Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, О подобии самосопряженному некоторым индефинитных операторов Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 147–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:23:33

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПОДОБИИ САМОСОПРЯЖЕННОМУ НЕКОТОРЫХ ИНДЕФИНИТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. С. Костенко

1. Пусть $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ – пространство функций, квадратично суммируемых на оси с весом $|x|^\alpha$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ линейный симметрический оператор вида

$$L_0 = -\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{dom}(L_0) = \{f \in \operatorname{dom}(L) : f(0) = f'(0) = 0\}, \quad (1)$$

где $\operatorname{dom}(L)$ – естественная область определения оператора

$$L = -\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \alpha > -1, \quad (2)$$

$$\operatorname{dom}(L) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha) : f, f' \in W_{1,\operatorname{loc}}^1(\mathbb{R}), Lf \in L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)\}.$$

В заметке изучается вопрос о подобии самосопряженному и нормальному оператору квазиэрмитовых расширений оператора L_0 . Напомним, что операторы A_1 и A_2 , действующие в B -пространстве X с областями определения $\operatorname{dom}(A_1)$ и $\operatorname{dom}(A_2)$ называют *подобными*, если найдется ограниченный и ограниченно обратимый оператор T в пространстве X такой, что $T(\operatorname{dom}(A_1)) = \operatorname{dom}(A_2)$ и $A_2 = T A_1 T^{-1}$.

Для изучения собственных расширений симметрического оператора L_0 используется концепция граничных троек и соответствующих им функций Вейля (основные определения и обозначения см., например, в [1]), а также резольвентный критерий подобия ([2], [3]).

2. Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

где L – самосопряженный дифференциальный оператор, а функция $r(\cdot)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. библиографию в [4]). В работах Билса [4] и Пяткова [5] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. Здесь вместо базисности Рисса изучается их подобие нормальным операторам. Так, Чургус и Найман [6] (случай $\alpha = 0$), а также Фляйге и Найман [7] (для $\alpha > -1$), с помощью теории Крейна–Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна показали, что оператор L вида (2) подобен самосопряженному оператору. Эти результаты обобщались во многих работах (см. [8], [9], а также библиографию в них). В [10] для случая $\alpha = 0$ описаны все квазиэрмитовы расширения оператора L_0 , подобные самосопряженному и нормальному операторам.

Отметим, что известные достаточные условия подобия самосопряженным, выражаемые как в терминах характеристических функций оператора, так и близких к ним объектов (см. [11] и имеющуюся там библиографию), для данных операторов не выполняются.

3. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, x^\alpha)$ минимальный оператор, который соответствует струне Крейна S ,

$$L_0^S := -\frac{d^2}{dm(x)dx}, \quad m(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1, \quad \text{dom}(L_0^S) = P_+(\text{dom}(L_0)). \quad (3)$$

Здесь P_+ – оператор ортогонального проектирования из $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ на $L^2(\mathbb{R}_+, x^\alpha)$.

Следуя [12], обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения

$$-\frac{d^2 u(x)}{dm(x)dx} - \lambda u(x) = 0, \quad x > 0, \quad (4)$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 1, u'(0) = 0$. Через $\psi(x, \lambda)$ обозначается решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0, u'(0) = 1$.

Заметим, что в данном случае существует предел (см. [12])

$$\Gamma(\lambda) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi'(x, \lambda)}{\varphi'(x, \lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

называемый *коэффициентом динамической податливости струны*. Функция $\Gamma(\cdot)$ принадлежит классу Крейна–Стильеса, т.е. допускает интегральное представление

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{s - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{1+s} < +\infty. \quad (6)$$

Здесь $\tau(\cdot)$ – неубывающая функция, заданная на промежутке $[0, +\infty)$.

Определим $\lambda^{1/(2+\alpha)}$ как ветвь многозначной аналитической функции на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_-$, выделяемую условием $(-1 + i0)^{1/(2+\alpha)} = e^{i\pi/(2+\alpha)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Коэффициент динамической податливости $\Gamma(\cdot)$ струны L_0^S вида (3) равен

$$\Gamma(\lambda) = \frac{A}{(-\lambda)^{1/(2+\alpha)}}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

где $A := \Gamma(-1) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $m'(\rho x) = (\rho x)^\alpha = \rho^\alpha m'(x)$ при $\rho > 0$, справедливы следующие соотношения:

$$\varphi(\rho x, \lambda) = \varphi(x, \rho^{\alpha+2}\lambda), \quad \psi(\rho x, \lambda) = \rho\psi(x, \rho^{\alpha+2}\lambda), \quad \rho > 0. \quad (8)$$

Учитывая (5), приходим к равенству $\Gamma(\lambda) = \rho\Gamma(\rho^{\alpha+2}\lambda)$. Полагая здесь $\lambda = -1$, получим

$$\Gamma(-1) = \rho^{1/(\alpha+2)}\Gamma(-\rho), \quad \rho > 0. \quad (9)$$

Из равенства (9) и аналитичности функции $\Gamma(\lambda)$ в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ вытекает (7).

