через K мы обозначали образ подгруппы H относительно изоморфизма φ . Условие $R \cap H = S \cap H$ означает, что $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Поэтому отображение $\varphi_{R,S}: HR/R \rightarrow KS/S$, ставящее в соответствие элементу hR , $h \in H$, элемент $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Стало быть, мы можем построить группу

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \varphi_{R,S}).$$

Заметим еще, что естественные гомоморфизмы группы A на A/R и группы B на B/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

Очевидно, что подгруппы $R_i\rho_{R,S}$ и $S_i\rho_{R,S}$ образуют в группах A/R и B/S нормальные ряды, удовлетворяющие условию предложения 3. Поэтому группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, и мы можем найти подгруппу $U_{R,S} \in \Omega_p(G_{R,S})$, тривиально пересекающуюся со свободными множителями.

Обозначая через U прообраз подгруппы $U_{R,S}$ относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$, мы видим, что $U \cap A = R \leq M$ и $U \cap B = S \leq N$, т.е. подгруппа U искомая.

3. Доказательство теоремы 4. Если X – некоторая группа и Y – нормальная подгруппа группы X , то ограничение на подгруппу Y произвольного внутреннего автоморфизма группы X представляет собой некоторый автоморфизм группы Y . Подгруппу группы $\text{Aut}(Y)$, составленную из всех таких автоморфизмов, мы будем обозначать $\text{Aut}_X(Y)$.

Легко видеть, что отображение $\alpha_Y: X \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ автоморфизм группы Y , индуцированный внутренним автоморфизмом $\hat{x}$ группы X , гомоморфно. Ядро этого гомоморфизма совпадает с централизатором подгруппы Y в группе X .

Нетрудно показать также, что в $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группе централизатор произвольного множества элементов является $\mathcal{F}_p$ -отделимой подгруппой. Поэтому, если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то для любой подгруппы $Q \in \Sigma_p(H)$ группа $\text{Aut}_G(Q)$ является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой. Хигмен в работе [3] показал, что наоборот, если A и B – конечные p -группы, подгруппа H нормальна в свободных множителях A , B и $\text{Aut}_G(H)$ является p -группой, то группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Обобщением этого результата является

ЛЕММА 1 [4]. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega_p(H)$ являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми в свободных множителях. Если семейство $\Sigma_p(H)$ содержит такую подгруппу Q , что факторгруппа G/Q $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема и $\text{Aut}_G(Q)$ является конечной p -группой, то группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Если X – некоторая группа, Y – ее характеристическая подгруппа, то произвольный автоморфизм группы X индуцирует некоторый автоморфизм группы Y . Легко видеть, что отображение $\beta_Y: \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y)$, переводящее элемент $\sigma \in \text{Aut}(X)$ в его ограничение на подгруппу Y , гомоморфно. В работе Якушева [10] доказана

ЛЕММА 2. Пусть X – конечная p -группа, $\sigma \in \text{Aut}(X)$. Порядок автоморфизма σ является p -числом тогда и только тогда, когда p -числом является порядок индуцированного им автоморфизма факторгруппы $X/X^p X'$.

Непосредственная проверка показывает, что справедлива также

ЛЕММА 3. Пусть Y – нормальная подгруппа группы X , Z – характеристическая подгруппа группы Y , $\alpha_Y: X \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$ и $\alpha_{Y/Z}: X/Z \rightarrow \text{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$ – определенные выше гомоморфизмы, ε – естественный гомоморфизм группы X на факторгруппу X/Z , $\beta_Z: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(Y/Z)$ – гомоморфизм индуцирования. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_Y} & \text{Aut}_X(Y) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \beta_Z \\ X/Z & \xrightarrow{\alpha_{Y/Z}} & \text{Aut}(Y/Z) \end{array} \quad .$$

В частности, образ группы $\text{Aut}_X(Y)$ относительно гомоморфизма β_Z совпадает с подгруппой $\text{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$.

Перейдем теперь собственно к доказательству теоремы.

Пусть M – произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$. В силу предложения 4 нам достаточно показать, что существует подгруппа $N \in \Omega_p(G)$, удовлетворяющая соотношению $N \cap H \leq M$.

По условию подгруппа $M \cap Q$ содержит некоторую подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$. Так как группы G/Q и $G/Q^p Q' L$ получаются из $G/Q^p Q'$ факторизацией по конечным и, следовательно, $\mathcal{F}_p$ -отделимым подгруппам, то обе они $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы. Покажем, что $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой является и факторгруппа $G_1 = G/L$.

В силу леммы 1 нам достаточно убедиться в том, что (конечная) группа $\text{Aut}_{G_1}(Q_1)$, где $Q_1 = Q/L$, является p -группой. Лемма 2 утверждает, что это верно тогда и только тогда, когда p -группой является ее образ относительно гомоморфизма индуцирования β_T , где $T = Q_1^p Q'_1 = Q^p Q' L/L$. Но в соответствии с леммой 3 этот образ совпадает с группой $\text{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$.

Факторгруппа G_1/T изоморфна группе $G_2 = G/Q^p Q' L$, и этот изоморфизм индуцирует изоморфизм групп $\text{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$ и $\text{Aut}_{G_2}(Q_2)$, где $Q_2 = Q/Q^p Q' L$. Так как G_2 – $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа, то $\text{Aut}_{G_2}(Q_2)$ является p -группой.

Таким образом, группа G/L $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема и потому существует подгруппа $N/L \in \Omega_p(G/L)$ такая, что $N/L \cap H/L = 1$. Отсюда $N \cap H = L \leq M$, и доказательство на этом закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
- [2] Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes in Math. 1973. V. 319. P. 9–17.
- [3] Higman G. Amalgams of p -groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
- [4] Соколов Е. В. Об аппроксимируемости конечными p -группами некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2002. Т. 3. № 1. С. 97–102.
- [5] Соколов Е. В. Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π -групп // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 6. С. 904–909.
- [6] Соколов Е. В. Об отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Деп. ВИНТИ 12.07.2002 № 1325-B2002. Иваново: Ивановский гос. ун-т, 2002.
- [7] Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 3–8.
- [8] Kim G., Tang C. Y. On generalized free products of residually finite p -groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.
- [9] Sokolov E. V. On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. V. 11. P. 27–38.
- [10] Якушев А. В. Аппроксимируемость конечными p -группами расщепляющихся расширений групп // Научн. труды Ивановского гос. ун-та. Матем. 2000. № 3. С. 119–124.

Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
11.06.2004