Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, Случайные линейные комбинации функций из L_1 , *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 192–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:38:17

СЛУЧАЙНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ФУНКЦИЙ ИЗ L_1

П. Г. Григорьев

Работа посвящена исследованию свойств полиномов со случайными коэффициентами по общим системам суммируемых функций. Получены нижние оценки математического ожидания равномерной и так называемой интегрально-равномерной нормы случайного полинома.

Библиография: 25 названий.

1. Введение

Статья посвящена исследованию случайных полиномов (линейных комбинаций со случайными коэффициентами) следующего вида:

$$F_n(\omega, x) := \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) f_i(x), \quad (1)$$

где $\{f_i\}_1^n$ – некоторая система функций на пространстве с мерой (X, μ) , $\{\xi_i\}_1^n$ – набор независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{P})$ (“случайные коэффициенты”). Нас будут интересовать свойства случайной величины $\|F_n(\omega, \cdot)\|_{B(X)}$, где $\|\cdot\|_B$ – норма в некотором пространстве B функций на (X, μ) .

Заметим, что при $B = L_\infty$ сформулированная выше задача превращается в классическую задачу оценки математического ожидания супремума случайного полинома вида (1). Салемом и Зигмундом [1] в 1954 г. было доказано, что

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=-n}^n r_k(\omega) e^{ikx} \right\|_\infty \equiv \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{знакам } \varepsilon_k = \pm 1}} \left\| \sum_{k=-n}^n \varepsilon_k e^{ikx} \right\|_\infty \asymp \sqrt{n \log n}, \quad (2)$$

где $r_k(\omega) = \text{sign} \sin(2^{k+1} \pi \omega)$ – функции Радемахера на $[0, 1]$, $\mathbb{E}$ – оператор математического ожидания. В то же время из неравенства Хинчина вытекает, что

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=-n}^n r_k(\omega) e^{ikx} \right\|_p \asymp_p \sqrt{n}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Этот факт показывает качественное различие вложений пространства тригонометрических полиномов порядка не выше n в L_∞ и в L_p при $p < \infty$.

Работа поддержана грантом НШ-№ 1549.2003.1 и Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 02-01-00315.

К настоящему моменту получен ряд оценок равномерной нормы случайных полиномов вида (1) с различными ограничениями на $\{\xi_i\}_1^n$ и $\{f_i\}_1^n$. Отметим, что верхние оценки давно нашли разнообразные приложения в анализе и теории вероятностей, приложения нижних оценок далеко не так многочисленны. Однако именно доказательство нижних оценок наиболее трудоемко и обычно требует привлечения специфических свойств систем $\{f_i\}$ и $\{\xi_i\}$. Так, для доказательства нижней оценки в соотношении (2) в [1] фактически было использовано то, что тригонометрическая система является системой характеров (т.е. использовались тригонометрические формулы типа $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$), а также экспоненциальная оценка для функций Радемахера. В [2] приведено короткое доказательство нижней оценки равномерной нормы случайного полинома $\sum_k \xi_k \cos kx$, где $\{\xi_k\}$ – независимые гауссовские величины, которое использует то, что матрица

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} jk \right)_{j,k=0}^{n-1}$$

кратна ортогональной, и то, что некоррелированные гауссовские величины независимы. В доказательстве верхних оценок условия на систему $\{f_i\}$ как правило существенно слабее. Так, обычно, если для математического ожидания нормы полинома вида (1) по системе $\{f_i\}_1^n$ выполнена некоторая верхняя оценка, то она имеет место и в том случае, если мы заменим в выражении (1) функции f_i их абсолютными величинами $|f_i|$. В настоящей работе, продолжающей работу [3], получена нижняя оценка равномерной нормы случайных полиномов (1) по абстрактной системе функций $\{f_i\}_1^n$ из L_1 .

В монографиях [4], [5] излагается обширная теория, позволяющая получать оценки математического ожидания равномерной нормы случайного полинома (1) в том случае, когда система $\{f_i\}$ является системой характеров на локально-компактной абелевой группе, ограниченной на некоторую компактную окрестность V единичного элемента этой группы. Основным методом получения оценок максимума случайного процесса (в частности, случайного полинома вида (1)) в [4], [5] служит сведение задачи к оценке ε -энтропии V относительно некоторой метрики, индуцируемой этим случайным процессом. Этот метод был впервые использован Дадли [6] и Судаковым [7], [8] и позднее развит Ферником, Маркусом, Пизье, Талаграном и другими авторами (см. подробнее [4], [5], [9], [10]). Для доказательства нижних оценок максимума случайного процесса этим методом ключевое значение имеет лемма Слепяна [11] для гауссовских векторов. Эта лемма позволяет оценивать снизу вероятность

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{i=1}^n \xi_i f_i(x_k) \geq \alpha \right\}, \quad \{x_k\}_1^m \text{ – некоторая сетка в } X,$$

в том случае, когда *все* нормированные скалярные произведения (косинусы углов)

$$\frac{(W_{x_j}, W_{x_k})}{|W_{x_j}| \cdot |W_{x_k}|}, \quad j \neq k, \quad \text{для векторов } W_{x_j} := (f_i(x_j))_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

достаточно малы, а $\{\xi_i\}$ – независимые стандартные гауссовские величины. Доказательство существования такой сетки $\{x_j\}$ представляет в ряде случаев отдельную нетривиальную задачу. Кроме того, поскольку лемма Слепяна применима лишь к гауссовским векторам, возникают серьезные трудности с перенесением оценок для случайных полиномов с гауссовскими коэффициентами на случай негауссовских $\{\xi_i\}$.

В 1995 г. Кашиным и Цаффрири в работах [12]–[14] был предложен другой метод получения нижних оценок равномерной нормы случайных полиномов. В частности, в [12] было показано, что нижняя оценка в теореме Салема–Зигмунда (2) остается справедливой для случайных полиномов по *любой* ортонормированной равномерно ограниченной в L_3 системе. Этот метод опирается на версию двумерной центральной предельной теоремы с оценкой остаточного члена. При этом уже не требуется оценивать *все* попарные углы между векторами W_{x_j} , а достаточно показать, что косинусы этих углов *малы в среднем*.

В [13] Кашин и Цаффрири ввели следующую норму:

$$\|f\|_{m,\infty} := \int_X \cdots \int_X \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\} d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_m), \quad (3)$$

где f – интегрируемая функция на пространстве с мерой (X, μ) , $\mu(X) = 1$. Следуя работам автора [15], [3], будем называть норму $\|f\|_{m,\infty}$ *интегрально-равномерной* нормой. При доказательстве нижних оценок математического ожидания равномерной нормы случайного полинома (1) в [12] и [14] фактически были получены аналогичные оценки для *интегрально-равномерной* нормы со значением параметра $m \asymp n^{1/2+\varepsilon}$. Стоит заметить, что оценки для $\|f\|_{m,\infty}$ (точнее для семейства норм с $m \geq 1$) представляют самостоятельный интерес, так как несут в себе довольно полную информацию о распределении функции f : $\lambda_f(t) = \mu\{x \in X : |f(x)| \geq t\}$. Так, нетрудно показать, что

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_0^\infty (1 - (1 - \lambda_f(t))^m) dt \quad (4)$$

и $\|f\|_1 \equiv \|f\|_{1,\infty} \leq \|f\|_{m,\infty} \leq \|f\|_\infty$, причем $\|f\|_{m,\infty} \rightarrow \|f\|_\infty$ при $m \rightarrow \infty$. В разделе 2 (теорема 2) будет показано, что

$$\|f\|_{m,\infty} \asymp \sup_{\substack{\Delta \subset X \\ \mu\Delta=1/m}} \left\{ m \int_\Delta |f| d\mu \right\},$$

если при $m = 1, 2, \dots$ в X существует подмножество меры $1/m$.

Автором в [3] с помощью несложной модернизации метода, предложенного в [12], [14], была доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Для произвольных значений параметров $p \in [0, 1/2)$, $R, M, \varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные $q = q(p)$, $C_j = C_j(p, M, \varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, такие, что для произвольных наборов функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ и случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, определенных на вероятностных пространствах (X, μ) и (Ω, P) соответственно, и комплексных коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям

- $\|f_i\|_2 = 1$ и $\|f_i\|_{2+\varepsilon} \leq M$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- $\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_2 \leq MR^p (\sum_{i=1}^n |c_i|^2)^{1/2}$ для всех наборов коэффициентов $\{c_i\}_1^n$, где $R \equiv R(\{a_i\}_1^n) := (\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^2 / \sum_{i=1}^n |a_i|^4$;
- $\{\xi_i\}_1^n$ – независимые случайные величины такие, что $E\xi_i = 0$, $E|\xi_i|^2 = 1$ и $(E|\xi_i|^{2+\varepsilon}) \leq M$,

справедливо неравенство¹

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left\| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\omega) f_i \right\|_{m, \infty} \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \log P \right)^{1/2} \right\} \leq \frac{C_2}{P^q}, \quad (5)$$

где $P = \min(m, R) + 1$, $R = R(\{a_i\})$, из условия (b), и, следовательно,²

$$E \left\| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \geq C_3 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \log P \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Теорема А является несложным обобщением результатов из [12]–[14], где оценивалась $\|\cdot\|_{\infty}$ -норма случайных полиномов. Там оценки типа (5), (6) для равномерной нормы были получены в случае $p = 0$ и было замечено, что при $a_i \equiv 1$ их можно обобщить на случай $p \in [0, 1/2)$, а также отмечено, что установленные оценки имеют место и для интегрально-равномерной нормы случайного полинома с параметром $m \asymp R^{1/2}$.

Таким образом, оценка типа (6) может быть неверна только для случайного полинома по системе нормированных в L_2 функций $\{f_i\}$, существенно отличающейся от ортогональной, такой, например, как последовательность функций, сходящаяся к некоторой фиксированной функции.

Заметим, что в случае $a_i \equiv 1$ ($R(\{a_i\}) = n$) с помощью леммы 1 (см. ниже) легко вывести условие (b) для функций $\{f_i\}$ таких, что $\|f_i\|_2 = 1$, из следующего условия

$$(b') \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_2 \leq M n^{1/2+\beta} \text{ для всех наборов знаков } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ с некоторыми } \beta \in [0, 1/2), M > 0.$$

В [3] было также показано, что при $m \leq R$ и некоторых дополнительных ограничениях на $\{\xi_k\}_1^n$ нижняя оценка (6) точна по порядку (при $n \rightarrow \infty$). Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА В. Пусть $\{\xi_k\}_1^n$ – набор случайных величин, для которых справедлива экспоненциальная оценка

$$P\left\{\left| \sum_{k=1}^n c_k \xi_k \right| > t \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2} \right\} \leq C_4 e^{-t^2 C_5}$$

для всех наборов коэффициентов $\{c_k\}_1^n$ с некоторыми константами $C_4, C_5 > 0$. Тогда для всех наборов функций $\{f_k\}_1^n \subset L_1(X, \mu)$, $\mu X = 1$, при любом $m \geq 1$ имеет место неравенство

$$E \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k f_k \right\|_{m, \infty} \leq C_6 \left\| \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{m, \infty} \cdot \sqrt{1 + \log m}$$

с некоторой константой $C_6(C_4, C_5)$.

¹Можно показать, что степенной параметр q можно выбрать произвольно из интервала $(0, (1-2p)/2)$, при этом константы C_1, C_2, C_3 могут зависеть от выбора q . Для случая $q = (1-2p)/4$ аккуратное доказательство оценки (5) можно найти в [16].

²При малых m или R неравенство (6) доказывается непосредственно с помощью неравенств Хинчина, Гёльдера и тривиальной оценки $\|\cdot\|_{m, \infty} \geq \|\cdot\|_1$.

