Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О пространстве Фока для систем с линейными связями, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 1, 151–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:02:26

О ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ

О.Ю. Шведов

1. В квантовой теории поля часто встречаются системы со связями: все калибровочные теории относятся к данному типу [1]. Один из возможных способов учесть связи, используемых в теоретической физике, заключается в том, чтобы модифицировать скалярное произведение в пространстве состояний следующим образом [2]:

$$((\Psi, \Psi)) = \left(\Psi, \prod_a \delta(\hat{\Lambda}_a) \Psi \right), \quad (1)$$

где $\hat{\Lambda}_a$ – операторы связей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01062.

В сообщении исследуются свойства пространства Фока со скалярным произведением (1) в случае, если связи $\hat{\Lambda}_a$ линейны по операторам рождения и уничтожения, а также свойства операторов эволюции e^{-iHt} в этом пространстве для случая оператора Гамильтона H , квадратичного по операторам рождения и уничтожения.

2. Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство. Напомним, что *бозонным пространством Фока* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ называется [3] прямая сумма

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Sym } \mathcal{H}^{\otimes n};$$

вектор вида $(1 \in \mathcal{H}^{\otimes 0}, 0, 0, \dots) \equiv |0\rangle$ называется *вакуумным вектором*, операторы рождения и уничтожения $a^{\pm}[f]$ ($f \in \mathcal{H}$) вводятся по формулам

$$\begin{aligned} a^{-}[f] \text{Sym } f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (f, f_i) \text{Sym } f_1 \otimes \dots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \dots \otimes f_n, \\ a^{+}[f] \text{Sym } f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= \sqrt{n+1} \text{Sym } f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n. \end{aligned}$$

Через $S \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$ обозначим множество векторов $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots)$ таких, что

$$\|\Psi\|_m = \max_n n^m \|\Psi_n\| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Нормы (2) задают топологию в S .

3. Рассмотрим $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ – о вещественное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ – множество, совпадающее с $\mathcal{H}$, на котором введена операция умножения на вещественное число и скалярное произведение $(f, g)_{\mathbb{R}} = \text{Re}(f, g)$. Введем на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ следующие структуры: операторнозначную 1-форму $\Omega[f] = -i(a^{+}[f] - a^{-}[f])$ и билинейную форму $\langle f, g \rangle = i((f, g) - (g, f))$. При этом $[\Omega[f]; \Omega[g]] = -i\langle f, g \rangle$.

Введем скалярное произведение на S следующим образом. Пусть $\mathcal{L}_k$ – конечномерное (k -мерное) подпространство $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющее свойству $\langle \varphi, \varphi' \rangle = 0$ при всех $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}_k$, с мерой $d\mu(\varphi)$, инвариантной относительно сдвигов. Положим

$$((\Psi', \Psi)) = \int_{\mathcal{L}_k} d\mu(\varphi) (\Psi', e^{i\Omega[\varphi]}\Psi), \quad \Psi, \Psi' \in S. \quad (3)$$

Если выбрать базис $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ на $\mathcal{L}_k$ и ввести на $\mathcal{L}_k$ координаты по формуле $\varphi = \sum_a \alpha_a \varphi^{(a)}$, то мера $d\mu(\varphi)$ запишется как $J d\alpha_1 \dots d\alpha_k$, а формула (3) в виде

$$((\Psi', \Psi)) = J \int d\alpha_1 \dots d\alpha_k (\Psi', e^{i \sum_a \alpha_a \Omega[\varphi^{(a)}]}\Psi),$$

совпадающем с (1).

ТЕОРЕМА 1. При $\Psi, \Psi' \in S$ интеграл (3) для скалярного произведения сходится. При этом $((\Psi', \Psi))$ непрерывно по Ψ, Ψ' в топологии S , $((\Psi, \Psi)) \geq 0$, а для любых $\Psi, \Psi' \in S$ при $\varphi \in \mathcal{L}_k$ справедливо свойство $((\Psi', \Omega[\varphi]\Psi)) = 0$.