4. Перейдем к формулировке основных утверждений.

ТЕОРЕМА 1. (i) Оператор L_0 вида (1) – замкнутый простой симметрический оператор в $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ с индексами дефекта $n_\pm(L_0) = 2$, $(n_\pm(L_0) := \dim(H \ominus \text{ran}(L_0 \pm iI)))$.

(ii) Совокупность $\Pi = \{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\Gamma_i: \text{dom}(L_0^*) \rightarrow \mathbb{C}^2$ и

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} f'(+0) \\ -f(-0) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f(+0) \\ f'(-0) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

образует граничную тройку оператора L_0^* .

(iii) Функция Вейля, соответствующая тройке Π , имеет вид

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} -1/\Gamma(\lambda) & 0 \\ 0 & -\Gamma(-\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $\Gamma(\cdot)$ определяется равенством (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор L_0^S вида (3) является (см., например, [12]) замкнутым простым симметрическим оператором с индексами дефекта $n_{\pm}(L_0^S) = 1$. Отсюда вытекает (i).

Кроме того (см. [12]),

$$((L_0^S)^* u, v) - (u, (L_0^S)^* v) = u'(+0)\overline{v(+0)} - u(+0)\overline{v'(+0)}, \quad u, v \in \text{dom}((L_0^S)^*). \quad (12)$$

Поэтому для всех $f, g \in \text{dom}(L_0^*)$ справедливо равенство

$$(L_0^* f, g) - (f, L_0^* g) = f'(+0)\overline{g(+0)} + f'(-0)\overline{g(-0)} - f(+0)\overline{g'(+0)} - f(-0)\overline{g'(-0)}. \quad (13)$$

Таким образом, после несложных вычислений, получаем (ii) и (iii).

Так как оператор L_0 имеет конечные индексы дефекта, все его квазиэрмитовы расширения являются почти разрешимыми в смысле [1]. Это означает, что для каждого квазиэрмитова расширения $\tilde{L} \supset L_0$ найдутся граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ оператора L_0 и ограниченный оператор $B \in [\mathcal{H}]$ такие, что $\tilde{L} = L_B := L_0^*|_{\text{dom}(L_B)}$, $\text{dom}(L_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$, т.е.

$$L_B = -\frac{\text{sgn } x}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom}(L_B) = \{f \in \text{dom}(L_0^*) : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\}. \quad (14)$$

Зная функцию Вейля, соответствующую тройке Π вида (10), опишем спектр оператора L_B .

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad |b_{12}| + |b_{21}| \neq 0,$$

и L_B – соответствующее почти разрешимое расширение оператора L_0 вида (14). Пусть также

$$\varphi_B(\lambda) := \det(B - M(\lambda)), \quad (15)$$

где функция $M(\cdot)$ задана равенствами (11) и (7). Тогда

- (i) $\sigma_c(L_B) = \mathbb{R}$ и $\sigma_p(L_B) \cap \mathbb{R} = \emptyset$;
- (ii) $\sigma_p(L_B) \cap \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : \varphi(\lambda) = 0\}$ и $\sigma_p(L_B) \cap \mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \varphi_B^*(\bar{\lambda}) = 0\}$.

Отметим, что функции $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_B^*(\cdot)$ имеют не более двух нулей в $\mathbb{C}_+$.

ТЕОРЕМА 3. (i) Пусть $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$, а функция $\varphi_B(\cdot)$ определена в (15). Тогда оператор L_B подобен нормальному, если и только если выполнены следующие условия:

- а) $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_B^*(\cdot)$ не имеют нулей во множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- б) $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_B^*(\cdot)$ не имеют нулей второго порядка в $\mathbb{C}_+$.

(ii) Оператор L_B подобен самосопряженному, если и только если функции $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_B^*(\cdot)$ не имеют нулей во множестве $\overline{\mathbb{C}_+}$.

Доказательство теоремы использует явный вид резольвенты оператора L_B и основано на применении резольвентного критерия подобия [2], [3] а также теоремы 2 о спектре оператора L_B , и аналогично доказательству для случая $\alpha = 0$, предложенному в [10].

5. Заметим, что для описания расширений, подобных самосопряженному или нормальному оператору, необходимо знать точную константу $A = \Gamma(-1)$ в (7). Однако в некоторых случаях функции $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_B^*(\cdot)$ имеют простой вид и описание расширений, подобных самосопряженному оператору, оказывается несложным.