Отметим, что условие равномерной ограниченности функций $\{f_i\}$ в $L_{2+\varepsilon}$, входящее в условия теоремы А, для выполнения *нижних* оценок типа (5), (6) выглядит довольно неестественно. Дело здесь, грубо говоря, в том, что равномерная ограниченность системы функций в $L_{2+\varepsilon}$ наряду с ее ортонормируемостью (или условием (b')) при $\|f_i\|_2 = 1$ обеспечивают “достаточно сильное” пересечение “существенных” носителей функций f_i . Чтобы убедиться, что условие равномерной ограниченности не может быть просто отброшено из условия теоремы А, достаточно рассмотреть пример системы функций $f_i := \sqrt{n} \chi_i$, где χ_i – характеристические функции интервалов $((i-1)/n, i/n)$.

Основной целью данной работы является обобщение теоремы А в частном случае $a_i \equiv 1$ для случайных полиномов вида (1) по системам функций $\{f_i\}_1^n$, $\|f_i\|_1 = 1$, вообще говоря, неограниченным в L_p при $p > 1$. При этом вместо условий (a), (b') требуется выполнение условия

$$(d) \|f_i\|_1 = 1 \text{ для всех } i = 1, \dots, n \text{ и } \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i \right\|_1 \leq M n^{1/2+p} \text{ для всех наборов знаков } \{\theta_i\}_1^n, \theta_i = \pm 1,$$

с некоторыми постоянными $p \in [0, 1/12)$, $M > 0$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть система функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ на вероятностном пространстве (X, μ) удовлетворяет условию (d), причем $p \in [0, 1/12)$, а независимые случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, определенные на другом вероятностном пространстве (Ω, P) таковы, что $E\xi_i = 0$, $E|\xi_i|^2 = 1$ и $E|\xi_i|^3 \leq M^3$. Тогда при любом $m \leq n$ для случайного полинома (1) имеет место неравенство

$$P\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega, x)\|_{m, \infty} \leq C'_1 \sqrt{n \cdot (1 + \log m)}\} \leq C'_2 m^{-q'}, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \geq C'_3 (n \cdot (1 + \log m))^{1/2} \quad (8)$$

с некоторыми константами $q' = q'(p) > 0$, $C'_j = C'_j(p, M) > 0$, $j = 1, 2, 3$, зависящими только от p и M .

(В случае малых m неравенство (8) доказывается непосредственно с помощью неравенства Хинчина.)

Этот результат является новым не только для интегрально-равномерной нормы, но и для равномерной нормы случайных полиномов вида (1). Справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функции $\{f_i\}_1^n$ и случайные величины $\{\xi_i\}_1^n$ удовлетворяют условию теоремы 1. Тогда для случайного полинома (1) справедлива оценка

$$P\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega, x)\|_{\infty} \leq C'_1 \sqrt{n \cdot (1 + \log n)}\} \leq C'_2 n^{-q'}.$$

Заметим, что теорема 1 слабее теоремы А в том аспекте, что она не может быть применена к случайным полиномам вида $\sum_k a_k \xi_k(\omega) f_k(x)$ с произвольными неслучайными коэффициентами $\{a_i\}$, а также тем, что требует выполнения условия (d) с параметром $p < 1/12$, в то время как в аналогичном условии теоремы А (усл. (b) при $a_i \equiv 1$ или (b')) достаточно ограничения $p < 1/2$. Автор считает, что условие $p < 1/12$ можно ослабить³ (см. ниже гипотезу 2).

³Свойство (d) с параметром $p = 1/2$ очевидно выполнено для *всех* систем функций $\{f_i\}_1^n$, $\|f_i\|_1 = 1$. В том числе и для $f_i \equiv 1$, для которых, в силу неравенства Хинчина, L_{∞} -норма ограничена сверху по порядку $\sqrt{n}$. Поэтому, пытаться доказать оценки типа (7), (8) можно только для случая $p < 1/2$.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 2 мы докажем несколько вспомогательных результатов, которые в явной или неявной форме были использованы в работах [12], [14], [3]. Эти вспомогательные результаты позволяют легче понять идею метода оценки норм случайных полиномов, развитого в [12], [14], [3], а также получить обобщения теоремы А с конкретными значениями степенного параметра q (см. сноску 1 и замечание 2 ниже). В разделе 3 мы завершим доказательство теоремы 1. В разделе 4 показано, как с помощью результатов раздела 3 можно частично ответить на вопрос, поставленный Монтгомери-Смитом и Семеновым в [17], а также сформулированы гипотезы относительно потенциальных обобщений теоремы 1.

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю Б. С. Капину, под руководством которого были получены результаты настоящей статьи, а также благодарит А. М. Зубкова и Е. М. Семенова за ценные замечания и обсуждения.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Интегрально-равномерная норма. Покажем эквивалентность определений (3) и (4) интегрально-равномерной нормы. Известно, что для любой функции $g \in L_1(Y, \nu)$ имеет место $\|g\|_1 = \int_0^\infty \lambda_g(t) dt$, где $\lambda_g(t) := \nu\{y : |g(y)| \geq t\}$. Поэтому, чтобы обосновать эквивалентность (3) и (4), достаточно заметить, что функция

$$g(\bar{x}) = \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\}, \quad \bar{x} = (x_j)_1^m \in X^m =: Y,$$

обладает распределением $\lambda_g(t) = 1 - (1 - \lambda_f(t))^m$.

С помощью неравенства $\max(|a|, |b|) \leq |a| + |b|$ легко видеть, что

$$\|f\|_{m,\infty} \leq m\|f\|_1 \quad \text{и} \quad \|f\|_{n,\infty} \leq \frac{n+1}{m}\|f\|_{m,\infty} \quad \text{для всех } f \in L_1(X), \quad m \leq n. \quad (9)$$

Для индикатора χ_Δ множества $\Delta \subset X$ тождество (4) влечет $\|\chi_\Delta\|_{m,\infty} = 1 - (1 - |\Delta|)^m$ (здесь и далее обозначаем $|\Delta| \equiv \mu(\Delta)$). Таким образом, при $m \geq c|\Delta|^{-1}$ величина $\|\chi_\Delta\|_{m,\infty} \geq C'(c)$ с некоторой константой $C'(c) > 0$.

Для интегрируемой функции $f \in L_1$ определим следующие “родственные” нормы:

$$\|f\|_m^* := \sup_{\Delta \subset X} \left\{ \frac{1 - (1 - |\Delta|)^m}{|\Delta|} \int_\Delta |f| d\mu \right\}, \quad (10)$$

$$\|f\|'_m := \sup_{\substack{\Delta \subset X \\ \mu(\Delta) = 1/m}} \left\{ m \int_\Delta |f| d\mu \right\}. \quad (11)$$

Правая часть (11) корректно определена, только если существует событие $e \subset X$ такое, что $\mu(e) = 1/m$. Однако мы будем использовать эту норму, только когда $X = [0, 1]$ со стандартной мерой Лебега.

Нормы $\|\cdot\|_m^*$ и $\|\cdot\|'_m$ эквивалентны $\|\cdot\|_{m,\infty}$ -норме, это вытекает из следующего результата, в неявной форме полученного автором в [3].

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $f \in L_1[0, 1]$ имеют место неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \|f\|'_m \leq \|f\|_m^* \leq \|f\|_{m,\infty} \leq 2\|f\|'_m. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $2\|f\|'_m \geq \|f\|_{m,\infty}$. Пусть множество $\Delta^* \subset [0, 1]$ таково, что $|\Delta^*| = 1/m$ и

$$m \int_{\Delta^*} |f| = \|f\|'_m.$$

(Легко видеть, что такое Δ^* существует, хотя, может быть, неединственно.) Имеем

$$\|f\|_{m,\infty} \leq \|f \cdot \chi_{\Delta^*}\|_{m,\infty} + \|f \cdot (1 - \chi_{\Delta^*})\|_{m,\infty}.$$

С помощью (9) оценим $\|f \cdot \chi_{\Delta^*}\|_{m,\infty} \leq m \int_{\Delta^*} |f| = \|f\|'_m$. Из экстремальности множества Δ^* получим

$$\|f \cdot (1 - \chi_{\Delta^*})\|_{m,\infty} \leq \|f \cdot (1 - \chi_{\Delta^*})\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\Delta^*|} \int_{\Delta^*} |f| = \|f\|'_m.$$

Неравенство $\|f\|_{m,\infty} \leq 2\|f\|'_m$ доказано.

Докажем теперь, что для любого $\Delta \subset [0, 1]$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{m,\infty} \geq \frac{1 - (1 - |\Delta|)^m}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f| d\mu. \quad (13)$$

Очевидно, можно ограничиться случаем, когда носитель $\text{supp } f \subset \Delta$. С помощью формулы (4) получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{k+1,\infty} - \|f\|_{k,\infty} &= \int_0^\infty (1 - (1 - \lambda_f(t))^{k+1}) dt - \int_0^\infty (1 - (1 - \lambda_f(t))^k) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_f(t) (1 - \lambda_f(t))^k dt \\ &\geq (1 - |\Delta|)^k \int_0^\infty \lambda_f(t) dt = (1 - |\Delta|)^k \|f\|_1. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства от $k = 1$ до $k = m - 1$, получим, что

$$\|f\|_{m,\infty} - \|f\|_1 \equiv \|f\|_{m,\infty} - \|f\|_{1,\infty} \geq \|f\|_1 \sum_{k=1}^{m-1} (1 - |\Delta|)^k,$$

что влечет

$$\|f\|_{m,\infty} \geq \|f\|_1 \frac{1 - (1 - |\Delta|)^m}{|\Delta|}.$$

Чтобы доказать (13), нам осталось заметить, что $\|f\|_1 = \int_{\Delta} |f|$ (так как $\text{supp } f \subset \Delta$).

Следовательно, $\|f\|_{m,\infty} \geq \|f\|_m^*$.

Неравенство $\|f\|_m^* \geq (1 - e^{-1})\|f\|'_m$ очевидным образом следует из того, что $(1 - 1/m)^m < e^{-1}$. Теорема 2 доказана.

2.2. Геометрический факт.

ЛЕММА 1 (см. [3, лемма 1] или [4, лемма 2.1]). Пусть $\{w_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов в линейном пространстве с нормой (или полунормой) $\|\cdot\|$ таких, что $\|w_i\| = 1$ и

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i w_i \right\| \leq c \cdot n^{1/2+\beta} \quad (14)$$

для всех наборов знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, с некоторыми константами $\beta \in [0, 1/2)$, $c > 0$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i w_i \right\| \leq C(c) n^{1/4+\beta/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \quad (14')$$

для всех наборов коэффициентов $\{a_i\}_1^n$. Эта оценка неупрощаема в том смысле, что существуют норма $\|\cdot\|$, векторы $\{w_i\}_1^n$ и коэффициенты $\{a_i\}_1^n$ такие, что оценка (14) имеет место, а оценка (14') точна по порядку (при $n \rightarrow \infty$).

Геометрически лемма 1 утверждает, что радиус вписанного шара выпуклой оболочки множества $B_\infty^d \cup (n^{1/2+\beta} \cdot B_1^d)$ равен по порядку $n^{1/4+\beta/2}$, где B_∞^d обозначает d -мерный куб с вершинами, имеющими координаты ± 1 , а $B_1^d = \{(v_k) \in \mathbb{R}^d : \sum_1^d |v_k| \leq 1\}$.

2.3. Леммы перехода. Для доказательства основного результата нам потребуются следующие леммы, которые позволяют переносить одно свойство многомерного нормального распределения (лемма 3) на случай многомерного распределения общего вида.

ЛЕММА 2. Пусть события $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, m$, обладают следующим свойством:

$$(1 - \kappa) \sum_{j,k=1}^m P(\Omega_j \cap \Omega_k) \leq \left(\sum_{j=1}^m P(\Omega_j) \right)^2$$

с некоторым $\kappa \in (0, 1)$. Тогда $P(\bigcup_{j=1}^m \Omega_j) \geq 1 - \kappa$.

ЛЕММА 3. Пусть $\{h_j\}_{j=1}^m$ – набор гауссовских случайных величин таких, что $Eh_j = 0$, $Eh_j^2 = D_j \geq r^2 > 0$, $Eh_j h_k = v_{j,k}$ и каждая пара (h_j, h_k) , $j \neq k$, имеет двумерное нормальное распределение с плотностью

$$\phi_{0, V_{j,k}}(Y) := \frac{1}{2\pi(\det V_{j,k})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(Y, V_{j,k}^{-1}Y) \right\}, \quad Y = (y_1, y_2),$$

$$\text{где } V_{j,k} = \begin{pmatrix} D_j & v_{j,k} \\ v_{j,k} & D_k \end{pmatrix} \text{ – ковариационная матрица.}$$

Пусть также существуют константы $R \geq 1$, c_0 , $\delta > 0$ такие, что

$$\frac{1}{m^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m |v_{j,k}| \leq c_0 R^{-\delta} r^2.$$

Тогда для любого $\alpha < \delta^{1/2}$ существует не зависящая от R константа $C_7 = C_7(c_0, \alpha, \delta)$ такая, что для событий

$$\Psi_j = \Psi_j(\alpha) := \{h_j > \alpha \sqrt{D_j \log P}\}, \quad \text{где } P := \min(R, m) + 1,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{j,k=1}^m \mathbf{P}(\Psi_j \cap \Psi_k) \leq (1 + C_7 P^{-q_0}) \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\Psi_j) \right)^2, \quad (15)$$

где $q_0 = q_0(\alpha, \delta) = \min((\delta - \alpha^2)/3, 3\alpha^2/2) > 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $(\eta_j)_1^m$ и $(h_j)_1^m$ – случайные векторы такие, что

$$\mathbf{E}\eta_j = \mathbf{E}h_j = 0, \quad \mathbf{E}\eta_j \eta_k = \mathbf{E}h_j h_k = v_{j,k}, \quad D_j \equiv v_{j,j} \geq r^2 > 0,$$

причем вектор $(h_j)_1^m$ гауссовский, ковариационная матрица которого удовлетворяет условиям леммы 3 с параметрами $r, R, c_0, \delta > 0$. Предположим также, что для некоторых положительных постоянных $\delta_i \leq 1$, M_i , $i = 1, 2, 3$, и $\alpha < \alpha_0 := (\min(\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3))^{1/2}$ выполнены следующие условия:

$$|\mathbf{P}(U_j(\alpha)) - \mathbf{P}(\Psi_j(\alpha))| \leq M_1 P^{-\delta_1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (16)$$

$$|\mathbf{P}(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) - \mathbf{P}(\Psi_j(\alpha) \cap \Psi_k(\alpha))| \leq M_2 P^{-\delta_2}, \quad (j, k) \in \sigma, \quad (17)$$

где $P = \min(R, m) + 1$ и

$$\begin{aligned} \Psi_j &= \Psi(\alpha) := \{\omega : h_j(\omega) > \alpha \sqrt{D_j \log P}\}, \\ U_j &= U_j(\alpha) := \{\omega : \eta_j(\omega) > \alpha \sqrt{D_j \log P}\}, \end{aligned}$$

а множество индексов

$$\sigma \subset \{(j, k) : j \neq k, 1 \leq j, k \leq m\}$$

такое, что $|\sigma| \geq m^2(1 - M_3 P^{-\delta_3})$.

Тогда существует константа $C'_7 = C'_7(\alpha, c_0, \delta, \delta_i, M_i)$, $i = 1, 2, 3$, такая, что

$$\sum_{j,k=1}^m \mathbf{P}(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) \leq (1 + C'_7 P^{-q'}) \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{P}(U_j(\alpha)) \right)^2, \quad (18)$$

где степенной параметр

$$q' = \min \left\{ \frac{1}{3}(\delta - \alpha^2), \frac{3}{2}\alpha^2, \frac{5}{6} \min_{i=1,2,3} (\delta_i - \alpha^2) \right\} > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (к леммам 2–4). Лемма 2, являющаяся обобщением леммы Бореля–Кантелли, – известный и важный результат. Подобные утверждения использовались, например, в [18], [19], [12]. Леммы 3, 4, насколько нам известно, формулируются впервые, однако идея их доказательства полностью позаимствована из [12], [14]. Лемма 4 служит для переноса оценки типа (15) на “негауссовский случай.” Отметим, что основные результаты работ [12], [14], [3] проще получить с помощью лемм 2 и 4.

Заметим также, что из лемм 2 и 3 легко вывести, что для гауссовских случайных величин $\{h_i\}_1^m$ из формулировки леммы 3 имеет место оценка

$$\mathbf{P} \left(\max_{1 \leq j \leq m} h_j > \alpha r \sqrt{\log m} \right) \geq 1 - C m^{-q_0} \quad \text{при } m \leq R$$

(R и r из формулировки леммы 3) с некоторыми положительными константами α, q_0, C . Этот факт объединяет лемму 3 с результатами Слепяна [11] и Шидака [20], [21] о распределении максимума гауссовских векторов с нетривиальной ковариационной матрицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть χ_j – индикаторы событий $\Omega_j \subset \Omega$, и пусть $\zeta := \sum_{j=1}^n \chi_j$. Тогда $E|\zeta| = \sum_{j=1}^m P(\Omega_j)$ и $E|\zeta|^2 = \sum_{j,k=1}^m P(\Omega_j \cap \Omega_k)$. Очевидно, что $\text{supp } \zeta = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$. С помощью неравенства Коши–Шварца получим

$$(1 - \kappa)^{1/2} (E|\zeta|^2)^{1/2} \leq E|\zeta| \leq (E|\zeta|^2)^{1/2} \left(P \left(\bigcup_{j=1}^m \Omega_j \right) \right)^{1/2}.$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Так как случайные величины h_j нормальны, имеем

$$P(\Psi_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_j}} \int_{\alpha\sqrt{D_j \log P}}^{\infty} e^{-y^2/(2D_j)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy. \quad (19)$$

Учитывая, что $\int_z^{\infty} e^{-t^2/2} dt \asymp z^{-1} e^{-z^2/2}$ при $z \geq 1$, имеем

$$C_{\alpha}^{-1} (\sqrt{\log P})^{-1} P^{-\alpha^2/2} \leq P(\Psi_j) \leq C_{\alpha} (\sqrt{\log P})^{-1} P^{-\alpha^2/2}$$

с некоторой константой C_{α} , зависящей только от α . Следовательно,

$$\sum_{j=1}^m P(\Psi_j) \asymp_{\alpha} \frac{m}{\alpha\sqrt{\log P}} P^{-\alpha^2/2}. \quad (20)$$

Поэтому, чтобы доказать (15), нам достаточно проверить, что

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m P(\Psi_j \cap \Psi_k) \leq (1 + C'_7 P^{-q_0}) \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j) \right)^2. \quad (21)$$

Определим следующее множество индексов:

$$\sigma_1 := \left\{ (j, k) : 1 \leq j \neq k \leq m, |v_{j,k}| < \frac{1}{32} r^2 \right\}.$$

Неравенство Чебышёва для множества $\sigma_1^c = \{(j, k) : 1 \leq j \neq k \leq m\} \setminus \sigma_1$ дает

$$|\sigma_1^c| \leq \frac{32}{r^2} \sum_{j \neq k} |v_{j,k}| \leq 32c_0 m^2 R^{-\delta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{(j,k) \in \sigma_1^c} P(\Psi_j \cap \Psi_k) \leq 32c_0 m^2 R^{-\delta} \max_{1 \leq j \leq m} P(\Psi_j).$$

С помощью (19) получим

$$\sum_{(j,k) \in \sigma_1^c} P(\Psi_j \cap \Psi_k) \leq 32c_0 m^2 R^{-\delta} \frac{\text{const}}{\alpha\sqrt{\log P}} P^{-\alpha^2/2}.$$

Учитывая (20), имеем

$$\sum_{(j,k) \in \sigma_1^c} P(\Psi_j \cap \Psi_k) \leq K_2 R^{-\delta + \alpha^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j) \right)^2 \quad (22)$$

с некоторой константой $K_2(\alpha, c_0) > 0$ и, следовательно, при доказательстве (21) суммирование по σ_1^c можно не учитывать.

Оценим теперь сумму

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \sum_{s=(j,k) \in \sigma_1} P(\Psi_j \cap \Psi_k) \\ &= \int_{\alpha\sqrt{D_j \log P}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{D_k \log P}}^{\infty} \sum_{s \in \sigma_1} \frac{\exp\{-(Y, V_s^{-1}Y)/2\}}{2\pi\sqrt{\det V_s}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

С помощью замены переменных $t_1 = y_1/\sqrt{D_j}$, $t_2 = y_2/\sqrt{D_k}$, получим

$$\Sigma_1 = \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \sum_{s \in \sigma_1} \frac{\sqrt{D_j D_k}}{2\pi\sqrt{\det V_s}} e^{-Q(t_1, t_2)/2} dt_1 dt_2,$$

где $Q(t_1, t_2) := (Y, V_s^{-1}Y)$ – квадратичная форма. Заметим, что определитель $\det V_s = D_j D_k - v_s^2$ и

$$V_s^{-1} = \frac{1}{D_j D_k - v_s^2} \begin{pmatrix} D_k & -v_s \\ -v_s & D_j \end{pmatrix}.$$

Поэтому коэффициенты квадратичной формы $Q = a_s t_1^2 + a_s t_2^2 - 2b_s t_1 t_2$ определяются следующим образом:

$$a_s = \frac{D_j D_k}{D_j D_k - v_s^2}, \quad b_s = \frac{v_s \sqrt{D_j D_k}}{D_j D_k - v_s^2}.$$

Заметим также, что $|v_s| \leq r^2/32$ при $s \in \sigma_1$. Поэтому, принимая во внимание, что $D_j \geq r^2$ при всех $j = 1, \dots, m$, получим

$$a_s - b_s = \frac{\sqrt{D_j D_k}}{\sqrt{D_j D_k} + v_s} \geq \frac{1}{2}.$$

Теперь мы можем оценить значения квадратичной формы Q :

$$Q(t_1, t_2) = a_s t_1^2 + a_s t_2^2 - 2b_s t_1 t_2 \geq (a_s - b_s)(t_1^2 + t_2^2) \geq \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2).$$

Далее, для любого $L > 1$ имеем

$$\begin{aligned} J(L) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{L\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \sum_{s \in \sigma_1} \left(\frac{D_j D_k}{D_j D_k - v_s^2} \right)^{1/2} e^{-Q(t_1, t_2)/2} dt_1 dt_2 \\ &\leq \int_{L\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \sum_{s \in \sigma_1} e^{-(t_1^2 + t_2^2)/4} dt_1 dt_2 \\ &\asymp_{\alpha} \frac{|\sigma_1|}{L \log P} e^{-\alpha^2/4(L^2+1)\log P} \leq \frac{K_3 m^2}{L \log P} P^{-\alpha^2(L^2+1)/4} \end{aligned}$$

с некоторой константой $K_3(\alpha)$. Выбрав $L = 3$, учитывая (20), получим, что

$$J(3) < K_4 P^{-3\alpha^2/2} \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j) \right)^2 \quad (23)$$

с некоторой константой $K_4 = K_4(\alpha) > 0$.

Заметим, что

$$\Sigma_1 \leq 2J(3) + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{3\alpha\sqrt{\log P}} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{3\alpha\sqrt{\log P}} \sum_{s \in \sigma_1} \sqrt{a_s} \cdot e^{-Q(t_1, t_2)/2} dt_1 dt_2.$$

Теперь, чтобы доказать (15), нам осталось сравнить выражение

$$A := \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \sigma_1} \sqrt{a_s} e^{-Q(t_1, t_2)/2}$$

с выражением

$$B := \frac{1}{2\pi} |\sigma_1| \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_1^2 + t_2^2) \right\}$$

на квадрате $\alpha\sqrt{\log P} \leq t_1, t_2 \leq 3\alpha\sqrt{\log P}$. Действительно, если мы покажем, что $A \leq B(1 + K_5 P^{-q_0})$ с некоторой константой $K_5(\alpha, \delta) > 0$, то, проинтегрировав это неравенство, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{3\alpha\sqrt{\log P}} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{3\alpha\sqrt{\log P}} \sum_{s \in \sigma_1} \sqrt{a_s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(t_1, t_2) \right\} dt_1 dt_2 \\ & < (1 + K_5 P^{-q_0}) \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{\log P}}^{\infty} \frac{|\sigma_1|}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_1^2 + t_2^2) \right\} dt_1 dt_2 \\ & = (1 + K_5 P^{-q_0}) \sum_{s \in \sigma_1} P(\Psi_j) \cdot P(\Psi_k), \end{aligned}$$

что с учетом (22) и (23) влечет (15).