Пусть матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\varphi_B(\lambda) \equiv b_{12} \cdot b_{21} + e^{-i\pi/(\alpha+2)}, \quad \varphi_B^*(\lambda) \equiv \overline{b_{12} \cdot b_{21}} + e^{-i\pi/(\alpha+2)}, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}. \quad (16)$$

Таким образом, из теоремы 3, с очевидностью вытекает

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad b_{12} \cdot b_{21} \neq e^{\pm i\pi/(\alpha+2)}.$$

Тогда

- (i) $\sigma(L_B) = \sigma_c(L_B) = \mathbb{R}$;
- (ii) оператор L_B подобен самосопряженному.

Отметим, что результат Фляйге–Наймана [7] является частным случаем теоремы 4, так как оператор L вида (2) это оператор L_{B_0} , где

$$B_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ дифференциальную операцию

$$l_c := \frac{1}{|x|^\alpha} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta \right), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (17)$$

где δ – функция Дирака. Оператор A_c , порожденный этой операцией в $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$, задается дифференциальным выражением $A_c y(x) = -y''(x)/|x|^\alpha$ на области определения

$$\text{dom}(A_c) = \{y \in \text{dom}(L_0^*) : y(+0) = y(-0), y'(+0) - y'(-0) = cy(0)\}. \quad (18)$$

Тогда оператор $L_c := JA_c$ ($J: y(x) \rightarrow \text{sgn } x \cdot y(x)$) является расширением вида (14) оператора L_0 , $L_c = L_B$, где

$$B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 5. Оператор

$$L_c = \frac{\text{sgn } x}{|x|^\alpha} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta \right), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

не подобен нормальному точно тогда, когда

$$\text{Re } c = -\frac{1 + \cos(\pi/(\alpha+2))}{\sin(\pi/(\alpha+2))} \cdot |\text{Im } c|. \quad (19)$$

При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если

$$\text{Re } c > -\frac{1 + \cos(\pi/(\alpha+2))}{\sin(\pi/(\alpha+2))} \cdot |\text{Im } c|. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае

$$B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi_B(\lambda) = 1 + e^{-i\pi/(\alpha+2)} + \frac{cA}{\lambda^{1/(\alpha+2)}}, \quad \varphi_{B^*}(\lambda) = 1 + e^{-i\pi/(\alpha+2)} + \frac{\bar{c}A}{\lambda^{1/(\alpha+2)}}. \quad (21)$$

Заметим, что хотя бы один из нулей этих функций находится на вещественной оси точно тогда, когда выполнено условие (19). Если нарушено условие (20), то хотя бы один из нулей этих функций попадает в $\overline{\mathbb{C}_+}$. Осталось применить теорему 2.

7. В этом пункте мы рассмотрим расширение $L_{\tilde{C}}$ вида (14) с

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}.$$

Для вещественных c это расширение обычно трактуют как оператор с δ' -взаимодействием интенсивности c с центром в нуле. Этому соответствует эвристическая запись

$$L_{\bar{C}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta' \right), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (22)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{C}}(\lambda) &= 1 + e^{-i\pi/(\alpha+2)} + \frac{c}{A}(-\lambda)^{1/(\alpha+2)}, \\ \varphi_{\bar{C}^*}(\lambda) &= 1 + e^{-i\pi/(\alpha+2)} + \frac{\bar{c}}{A}(-\lambda)^{1/(\alpha+2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 6. *Оператор $L_{\bar{C}}$ вида (22) подобен нормальному тогда и только тогда, когда не выполнено условие (19), и подобен самосопряженному в точности тогда, когда имеет место неравенство (20).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если у матрицы B хотя бы один из элементов равен нулю, то в этом случае функции $\varphi_B(\cdot)$ и $\varphi_{B^*}(\cdot)$ имеют простой вид и охарактеризовать расположение их нулей не составляет особого труда. Следовательно, для таких расширений L_B можно, как и в теоремах 4–6, получить условия подобия самосопряженным и нормальным операторам, не зависящие от постоянной A в (7).

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за руководство работой и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деркач В. А., Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 4. С. 435–459.
2. Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1985. Т. 37. № 1. С. 49–56.
3. Набоко С. Н. // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 1. С. 16–27.
4. Beals R. // J. Differential Equations. 1985. V. 56. № 3. P. 391–407.
5. Пятков С. Г. // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 4. С. 111–124.
6. Ćurgus B., Najman B. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 1125–1128.
7. Fleige A., Najman B. // Operator Theory Advances Appl. 1998. V. 106. P. 147–155.
8. Карабаш И. М., Маламуд М. М. // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 3. С. 303–307.
9. Фаддеев М. М., Штеренберг Р. Г. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 2. С. 292–303.
10. Карабаш И. М., Костенко А. С. // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 127–131.
11. Маламуд М. М. // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 270. С. 201–241.
12. Кац И. С., Крейн М. Г. // Дополнение II к книге Ф. Аткинсона “Дискретные и непрерывные граничные задачи”. М.: Мир, 1968.