Разобьем множество индексов σ_1 на подмножества

$$\sigma_i := \{s \in \sigma_1 : 2^{-i} r^2 \leq |v_s| < 2^{-i+1} r^2\}, \quad i = 6, 7, \dots$$

Легко видеть, что $\sigma_1 = \bigcup_{i \geq 6} \sigma_i$. С помощью неравенства Чебышёва для $|\sigma_i|$ имеем

$$|\sigma_i| 2^{-i} r^2 \leq \sum_{s \in \sigma_1} |v_s| \leq c_0 r^2 m^2 R^{-\delta}$$

и, следовательно,

$$|\sigma_i| \leq \min(m^2, 2^i c_0 m^2 R^{-\delta}).$$

Учитывая, что $D_j \geq r^2$, для $s \in \sigma_i$ имеем

$$\begin{aligned} & |(a_s - 1)(t_1^2 + t_2^2) - 2b_s t_1 t_2| \leq (|a_s - 1| + |b_s|)(t_1^2 + t_2^2) \\ & = \frac{|v_s|}{\sqrt{D_j D_k} - |v_s|} (t_1^2 + t_2^2) < 2^{2-i} (t_1^2 + t_2^2) \leq 2^{7-i} \alpha^2 \log P \end{aligned}$$

в области $\alpha\sqrt{\log P} \leq t_1, t_2 \leq 3\alpha\sqrt{\log P}$. Кроме того, легко видеть, что для $s \in \sigma_i, i \geq 6$, выполнено

$$\sqrt{a_s} = \left(\frac{D_j D_k}{D_j D_k - v_s^2} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{v_s^2}{D_j D_k - v_s^2} \right)^{1/2} \leq 1 + 2^{3-2i}.$$

Собирая все вместе, получим

$$A \leq \frac{B}{|\sigma_1|} S,$$

$$\text{где } S := \sum_{i=6}^{\infty} |\sigma_i| (1 + 2^{3-2i}) e^{(2^{7-i} \alpha^2 \log P)/2} = \sum_{i=6}^{[2q_0 \log_2 P]} + \sum_{i > [2q_0 \log_2 P]}^{\infty} =: S_1 + S_2.$$

Учитывая, что $q_0 = \min((\delta - \alpha^2)/3, 3\alpha^2/2)$, имеем

$$S_1 \leq \sum_{i=6}^{[2q_0 \log_2 P]} 2^i c_0 m^2 R^{-\delta} \cdot (1 + 2^{-9}) P^{\alpha^2} \leq 4c_0 m^2 P^{\alpha^2 + 2q_0} R^{-\delta} \leq K_6 R^{-q_0} |\sigma_1|$$

с некоторой постоянной $K_6 = K_6(c_0) > 0$.

Чтобы оценить S_2 , заметим, что $P^{2^6 \alpha^2 P^{-2q_0}} < (1 + K_7 P^{-q_0})$ с некоторой константой $K_7(\alpha, q_0) > 0$. Поэтому

$$S_2 \leq \sum_{i > [2q_0 \log_2 P]} |\sigma_i| (1 + 8P^{-4q_0}) (1 + K_7 P^{-q_0}) \leq |\sigma_1| (1 + K_8 P^{-q_0})$$

с константой $K_8 = 8 + 9K_7$. Следовательно,

$$S \leq (1 + (K_6 + K_8) P^{-q_0}) |\sigma_1|$$

и $A \leq B(1 + K_5 P^{-q_0})$. Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В утверждении леммы степенной показатель $q_0(\alpha, \delta)$ выбран неоптимальным образом. Несложно показать, что неравенство (15) выполнено и при любом $q_0 = q_0(\alpha, \delta, \varepsilon) = \min\{(\delta - \alpha^2)/2, 3\alpha^2/2\} - \varepsilon > 0$. (Чтобы увидеть это, достаточно чуть лучше оценить сумму S). Однако в этом случае константа C_7 в неравенстве (15) будет зависеть еще и от $\varepsilon > 0$. Несколько более сложная модернизация доказательства позволяет получить (15) с параметром $q_0 = (\delta - \alpha^2)/2 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Поскольку для случайного вектора $(h_j)_1^m$ выполнены условия леммы 3, для событий $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ имеет место оценка (15) со степенным параметром $q_0 = (\delta - \alpha^2)/3$. Следовательно, чтобы установить (18), нам достаточно доказать, что для любого $\alpha < \alpha_0$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\Psi_j(\alpha)) \leq (1 + L_1 P^{-q_1}) \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(U_j(\alpha)), \quad (24)$$

$$\sum_{j,k=1}^m \mathbf{P}(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) \leq \sum_{j,k=1}^m \mathbf{P}(\Psi_j(\alpha) \cap \Psi_k(\alpha)) + \frac{L_2}{P^{q_2}} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\Psi_j(\alpha)) \right)^2 \quad (25)$$

с константами $q_1, q_2 \geq q'$ и $L_1, L_2 > 0$, зависящими только от $\alpha, c_0, \delta, \delta_i, M_i, i = 1, 2, 3$.

Заметим, что

$$P(\Psi_j(\alpha)) = \frac{1}{2\pi D_j} \int_{\alpha\sqrt{D_j \log P}}^{\infty} e^{-y^2/(2D_j)} dy \asymp_{\alpha} \frac{P^{-\alpha^2/2}}{\alpha\sqrt{\log P}}. \quad (26)$$

Поэтому при любом $\alpha^2 < \delta_1$ имеем (см. (16))

$$\begin{aligned} P(U_j(\alpha)) &\asymp_{\alpha} P(\Psi_j(\alpha)), \\ M_1 P^{-\delta_1} &\leq L_3 P^{-\delta_1 + \alpha^2} \cdot P(\Psi_j(\alpha)) \end{aligned} \quad (27)$$

с некоторой постоянной $L_3(\alpha, \delta_1, M_1)$. Учитывая условие (16), получим неравенство (24) с параметром $q_1 = \delta_1 - \alpha^2$.

Чтобы доказать (25), напомним, что по условию леммы

$$|\sigma^c| \equiv \text{card}\{(j, k) : j \neq k, (j, k) \notin \sigma\} \leq M_3 m^2 P^{-\delta_3}.$$

Поэтому при любом $\alpha^2 < \delta_1$ получим (см. (27))

$$\sum_{(j, k) \in \sigma^c} P(U_j \cap U_k) \leq M_3 m^2 P^{-\delta_3} \max_{1 \leq j \leq m} P(U_j) \leq L_4 m^2 P^{-\delta_3} \frac{P^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{\log P}}$$

с некоторой константой $L_4(\alpha, \delta_1, \delta_3, M_1, M_3)$. Учитывая (26), (27), при $\alpha^2 < \min\{\delta_1, \delta_3\}$ имеем

$$\sum_{(j, k) \in \sigma^c} P(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) \leq L_5 P^{-\delta_3 + \alpha^2} \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j(\alpha)) \right)^2$$

и, следовательно, при доказательстве (25) мы можем не учитывать сумму по σ^c в левой части неравенства.

Заметим, что оценка (27) при $\alpha^2 < \delta_1$ влечет следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^m P(U_j(\alpha)) \leq L_5 P^{-1 + \alpha^2} \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j(\alpha)) \right)^2$$

с некоторой константой $L_5(\alpha, \delta_1, M_1)$. Следовательно, при доказательстве (25) суммирование по парам $\{(j, k) : j = k\}$ в левой части также можно не учитывать.

Чтобы установить (25), нам осталось заметить, что из условия (17) следует

$$\sum_{(j, k) \in \sigma} P(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) \leq \sum_{(j, k) \in \sigma} P(\Psi_j(\alpha) \cap \Psi_k(\alpha)) + M_2 m^2 P^{-\delta_2}.$$

При $\alpha^2 < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, с помощью (26) оценим погрешность

$$M_2 m^2 P^{-\delta_2} \leq L_6 P^{-5(\delta_2 - \alpha^2)/6} \left(\sum_{j=1}^m P(\Psi_j(\alpha)) \right)^2$$

с некоторой константой $L_6(\alpha, \delta_1, \delta_2, M_1, M_2)$. Таким образом, неравенство (25) доказано с константами $L_2 = L_4 + L_5 + L_6$, $q_2 = \min\{5(\delta_2 - \alpha^2)/6, \delta_3 - \alpha^2\}$.

Неравенства (24), (25) вместе с неравенством (15) доказывают (18) с параметром $q' = \min\{q_0, q_1, q_2\}$, где $q_0 = \min\{(\delta - 2\alpha^2)/3, 3\alpha^2/2\}$ – степенной параметр в неравенстве (15). Лемма 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несложная модификация доказательства теоремы А с применением лемм 2–4 позволяет получить оценки (5), (6) для произвольного значения степенного параметра $q < 3(1 - 2p)/11$. Более того, если мы примем во внимание замечание 2 и немного улучшим оценки в леммах 3 и 4, то можно доказать оценки (5), (6) при любом значении параметра $q < (1 - 2p)/2$, однако при этом константы C_1, C_2, C_3 будут зависеть от q . В [16] приведено подробное доказательство для случая $q = (1 - 2p)/4$.

2.4. Центральная предельная теорема. Нам потребуется применить вариант двумерной центральной предельной теоремы с оценкой остаточного члена. Мы используем в одно- и двумерном случаях следующий результат Ротаря [22] (см. также следствие 17.2 в [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для набора независимых случайных векторов $\{X_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^d$ таких, что $\mathbb{E}X_i = 0$, $1 \leq i \leq N$, имеет место следующее неравенство:

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |P_N(A) - \Phi_{0,V}(A)| \leq K_1(d)N^{-1/2}m_3\lambda^{-3/2},$$

где $P_N(A)$ – вероятность того, что случайный вектор $N^{-1/2} \sum_{i=1}^N X_i$ принадлежит множеству A , $\mathcal{C}$ – класс всех выпуклых борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, $K_1(d) < \infty$ – некоторая постоянная,

$$m_3 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}|X_i|^3,$$

λ – наименьшее собственное число матрицы $V = N^{-1} \sum_{i=1}^N \text{cov}(X_i)$, $\text{cov}(X_i)$ – ковариационная матрица вектора X_i , наконец, $\Phi_{0,V}$ обозначает гауссовскую меру на $\mathbb{R}^d$ с плотностью

$$\phi_{0,V}(Y) := (2\pi)^{-d/2}(\det V)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y, V^{-1}Y)\right\}, \quad Y \in \mathbb{R}^d.$$

3. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 будет получена как непосредственное следствие более общей теоремы 1' и неравенства Хинчина.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^n$ – система интегрируемых функций на вероятностном пространстве (X, μ) таких, что

$$(d') \quad \|f_i\|_1 = 1 \text{ для всех } i = 1, \dots, n, \quad \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i \right\|_1 \leq Mn^{1/2+p_1} \text{ для всех наборов знаков } \theta_i = \pm 1 \text{ и } \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq Mn^{1/2+p_2} \text{ с некоторыми постоянными } M, p_1, p_2 \geq 0, \text{ причем } p_1 + 2p_2 < 1/2 \text{ и } p_2 < 1/12.$$

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – набор независимых случайных величин на другом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{P})$ таких, что $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{E}|\xi_i|^2 = 1$ и $\mathbb{E}|\xi_i|^3 \leq M^3$. Тогда при любом $m \leq n$ для случайного полинома (1) имеют место оценки (7) и (8) с некоторыми константами $q = q(p_1, p_2) > 0$, $C_j = C_j(p_1, p_2, M) > 0$, $j = 1, 2, 3$.

(Эти константы, конечно, не совпадают с константами из формулировки теоремы А.)

Чтобы вывести теорему 1 из теоремы 1', достаточно заметить, что из свойства (d) и проинтегрированного по $x \in X$ неравенства Хинчина (см., например, [2]) для суммы $\sum r_i(\omega) f_i(x)$ при фиксированном x , где r_i – функции Радемахера, следует, что

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq \text{const} \cdot \mathbb{E} \int_X \left| \sum_{i=1}^n r_i(\omega) f_i(x) \right| d\mu(x) \leq M'(M) n^{1/2+p}.$$

Поэтому условие (d) с параметром $p = p_1$ влечет условие (d') с $p_2 \leq p_1$ и, следовательно, если $p_1 < 1/12$, то неравенство $p_1 + 2p_2 < 1/2$ выполняется автоматически.

Теорема 1', как и теорема А, опирается на центральную предельную теорему (предложение 1), однако требует значительно более тонкой подготовительной работы. Дело, грубо говоря, в том, что предположение равномерной ограниченности базисных функций $\{f_i\}$ в $L_{2+\varepsilon}$ позволяло доказать существование “достаточно большого” множества $E \subset X$, на котором, в частности, выполнялась оценка

$$\frac{\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^3}{(\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2)^{3/2}} \leq \text{const} \cdot n^{-\varepsilon}, \quad x \in E, \quad (28)$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Это неравенство требуется для оценки погрешности в центральной предельной теореме. Такой прием был использован для доказательства оценок (5), (6) в [3] (а ранее использован в [12], [14] для доказательства аналогичных оценок для равномерной нормы).

Однако в предположениях теоремы 1' точек $x \in X$, для которых имеет место (28), может вообще не существовать. В качестве соответствующего примера можно привести набор (нормированных в L_1) функций $f_i := r_i + n^q \chi_i$, где r_i – функции Радемахера, а χ_i – характеристические функции интервалов $((i-1)/n, i/n)$, $1/3 < q < 7/12$. Для таких функций имеет место (d) с $p = \max\{0, q - 1/2\} < 1/12$, но неравенство (28) нарушается п.в. на $[0, 1]$. Поэтому применить предложение 1, как, впрочем, и другие версии центральной предельной теоремы, к суммам вида $\sum_{i=1}^n \xi_i f_i(x)$ напрямую нельзя. Тем не менее, условие (d') оставляет возможность для “достаточно большого” множества точек $x \in X$ выделить “достаточно большую” подсумму $\sum_{i \in \mathcal{J}_x} \xi_i f_i(x)$, для которой оценка (28) выполнена и, следовательно, применима центральная предельная теорема. При этом множество индексов $\mathcal{J}_x$, вообще говоря, зависит от x , и поэтому возникают трудности, связанные с переносом полученных оценок для подсумм на случай исходного полинома.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1'. Не умаляя общности, мы можем считать, что $2 \leq m \leq n^{\varepsilon_1} - 1$ с некоторым заранее фиксированным $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(p_1, p_2) \in (0, 1/2)$, значение которого будет задано позже. Более того, так как $\|f\|_{m,\infty}$ зависит только от распределения f (см. (4)) и $L_1[0, 1]$ содержит равноизмеримую копию вектора $(f_j)_1^n$, мы можем предположить, что $X = [0, 1]$ со стандартной мерой Лебега. Последнее означает, что мы сможем использовать теорему 2.

Шаг 1. Для каждого $x \in X$ определим множество индексов

$$\mathcal{A}(x) \equiv \mathcal{A}_x := \left\{ k : 1 \leq k \leq n, |f_k(x)| \leq n^{-1/2-\varepsilon_1} \sum_{j=1}^n |f_j(x)| \right\}.$$

Из неравенства Чебышёва получим, что $|\mathcal{A}_x^c| \leq n^{1/2+\varepsilon_1}$ и $|\mathcal{A}_x| \geq n - n^{1/2+\varepsilon_1}$. Для каждого $x \in X$ определим также меньшее множество индексов $\Lambda(x) \equiv \Lambda_x \subset \mathcal{A}_x$, $|\Lambda_x| = n - \lfloor n^{1/2+2\varepsilon_1} \rfloor$ так, что в каждой точке x множеством Λ_x индексированы $n - \lfloor n^{1/2+2\varepsilon_1} \rfloor$ наименьших значений $|f_k(x)|$. Чтобы формально определить множество Λ_x (такое, что для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ множество $\{x : k \in \Lambda(x)\}$ μ -измеримо), мы можем воспользоваться следующей индукционной процедурой. Положим

$$k_1(x) := \min\{k \in \{1, \dots, n\} : |f_k(x)| \geq |f_i(x)| \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

$$\mathcal{K}_1(x) := \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1(x)\}.$$

При уже определенных $k_l(x)$, $\mathcal{K}_l(x)$, $l = 1, \dots, j-1$, положим

$$k_j(x) := \min\{k \in \mathcal{K}_{j-1}(x) : |f_k(x)| \geq |f_i(x)| \quad \forall i \in \mathcal{K}_{j-1}(x)\},$$

$$\mathcal{K}_j(x) := \mathcal{K}_{j-1}(x) \setminus \{k_j(x)\}.$$

Несложно показать, что индексы $k_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, являются измеримыми функциями x . Положим $\Lambda_x := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{K}_{\lfloor n^{1/2+2\varepsilon_1} \rfloor}(x)$. Легко видеть, что $|\Lambda_x| = n - \lfloor n^{1/2+2\varepsilon_1} \rfloor$, $\Lambda_x \subset \mathcal{A}_x$ и

$$\int_X \sum_{k \in \Lambda_x^c} |f_k(x)| d\mu(x) \leq \int_X \sqrt{|\Lambda_x^c|} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^2 \right)^{1/2} d\mu(x) \leq Mn^{3/4+p_2+\varepsilon_1}$$

и, следовательно,

$$\int_X \sum_{k \in \Lambda_x} |f_k(x)| d\mu(x) \geq n - Mn^{3/4+p_2+\varepsilon_1}.$$

Нетривиальность этой оценки обеспечивается таким выбором ε_1 , что $3/4 + p_2 + \varepsilon_1 < 1$.

Шаг 2. Положим

$$X' := \left\{ x \in X : \sum_{k \in \Lambda_x} |f_k(x)| \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right\}$$

и заметим, что

$$\int_{X \setminus X'} \sum_{k \in \Lambda_x} |f_k| \leq \frac{1}{3} \int_X \sum_{k=1}^n |f_k| = \frac{n}{3}.$$

Следовательно, для достаточно больших⁴ $n \geq n_0(\varepsilon_1 + p_2, M)$ имеем

$$\int_{X'} \sum_{\Lambda_x} |f_k| \geq n - Mn^{3/4+p_2+\varepsilon_1} - \frac{n}{3} \geq \frac{n}{2}.$$

С помощью неравенства Гёльдера для функции

$$F_2(x) := \left(\sum_{k \in \Lambda_x} |f_k(x)|^2 \right)^{1/2}$$

⁴Как обычно, случай малых n можно исключить из рассмотрения, увеличив или уменьшив значения некоторых констант.

получим

$$\int_{X'} F_2(x) d\mu(x) \geq \int_{X'} |\Lambda_x|^{-1/2} \cdot \sum_{k \in \Lambda_x} |f_k| d\mu(x) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Заметим, если $x \in X'$ и некоторое множество индексов $I_x \subset \mathcal{A}_x$ обладает свойством $|I_x| \geq |\Lambda_x|$, то в силу определений множеств Λ_x и $\mathcal{A}_x$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^3 &\leq \left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right) \cdot \max_{k \in I_x} \{|f_k(x)|\} \\ &\leq \left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right) \cdot n^{-1/2-\varepsilon_1} \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \\ &\leq n^{-1/2-\varepsilon_1} \left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right) \cdot 3 \left(\sum_{k \in \Lambda_x} |f_k(x)| \right) \\ &\leq 3n^{-1/2-\varepsilon_1} |\Lambda_x|^{1/2} \left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right)^{3/2} \leq 3n^{-\varepsilon_1} \left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^3}{\left(\sum_{k \in I_x} |f_k(x)|^2 \right)^{3/2}} \leq 3n^{-\varepsilon_1}. \quad (29)$$

Это неравенство потребуется в дальнейшем для оценки погрешности остаточного члена в центральной предельной теореме.

Шаг 3. Определим множества

$$E_\ell := \left\{ x \in X' : \frac{\sqrt{n}}{4} 2^{\ell-1} \leq F_2(x) < \frac{\sqrt{n}}{4} 2^\ell \right\}, \quad \ell = 1, 2, \dots$$

Считая n достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \int_{X'} F_2 \leq Mn^{1/2+p_2},$$

получим для любого $\varepsilon_2 > 0$

$$\mu \left\{ x \in X' : F_2(x) \geq \frac{\sqrt{n}}{4} 2^{n^{\varepsilon_2}} \right\} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} 2^{-n^{\varepsilon_2}} \int_{X'} F_2 d\mu < 4Mn^{p_2} 2^{-n^{\varepsilon_2}}. \quad (30)$$

Заметим, что

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{E_\ell} F_2 d\mu = \int_{\{F_2 \geq \sqrt{n}/4\} \cap X'} F_2 d\mu \geq \frac{\sqrt{n}}{4}$$

и, следовательно, заведомо имеет место хотя бы один из следующих двух случаев:

- (i) $\sum_{1 \leq \ell < n^{\varepsilon_2}} \int_{E_\ell} F_2 \geq \frac{\sqrt{n}}{8};$
- (ii) $\sum_{\ell \geq n^{\varepsilon_2}} \int_{E_\ell} F_2 > \frac{\sqrt{n}}{8}.$

Предположим сначала, что имеет место (i). Определим множество индексов

$$\mathcal{L} := \left\{ 1 \leq \ell < n^{\varepsilon_2} : \int_{E_\ell} F_2 \geq \frac{n^{1/2-\varepsilon_2}}{16} \right\}$$

и заметим, что $\sum_{\ell \in \mathcal{L}} \int_{E_\ell} F_2 \geq \sqrt{n}/16$. Обозначим

$$\mu_\ell := \mu E_\ell, \quad \rho_\ell := \frac{\sqrt{n}}{4} 2^{\ell-1}.$$

Легко видеть, что в случае (i) мы имеем

$$\sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{\sqrt{n}}{32}, \quad \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{n^{1/2-\varepsilon_2}}{32} \quad \text{для всех } \ell \in \mathcal{L}.$$

Далее в шагах 5–11 мы будем иметь дело только со случаем (i). Случай (ii) проще, и мы рассмотрим его на заключительном шаге 12.

Шаг 4. Пусть $\mathcal{J}_x$ – некоторое (зависящее от $x \in X$) множество индексов (вложенное в $\{1, \dots, n\}$) такое, что $|\mathcal{J}_x| \geq n - n^{1/2+2\varepsilon}$, $\varepsilon < 1/4$, и для любого k_0 множество $\{x \in X : k_0 \in \mathcal{J}_x\}$ измеримо относительно меры μ . Тогда для любого набора знаков $\theta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$, имеем

$$\begin{aligned} \int_X \left| \sum_{k \in \mathcal{J}_x} \theta_k f_k(x) \right| d\mu(x) &\leq \int_X \left| \sum_{k=1}^n \theta_k f_k(x) \right| d\mu(x) + \int_X \left| \sum_{k \in \mathcal{J}_x^c} \theta_k f_k(x) \right| d\mu(x) \\ &\leq Mn^{1/2+p_1} + \int_X \sqrt{|\mathcal{J}_x^c|} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^2 \right)^{1/2} d\mu(x) \\ &\leq Mn^{1/2+p_1} + Mn^{3/4+p_2+\varepsilon} \leq 2Mn^{1/2+\max\{p_1, p_2+1/4+\varepsilon\}}. \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 1 для всех коэффициентов $\{a_k\}_1^n$ имеем

$$\int_X \left| \sum_{k \in \mathcal{J}_x} a_k f_k \right| d\mu(x) \leq Cn^{1/4+(1/2)\max\{p_1, p_2+1/4+\varepsilon\}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

с некоторой константой $C(M) > 0$.

Шаг 5. Выберем константы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq \frac{1}{4}(1 - 2p_1 - 4p_2), \quad \frac{\varepsilon_1}{2} + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{12} - p_2 \right). \quad (31)$$

Смысл этих неравенств вскоре прояснится. Мы можем для определенности положить

$$2\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_3 := \min \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} - p_2 \right), \frac{1}{8}(1 - 2p_1 - 4p_2) \right\}.$$

Положительность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ обеспечивается ограничениями, наложенными на p_1 и p_2 .

Рассмотрим некоторое E_ℓ , $\ell \in \mathcal{L}$. Для $\bar{x} = (x_i)_1^m \in (E_\ell)^m$ положим

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_m) := \bigcap_{j=1}^m \mathcal{A}_{x_j},$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := \frac{1}{m^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \left| \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_i(x_j) f_i(x_k) \right|.$$

Заметим, что $|\mathcal{J}(\bar{x})| \geq n - mn^{1/2+\varepsilon_1} \geq n - n^{1/2+2\varepsilon_1}$. Пользуясь инвариантностью множества $\mathcal{J}(x_1, \dots, x_m)$ и функции $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ относительно перестановок координат $(x_1, \dots, x_m)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\ell^m} \int_{(E_\ell)^m} \varphi(\bar{x}) d\mu^m(\bar{x}) &= \frac{m(m-1)}{m^2 \mu_\ell^m} \int_{(E_\ell)^m} \left| \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_k(x_1) f_k(x_2) \right| d\mu^m(\bar{x}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_\ell^m} \int_{(E_\ell)^{m-2}} \left\{ \int_X \int_X \left| \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_k(x_1) f_k(x_2) \right| d\mu(x_1) d\mu(x_2) \right\} d\mu^{m-2}(x_3, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Применяя результаты шага 4 к множеству $\mathcal{J}(\bar{x})$ с $\varepsilon = \varepsilon_1$, получим

$$\begin{aligned} &\int_X \int_X \left| \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_k(x_1) f_k(x_2) \right| d\mu(x_1) d\mu(x_2) \\ &\leq C n^{1/4+\max\{p_1, p_2+1/4+\varepsilon_1\}/2} \cdot \int_X \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x_1)|^2 \right)^{1/2} d\mu(x_1), \end{aligned}$$

из чего окончательно получим

$$\frac{1}{\mu_\ell^m} \int_{(E_\ell)^m} \varphi(\bar{x}) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_m) \leq \frac{CM}{\mu_\ell^2} n^{3/4+p_2+\max\{p_1, p_2+1/4+\varepsilon_1\}/2}. \quad (32)$$

Мы хотим доказать существование множества $G_\ell \subset (E_\ell)^m$ такого, что $\mu^m G_\ell \geq \mu_\ell^m/2$ и для любого $\bar{x} = (x_i)_1^m \in G_\ell$ имеет место

$$\varphi(\bar{x}) \leq C_0 \rho_\ell^2 n^{-\varepsilon_3}$$

с некоторыми константами ε_3 , $C_0(p_1, p_2, M) > 0$. Для этого заметим, что при $\ell \in \mathcal{L}$ мы имеем $\mu_\ell \rho_\ell \geq 2^{-5} n^{1/2-\varepsilon_2}$, что вместе с (32) влечет

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\ell^m} \int_{(E_\ell)^m} \varphi(\bar{x}) d\mu^m(\bar{x}) &\leq CM 2^{10} \rho_\ell^2 n^{2\varepsilon_2-1} n^{3/4+p_2+\max\{p_1, p_2+1/4+\varepsilon_1\}/2} \\ &\leq CM 2^{10} \rho_\ell^2 n^{-\varepsilon_3}, \end{aligned}$$

где константы ε_1 , ε_2 , ε_3 выбраны положительными, удовлетворяющими неравенствам (31). Таким образом, с помощью неравенства Чебышёва для множества

$$G_\ell := \{\bar{x} \in E_\ell : \varphi(\bar{x}) \leq CM 2^{11} \rho_\ell^2 n^{-\varepsilon_3}\}, \quad \ell \in \mathcal{L},$$

имеем $\mu^m G_\ell \geq \mu_\ell^m/2$.

Шаг 6. Для $\ell \in \mathcal{L}$ и $(x_j)_1^m \in G_\ell$ определим случайный вектор $\eta = (\eta_j)_1^m$ тождеством

$$\eta_j(\omega) := |\mathcal{J}(\bar{x})|^{-1/2} \sum_{i \in \mathcal{J}(x_1, \dots, x_m)} \xi_i(\omega) f_i(x_j).$$

Мы хотим показать, что

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mathbb{P} \left\{ \max_{1 \leq j \leq m} |\eta_j + v_j| \leq \alpha \rho_\ell \sqrt{\frac{\log m}{|\mathcal{J}(\bar{x})|}} \right\} \leq \frac{K_0}{m^q} \quad (33)$$

с некоторыми положительными постоянными α , K_0 и q , зависящими только от p_1, p_2, M . Нетрудно проверить, что неравенство (33) выполнено, если

$$\min_{\theta_j = \pm 1} \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^m \left\{ \theta_j \eta_j \geq \alpha \rho_\ell \left(\frac{\log m}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \right)^{1/2} \right\} \right) \geq 1 - \frac{K_0}{m^q}$$

(достаточно взять $\theta_j = -\text{sign}(v_j)$). Последнее неравенство мы установим, показав, что

$$\min_{\theta_j = \pm 1} \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^m \{ \theta_j \eta_j \geq \alpha \sqrt{d_{j,\ell} \log m} \} \right) \geq 1 - \frac{K_0}{m^q}, \quad (34)$$

$$\text{где } d_{j,\ell} := D(\eta_j) = \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} |f_i(x_j)|^2 \geq \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{i \in \Lambda(x_j)} |f_i(x_j)|^2 \geq \frac{\rho_\ell^2}{|\mathcal{J}(\bar{x})|}.$$

Оценивая $d_{j,\ell}$, мы воспользовались определением Λ_x и тем фактом, что

$$|\mathcal{J}(\bar{x})| \geq n - m \cdot n^{1/2+2\varepsilon_1} \geq |\Lambda_x|.$$

Для фиксированного набора знаков $\{\theta_j\}_1^m$, $\theta_j = \pm 1$, обозначим

$$U_j = U_j(\alpha) := \{ \omega \in \Omega : \theta_j \eta_j \geq \alpha \sqrt{d_{j,\ell} \log m} \}, \quad v_{j,k} := \frac{\theta_j \theta_k}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_i(x_j) f_i(x_k),$$

и заметим, что по определению множества G_ℓ

$$\frac{1}{m^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m |v_{j,k}| \leq C_0 \rho_\ell^2 n^{-\varepsilon_3} |\mathcal{J}(\bar{x})|^{-1}. \quad (35)$$

Далее, с помощью центральной предельной теоремы мы собираемся показать, что случайные величины η_j “почти” гауссовские и, более того, они “почти” попарно гауссовские. Затем, мы применим лемму 4 (с параметрами $R = n$, $P = m$) и установим для событий U_j неравенство

$$\sum_{j,k=1}^m \mathbb{P}(U_j(\alpha) \cap U_k(\alpha)) \leq (1 + L_0 m^{-q}) \left(\sum_{j=1}^m \mathbb{P}(U_j(\alpha)) \right)^2 \quad (36)$$

с некоторыми константами $L_0(p_1, p_2, M)$, $q(p_1, p_2) > 0$, из которого с помощью леммы 2 выводится неравенство (34). Таким образом, чтобы доказать (33) нам достаточно доказать (36), доказательству (36) посвящены шаги 7 и 8.

Шаг 7. Пусть $(h_j)_1^m$ обозначает гауссовский вектор с нулевым средним и ковариациями $E h_j h_k = v_{j,k}$ и $\Psi_j = \Psi_j(\alpha) := \{\omega : h_j > \alpha \sqrt{d_{j,\ell} \log m}\}$. Заметим, что

$$P(\Psi_j) = (2\pi d_{j,\ell})^{-1/2} \int_{\alpha \sqrt{d_{j,\ell} \log m}}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2d_{j,\ell}}\right) dy}{\sqrt{d_{j,\ell} \log m}}.$$

Мы собираемся применить к случайным векторам $(\eta_j)_1^m$ и $(h_j)_1^m$ лемму 4. Чтобы показать выполнение условий (16), (17), мы воспользуемся предложением 1.

Зафиксируем некоторую точку $\bar{x} = (x_j)_1^m \in G_\ell$ и набор знаков $\{\theta_j\}_1^m$, $\theta_j = \pm 1$, и применим предложение 1 к наборам случайных величин $\{\theta_j f_i(x_j) \xi_i(\omega)\}_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})}$ при всех $1 \leq j \leq m$. Здесь $N = |\mathcal{J}(\bar{x})|$ и

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} E |\xi_k|^3 |f_k(x_j)|^3 \leq \frac{M^3}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} |f_k(x_j)|^3 \\ \lambda = V &= \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{k \in \mathcal{J}(\bar{x})} E |\xi_k|^2 |f_k(x_j)|^2 = d_{j,\ell}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (29), получим

$$|\mathcal{J}(\bar{x})|^{-1/2} m_3 \lambda^{-3/2} \leq 3M^3 n^{-\varepsilon_1}$$

и, следовательно, предложение 1 влечет для случайной величины $\theta_j \eta_j$ следующую оценку:

$$\begin{aligned} |P(U_j(\alpha)) - P(\Psi_j(\alpha))| &\equiv \left| P(U_j(\alpha)) - \left(\frac{1}{2\pi d_{j,\ell}} \right)^{1/2} \int_{\alpha \sqrt{d_{j,\ell} \log m}}^{\infty} \exp\left\{ \frac{-y^2}{2d_{j,\ell}} \right\} dy \right| \\ &\leq 3K_1(1) M^3 n^{-\varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Шаг 8. Как и в доказательстве леммы 3, положим

$$\sigma_1 := \left\{ (j, k) : 1 \leq j \neq k \leq m, |v_{j,k}| < \frac{\rho_\ell^2}{8|\mathcal{J}(\bar{x})|} \right\}.$$

Из неравенства Чебышёва следует, что (см. (35))

$$|\sigma_1^c| \leq \frac{8|\mathcal{J}(\bar{x})|}{\rho_\ell^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m |v_{j,k}| \leq 8C_0 m^2 n^{-\varepsilon_3} \leq 8C_0 m^{2-\varepsilon_3/\varepsilon_1}. \quad (38)$$

(Мы воспользовались предположением, что $m \leq n^{\varepsilon_1}$.)

Чтобы применить лемму 4 и тем самым доказать (36), нам осталось показать, что при всех $(j, k) \in \sigma_1$ выполнена оценка типа (17).

Для фиксированной пары $s = (j, k) \in \sigma_1$ рассмотрим набор случайных векторов в $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \left(\frac{\theta_j \xi_i(\omega) f_i(x_j)}{\sqrt{d_{j,\ell}}}, \frac{\theta_k \xi_i(\omega) f_i(x_k)}{\sqrt{d_{k,\ell}}} \right) \right\}_{i \in \mathcal{J}(x_1, \dots, x_m)}.$$

Применим к этому набору предложение 1. Здесь

$$m_3^s = \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} \mathbb{E} |\xi_i|^3 \left(\frac{|f_i(x_j)|^2}{d_{j,\ell}} + \frac{|f_i(x_k)|^2}{d_{k,\ell}} \right)^{3/2},$$

$$V^s = \frac{1}{|\mathcal{J}(\bar{x})|} \begin{pmatrix} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} \frac{|f_i(x_j)|^2}{d_{j,\ell}} & \frac{\theta_j \theta_k}{\sqrt{d_{j,\ell} d_{k,\ell}}} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_i(x_j) f_i(x_k) \\ \frac{\theta_j \theta_k}{\sqrt{d_{j,\ell} d_{k,\ell}}} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} f_i(x_j) f_i(x_k) & \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} \frac{|f_i(x_k)|^2}{d_{k,\ell}} \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$V^s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_s}{\sqrt{d_{j,\ell} d_{k,\ell}}} \\ \frac{v_s}{\sqrt{d_{j,\ell} d_{k,\ell}}} & 1 \end{pmatrix}$$

Пользуясь тем, что $s \in \sigma_1$, оценим определитель

$$\det V^s = 1 - \frac{v_s^2}{d_{j,\ell} d_{k,\ell}} \geq 1 - \frac{1}{64} \geq \frac{1}{2}.$$

Поскольку матрица V^s положительно определена, оба ее собственных числа $\lambda_2 \geq \lambda_1$ положительны. Следовательно, принимая во внимание, что $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace } V^s = 2$, получим

$$\frac{1}{2} \leq \det V^s = \lambda_2 \lambda_1 \leq 2 \lambda_1,$$

следовательно, $\lambda_1 > 1/4$. Учитывая (25) и определение $d_{j,\ell}$, $\mathcal{J}(\bar{x})$, оценим

$$m_3^s \leq 8M^3 |\mathcal{J}(\bar{x})|^{1/2} \cdot 3n^{-\varepsilon_1}.$$

Таким образом, с помощью предложения 1 имеем

$$\left| \mathbb{P}(U_j \cap U_k) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\det V^s}} \int_{\alpha\sqrt{d_{j,\ell} \log m}}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{d_{k,\ell} \log m}}^{\infty} e^{-(Y, (V^s)^{-1}Y)/2} dy_1 dy_2 \right|$$

$$\equiv |\mathbb{P}(U_j \cap U_k) - \mathbb{P}(\Psi_j \cap \Psi_k)| \leq \frac{K_1(2)m_3^s \lambda_1^{-3/2}}{|\mathcal{J}(\bar{x})|^{1/2}} < \frac{200M^3 K_1(2)}{n^{\varepsilon_1}}. \quad (39)$$

Следовательно, учитывая оценки (37)–(39), мы можем воспользоваться леммой 4 (с параметрами $R = n$, $P = m$ и $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1$, $\delta = \delta_3 = \varepsilon_3/\varepsilon_1$) и получить оценку (36) и, следовательно, установить (33) с некоторыми⁵ фиксированными $\alpha > 0$, $q(p_1, p_2) > 0$.

Шаг 9. Целью этого шага будет доказательство неравенства

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^m \left\{ \omega : \left| \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) f_i(x_j) \right| \leq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m} \right\} \right) \leq K_0 m^{-q} \quad (40)$$

для $(x_j)_1^m \in G_\ell$, $\ell \in \mathcal{L}$. Это неравенство легко вытекает из (33) и следующей леммы.

⁵Мы не задаемся здесь вопросом оптимального выбора степенного параметра q , заметим только, что при $\alpha^2 = (1/12 - p_1)/4$ лемма 4 гарантирует выполнение неравенств (36), (33) с константой $q = (1/12 - p_1)/4$.

ЛЕММА 5. Пусть случайные векторы $\eta = (\eta_j)_1^m$ и $\eta^c = (\eta_j^c)_1^m$ независимы и для некоторого открытого или замкнутого множества $B \subset \mathbb{R}^m$ и $p \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} P\{\eta + v \in B\} \leq p.$$

Тогда $P\{\eta + \eta^c \in B\} \leq p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $\chi(v, w)$ – характеристическая функция множества $\{(v, w) : v + w \in B\} \subset \mathbb{R}^{2m}$, тогда

$$P\{\eta + \eta^c \in B\} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi(v, w) dF_{\eta|\eta^c}(v | w) dF_{\eta^c}(w),$$

где $F_{\eta|\eta^c}(v | w)$ – условное распределение вектора η относительно η^c (определение см. в [24]), $F_{\eta^c}(w)$ – распределение вектора η^c . Так как векторы η и η^c независимы, имеем $F_{\eta|\eta^c}(v | w) = F_{\eta}(v)$ и

$$P\{\eta + \eta^c \in B\} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi(v, w) dF_{\eta}(v) dF_{\eta^c}(w) = \int_{\mathbb{R}^m} P\{\eta \in B - w\} dF_{\eta^c}(w) \leq p.$$

Лемма 5 доказана.

Теперь, чтобы вывести (40)⁶ из (33), достаточно заметить, что случайные векторы с координатами

$$\eta_j := \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{J}(\bar{x})|}} \sum_{i \in \mathcal{J}(\bar{x})} \xi_i f_i(x_j), \quad \eta_j^c := \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{J}(\bar{x})|}} \sum_{i=1}^n \xi_i f_i(x_j) - \eta_j$$

независимы, и применить к ним лемму 5 с параметром $p = K_0 m^{-q}$ и $B := \{(y_j)_1^m \in \mathbb{R}^m : |y_j| \leq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m / |\mathcal{J}(\bar{x})|}\}$.

Шаг 10. Для $\ell \in \mathcal{L}$ положим

$$\Omega_\ell := \left\{ \omega \in \Omega : \mu^m \{\bar{x} \in G_\ell : \max_{1 \leq j \leq m} |F_n(\omega, x_j)| \geq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m}\} \geq \frac{\mu^m G_\ell}{2} \right\}.$$

Из неравенства (40) очевидно следует, что

$$\gamma := P \times \mu^m \left\{ (\omega, \bar{x}) \in \Omega \times G_\ell : \max_{1 \leq j \leq m} |F_n(\omega, x_j)| \geq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m} \right\} \geq \left(1 - \frac{K_0}{m^q} \right) \mu^m G_\ell.$$

Поэтому, мы можем оценить

$$P(\Omega_\ell) \mu^m G_\ell + (1 - P(\Omega_\ell)) \frac{\mu^m G_\ell}{2} \geq \gamma \geq (1 - K_0 m^{-q}) \mu^m G_\ell$$

и, следовательно, $P(\Omega_\ell) \geq 1 - 2K_0 m^{-q}$.

Нам потребуется следующая

⁶Если бы нас интересовала только оценка *равномерной* нормы случайного полинома (следствие 1), то мы фактически могли бы остановиться на этом шаге. В самом деле, неравенство (40) с $m = \lceil n^{\varepsilon_1} \rceil$ доказывает следствие 1 в случае (i) из шага 3. Если же имеет место случай (ii), нам достаточно применить предложение 1 к $\{f_i(x)\xi_i\}_{i \in \mathcal{A}(x)}$ в единственной точке $x \in E_\ell$, $\ell > n^{\varepsilon_1}$, и с помощью леммы 5 получить требуемую оценку с “большим запасом.”

ЛЕММА 6. Пусть числа $T_\ell \geq 0$ таковы, что $\sum_{\ell=1}^L T_\ell = T$ (L может быть бесконечным), а события $\tilde{\Omega}_\ell$ таковы, что $P(\tilde{\Omega}_\ell) \geq 1 - p$. Тогда

$$P\left\{\sum_{\ell=1}^L T_\ell I_{\tilde{\Omega}_\ell}(\omega) \leq \frac{T}{2}\right\} \leq 2p,$$

где $I_{\tilde{\Omega}_\ell}$ — индикаторы событий $\tilde{\Omega}_\ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Пусть

$$q = P\left(\sum_{\ell=1}^L T_\ell I_{\tilde{\Omega}_\ell} \leq \frac{T}{2}\right),$$

тогда

$$q\frac{T}{2} + (1-q)T \geq E \sum_{\ell=1}^L T_\ell I_{\tilde{\Omega}_\ell} \geq T(1-p).$$

Следовательно, $q \leq 2p$. Лемма 6 доказана.

Применим лемму 6 к числам $T_\ell := \mu_\ell \rho_\ell$ и событиям Ω_ℓ при $\ell \in \mathcal{L}$ с параметром $p = 2K_0 m^{-q}$. Получим, что существует событие Ω_0 и подмножество $\mathcal{L}_0(\omega) \subset \mathcal{L}$ такие, что $\Omega_0 \subset \bigcap_{\ell \in \mathcal{L}_0} \Omega_\ell$,

$$P(\Omega_0) \geq 1 - 4K_0 m^{-q}$$

и п.н. на Ω_0 имеет место неравенство (см. шаг 3)

$$\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{\sqrt{n}}{64}. \quad (41)$$

Шаг 11. Для $\ell \in \mathcal{L}$ положим

$$\Delta_\ell(\omega) := \{x \in E_\ell : |F_n(\omega, x)| \geq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m}\}.$$

Почти наверное при $\omega \in \Omega_\ell$ имеем

$$\begin{aligned} (\mu E_\ell)^m - (\mu E_\ell - \mu \Delta_\ell)^m &= \mu^m \{\bar{x} \in E_\ell^m : \max_{1 \leq j \leq m} |F_n(\omega, x_j)| \geq \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m}\} \\ &\geq \frac{\mu^m G_\ell}{2} \geq \frac{(\mu E_\ell)^m}{4} \equiv \frac{\mu_\ell^m}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, $1 \geq 1/4 + (1 - \mu \Delta_\ell / \mu_\ell)^m$ и

$$\frac{\mu \Delta_\ell}{\mu_\ell} \geq 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{1/m} \geq \frac{1}{4m}.$$

Существуют подмножества $\Delta'_\ell(\omega) \subset \Delta_\ell(\omega)$ такие, что $\mu \Delta'_\ell = \mu_\ell / (4m)$. Положим

$$E' = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}_0} \Delta'_\ell(\omega), \quad \mu E' = \frac{1}{4m} \sum_{\ell \in \mathcal{L}_0} \mu_\ell.$$

Теперь для почти всех $\omega \in \Omega_0$ (Ω_0 и $\mathcal{L}_0$ определены в предыдущем шаге) с помощью теоремы 2 (см. (12)) мы можем оценить интегрально-равномерную норму случайного полинома $F_n(\omega, x)$ вида (1) с помощью “родственной” ей нормы $\|\cdot\|_m^*$ (см. (10)) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|F_n(\omega, \cdot)\|_m^* &\geq \frac{1}{\mu E'(\omega)} \left(\int_{E'(\omega)} |F_n(\omega, x)| d\mu(x) \right) (1 - (1 - \mu E'(\omega))^m) \\ &\geq \frac{1}{\mu E'(\omega)} \left(\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \frac{\mu_\ell}{4m} \alpha \rho_\ell \sqrt{\log m} \right) (1 - (1 - \mu E'(\omega))^m) \\ &= \alpha \sqrt{\log m} \left(\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \mu_\ell \rho_\ell \right) \cdot t_0^{-1} \left(1 - \left(1 - \frac{t_0}{4m} \right)^m \right), \end{aligned}$$

где $t_0 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_0} \mu_\ell$. Принимая во внимание (41) и то, что $1 - (1 - t/(4m))^m \geq t/8$ при $t \in (0, 1)$ и $m \geq 1$, с помощью теоремы 2 получим

$$\|F_n(\omega, \cdot)\|_{m, \infty} \geq \|F_n(\omega, \cdot)\|_m^* \geq 8^{-3} \alpha \sqrt{n \log m} \quad \text{п.н. на } \Omega_0,$$

что с учетом оценки $P(\Omega_0) \geq 1 - 4K_0 m^{-q}$ доказывает (7) в том случае, когда имеет место случай (i) (см. шаг 3).

Шаг 12. Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось рассмотреть случай (ii) из шага 3. Заметим, что так как неравенство (25) выполнено п.в. на X' (при $I_x = \mathcal{A}_x$), мы можем применить предложение 1 (в одномерном случае) к сумме случайных величин $\eta_x := |\mathcal{A}_x|^{-1/2} \sum_{i \in \mathcal{A}_x} \xi_i f_i(x)$. Получим

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} P\{|\eta_x + v| \leq \gamma \sqrt{d(x)}\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-y^2/2} dy + O(n^{-\varepsilon_1}),$$

где $d(x) := |\mathcal{A}_x|^{-1} \sum_{i \in \mathcal{A}_x} |f_i(x)|^2$. Положим $\gamma = m^{-\varepsilon_1}$, тогда для п.в. $x \in E_\ell$, $\ell \geq 1$, имеем

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} P\{|\eta_x + v| \leq \sqrt{d(x)} m^{-\varepsilon_1}\} \leq K' m^{-\varepsilon_1}$$

с некоторой константой $K'(p_1, p_2, M) > 0$. Учитывая, что $|\mathcal{A}_x| d(x) \geq \rho_\ell^2$ при $x \in E_\ell$, с помощью леммы 5 получим

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \xi_i f_i(x)\right| \leq \rho_\ell m^{-\varepsilon_1}\right\} \leq K' m^{-\varepsilon_1} \quad \text{для п.в. } x \in E_\ell \text{ и всех } \ell \geq 1.$$

Далее, для каждого $\ell \geq n^{\varepsilon_2}$ определим множества

$$\Omega'_\ell := \left\{ \omega \in \Omega : \mu\{x \in E_\ell : |F_n(\omega, x)| \geq \rho_\ell m^{-\varepsilon_1}\} \geq \frac{\mu E_\ell}{2} \right\}.$$

Действуя как в шаге 10, можно доказать существование события Ω'_0 и множества индексов $\mathcal{L}_0(\omega) \subset \{\ell : \ell \geq n^{\varepsilon_2}\}$ таких, что $\Omega'_0 \subset \bigcap_{\ell \in \mathcal{L}_0} \Omega'_\ell$, $P(\Omega'_0) \geq 1 - 4K' m^{-\varepsilon_1}$ и

$$\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq n^{\varepsilon_2}} \mu_\ell \rho_\ell \geq \frac{\sqrt{n}}{32} \quad (42)$$

почти всюду на Ω'_0 . Как в шаге 11 определим множества

$$\Delta_\ell(\omega) := \{x \in E_\ell : |F_n(\omega, x)| \geq m^{-\varepsilon_1} \rho_\ell\}, \quad \ell \geq n^{\varepsilon_2}.$$

По определению множеств Ω'_ℓ имеем $\mu\Delta_\ell \geq \mu E_\ell/2 \equiv \mu_\ell/2$ п.н. на Ω'_ℓ , поэтому существуют подмножества $\Delta'_\ell(\omega) \subset \Delta_\ell(\omega)$ такие, что $\mu\Delta'_\ell = \mu_\ell/2$. Положим $E' := \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}_0} \Delta'_\ell(\omega)$, для $\|\cdot\|_m^*$ -нормы случайного полинома (1) (см. (10)) п.н. на Ω'_0 получим

$$\begin{aligned} \|F_n(\omega, \cdot)\|_m^* &\geq \frac{1}{\mu E'(\omega)} \left(\int_{E'(\omega)} |F_n(\omega, x)| d\mu(x) \right) (1 - (1 - \mu E'(\omega))^m) \\ &\geq \frac{2}{\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \mu_\ell} \left(\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \frac{\mu_\ell}{2} \rho_\ell m^{-\varepsilon_1} \right) \left(1 - \left(1 - \sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \frac{\mu_\ell}{2} \right)^m \right) \\ &= m^{-\varepsilon_1} \left(\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \mu_\ell \rho_\ell \right) \cdot \frac{1 - (1 - t)^m}{2t}, \end{aligned}$$

где

$$t = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_0(\omega)} \frac{\mu_\ell}{2} < Mn^{p_2} 2^{-n^{\varepsilon_2}}$$

(см. (30)). Заметим, что $(1 - y)^m \leq 1 - my/2$ при $y \in (0, 1/m)$, поэтому при достаточно больших $n > n_0(p_1, p_2, M)$ имеем $t^{-1}(1 - (1 - t)^m) > m/2$. Следовательно, с учетом (42) и теоремы 2, получим

$$\|F_n(\omega, \cdot)\|_{m, \infty} > 128^{-1} m^{1-\varepsilon_1} \sqrt{n} \quad \text{п.н. на } \Omega'_0.$$

Теорема 1' доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В условии теоремы 1 условие равномерной ограниченности третьих моментов $E|\xi_i|^3 \leq M^3$ можно ослабить до $E|\xi_i|^{2+\varepsilon} \leq M$ с некоторым $\varepsilon > 0$. При этом константы в неравенствах (7), (8) будут зависеть также от ε . Чтобы доказать соответствующее утверждение, достаточно вместо предложения 1 использовать более тонкую версию центральной предельной теоремы (следствие 18.3 из [23]).

4. Приложения и нерешенные проблемы

4.1. Приложения интегрально-равномерной нормы. В [17] Монтгомери-Смит и Семенов в связи с исследованием строго сингулярных вложений перестановочно-инвариантных пространств в $L_1[0, 1]$ (т.е. пространств, нормы которых инвариантны относительно сохраняющих меру преобразований) высказали одну гипотезу, которую мы сформулируем в следующей, несколько упрощенной форме.

ГИПОТЕЗА 1. Для любого набора функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ из $L_1[0, 1]$ таких, что $\|f_i\|_1 = 1$, существует набор знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, для которого при всех $k = 1, \dots, n$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i \right\|_{2^k}' \equiv \sup_{\substack{\Delta \subset [0, 1] \\ \mu\Delta = 2^{-k}}} \left\{ 2^k \int_{\Delta} \left| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i(x) \right| d\mu(x) \right\} \geq c_0 \sqrt{nk} \quad (43)$$

(см. (11)) с некоторой абсолютной постоянной $c_0 > 0$.

С помощью теоремы 1 можно показать, что гипотеза 1 верна, по крайней мере, если параметр k в неравенстве (43) принимает значения $1, \dots, [\log n]$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Для произвольного набора $\{f_i\}_{i=1}^n \subset L_1[0, 1]$ такого, что $\|f_i\|_1 = 1$, существует последовательность знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, такая, что при всех $k = 1, \dots, [\log n]$ имеет место неравенство (43) с некоторой абсолютной константой $c_0 > 0$.

Доказательство теоремы 3 практически не отличается от доказательства теоремы 5 в [3], с той лишь разницей, что вместо теоремы А, сформулированной во введении, следует применить теорему 1.

Гипотеза 1 в общем виде остается открытой. Заметим, что для $k \asymp n^\sigma$ неравенство (43) не может быть доказано с помощью случайных знаков, поскольку во многих случаях порядок равномерной (и тем более интегрально-равномерной) нормы случайных полиномов (1) ограничен сверху величиной $\sqrt{n \log n}$, что следует, например, из оценки Салема–Зигмунда (2) (см. также теорему В из введения и теорему 3 в [25, гл. 6]).

Покажем теперь, что из оценки интегрально-равномерной нормы можно получить оценку нормы Марцинкевича. Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ возрастающая вогнутая функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Тогда норма в пространстве Марцинкевича функций на отрезке $[0, 1]$ определяется следующим образом (см., например, [17]):

$$\|f\|_{M(\varphi)} := \sup_{0 < t < 1} \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t f^*(s) ds \right\},$$

где f^* – неубывающая перестановка функции f , определяемая равенством

$$f^*(s) := \inf \{ \tau > 0 : \mu\{x \in [0, 1] : f(x) \geq \tau\} < s \}.$$

Как непосредственное следствие оценки (6) или (8) и эквивалентности норм $\|\cdot\|'_m$ и $\|\cdot\|_{m, \infty}$ (см. теорему 2) может быть получена следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть для случайного полинома $F_n(\omega, x)$ вида (1) при $m \leq n$ справедлива оценка (8), а $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ возрастающая вогнутая функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Тогда для нормы Марцинкевича полинома $F_n(\cdot, x)$ справедлива оценка

$$E\|F_n(\omega, x)\|_{M(\varphi)} \geq A\sqrt{n} \max_{m=2, \dots, n} \left\{ \frac{\sqrt{\log m}}{m\varphi(1/m)} \right\}$$

с некоторой константой $A > 0$.

4.2. О возможных обобщениях теоремы 1.

ГИПОТЕЗА 2. Теорема 1 остается верной и для случайных полиномов вида (1) по системам функций $\{f_i\}_1^n$, которые удовлетворяют условию (d) (см. введение) с параметром $p \in [0, 1/2)$ (в теореме 1 предполагается, что $p < 1/12$).

Гипотезу 2 в несколько ослабленной форме можно было бы доказать, если бы мы смогли доказать утверждение следующего типа.

ГИПОТЕЗА 3. Для систем функций $\{f_i\}_1^n$, которые удовлетворяют условию (d) с параметром $p \in [0, 1/2)$ существуют константы $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$, $L > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, выполнено неравенство

$$\int_X \sum_{1 \leq k \leq n^{1/2+\varepsilon}} f_k^*(x) d\mu(x) \leq \text{const} \cdot n^{p+L\varepsilon},$$

здесь $f_k^*(x)$ обозначают упорядоченные по убыванию величины $|f_j(x)|$ в фиксированной точке $x \in X$.

С помощью утверждения гипотезы 3 можно было бы более эффективно провести оценки в шаге 4 доказательства теоремы 1'. Именно "оптимизация" шага 4 наиболее перспективна с точки зрения обобщения теоремы 1 в сторону гипотезы 2.

В [16] сформулирована гипотеза относительно возможности обобщения теоремы 1 на полиномы вида $\sum_k a_k \xi_k f_k$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Salem R., Zygmund A. Some properties of trigonometric series whose terms have random signs // *Acta Math.* 1954. V. 91. P. 245–301.
- [2] Капин В. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
- [3] Grigoriev P. G. Estimates for norms of random polynomials // *East J. Approx.* 2001. V. 7. № 4. P. 445–469.
- [4] Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [5] Marcus M., Pisier G. Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
- [6] Dudley R. M. The series of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes // *J. Funct. Analysis.* 1967. V. 1. № 3. P. 290–330.
- [7] Судаков В. Н. Меры Гаусса, Коши и ε -энтропия // *Докл. АН СССР.* 1969. Т. 185. № 1. С. 43–45.
- [8] Судаков В. Н. Гауссовские случайные процессы и меры телесных углов в гильбертовом пространстве // *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 197. № 1. С. 51–53.
- [9] Судаков В. Н. Геометрические проблемы теории бесконечных вероятностных распределений // *Тр. МИАН.* 1976. Т. 141. С. 3–190.
- [10] Fernique X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Berlin: Springer-Verlag, 1975. (Lecture Notes in Math. V. 480.)
- [11] Slepian D. The one-sided barrier problem for Gaussian noise // *Bell. System Tech. J.* 1962. V. 41. P. 463–501.
- [12] Kashin B., Tzafriri L. Lower estimates for the supremum of some random processes // *East J. Approx.* 1995. V. 1. № 1. P. 125–139.
- [13] Kashin B., Tzafriri L. Lower estimates for the supremum of some random processes, II // *East J. Approx.* 1995. V. 1. № 3. P. 373–377.
- [14] Kashin B., Tzafriri L. Lower estimates for the supremum of some random processes, II // Preprint № 95-85. Bonn: Max-Planck Institut für Mathematik, 1995.
- [15] Григорьев П. Г. Оценки норм случайных полиномов и их приложение // *Матем. заметки.* 2001. Т. 69. № 6. С. 950–954.
- [16] Григорьев П. Г. Случайные и специальные полиномы по общим функциональным системам // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 2002.
- [17] Montgomery-Smith S., Semenov E. M. Embeddings of rearrangement invariant spaces that are not strictly singular // *Positivity.* 2000. V. 4. P. 397–402.
- [18] Chang K. L., Erdős P. On the application of the Borel–Cantelli lemma // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1952. V. 72. P. 179–186.
- [19] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
- [20] Šidak Z. Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions // *J. Amer. Statistic Assoc.* 1967. V. 62. № 318. P. 626–633.
- [21] Šidak Z. On multivariate normal probabilities of rectangles // *Ann. Math. Statistic.* 1968. V. 39. P. 1425–1434.
- [22] Ротарь В. И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме // *Теория вероятн. и ее примен.* 1970. Т. 15. № 4. С. 647–665.
- [23] Бхаттачария Р. Н., Ранго Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.
- [24] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [25] Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.