Положим $\Psi \sim 0$, если $((\Psi, \Psi)) = 0$. Пополняя факторпространство $S/\sim$, получаем гильбертово пространство $\bar{S} = S/\sim$, которое и рассматривается в качестве пространства состояний для системы со связями $\Omega[\varphi^{(a)}]$. Назовем его пространством Фока для системы с линейными связями. Некоторые свойства операторов в S , линейных по $a^{\pm}$, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Y \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ и $Y \perp \mathcal{L}_k$. Тогда оператор $\Omega(Y)$ эрмитов на S и сохраняет отношение эквивалентности; оператор $e^{i\Omega(Y)}$ определен на S , сохраняет норму и отношение эквивалентности, однозначно продолжается до унитарного оператора в $\bar{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если Y не косоортогонален $\mathcal{L}_k$, то $\Omega(Y)$ не сохраняет отношение эквивалентности на S .

4. Сопоставим каждому $A \in \text{Sym } \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ и $A^* \in \text{Sym } \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^*$ операторы $\frac{1}{2}a^+ Aa^+ : S \rightarrow S$, $\frac{1}{2}a^- A^* a^- : S \rightarrow S$, $\hat{A} : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}$, $\hat{A}^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$, положив при $A = \sum_{ij} A_{ij} f_i \otimes f_j$, $A^* = \sum_{ij} A_{ij}^* f_i^* \otimes f_j^*$, $A_{ij} = A_{ji}$, $A_{ij}^* = A_{ji}^*$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^+ Aa^+ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} a^+ [f_i] a^+ [f_j], & \hat{A} \varphi^* &\equiv \sum_{ij} M_{ij} \varphi^* [f_i] f_j \in \mathcal{H}, \\ \frac{1}{2}a^- A^* a^- &\equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}^* a^- [f_i] a^- [f_j], & \hat{A}^* \varphi &\equiv \sum_{ij} A_{ij}^* \varphi^* [f_i] f_j \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Сопоставим самосопряженному оператору $\hat{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ оператор $a^+ \hat{B} a^-$ в S вида

$$a^+ \hat{B} a^- \text{Sym } f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \equiv \sum_{i=1}^n \text{Sym } f_1 \otimes \cdots \otimes f_{i-1} \otimes \hat{B} f_i \otimes f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_n, \quad f_s \in D(\hat{B}).$$

Известно [3], что выражение

$$\Psi_M = \exp \left[\frac{1}{2} a^+ M a^+ \right] |0\rangle \quad (4)$$

определяет вектор из S при $\|\hat{M}\| < 1$. Будем называть вектор (4) *гауссовским вектором*.

Обобщим на системы со связями понятие комплексного роста Маслова [4], [5], отвечающего гауссовскому вектору (4). Введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим $\mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}} \equiv \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификацию $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, а также изоморфизм $\mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ вида

$$f' \otimes_{\mathbb{R}} 1 + f'' \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto \begin{pmatrix} f' + i f'' = f \in \mathcal{H} \\ f'^* + i f''^* = \varphi^* \in \mathcal{H}^* \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем отождествлять элементы $\mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ и упорядоченные пары

$$\begin{pmatrix} f \in \mathcal{H} \\ \varphi^* \in \mathcal{H}^* \end{pmatrix}.$$

Все операции, введенные на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, переносятся на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$. Их явный вид следующий.

ЛЕММА 3. В новых обозначениях

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ \varphi^* \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} \varphi \\ f^* \end{pmatrix}, & \left(\begin{pmatrix} f \\ \varphi^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ \chi^* \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} [(f, g) + (\varphi^*, \chi^*)], \\ \left\langle \begin{pmatrix} f \\ \varphi^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ \chi^* \end{pmatrix} \right\rangle &= i[\varphi^* [g] - \chi^* [f]], & \Omega \left[\begin{pmatrix} f \\ \varphi^* \end{pmatrix} \right] &= -i(a^+ [f] - a^- [\varphi]). \end{aligned}$$

Назовем *комплексным S -ростком Маслова* $r(M)$, отвечающим гауссовскому вектору (4), множество всех таких $\chi \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$, что $\Omega[\chi] \Psi_M = 0$ в смысле S ; *комплексным H -ростком Маслова* $\check{r}(M)$ – множество всех таких $\chi \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$, $\chi \perp \mathcal{L}_k$, что $\Omega[\chi] \Psi_M \sim 0$ (равенство нулю понимается в смысле гильбертова пространства $\bar{S}$).

Оказывается, что $r(M)$ является графиком оператора $\widehat{M}$:

$$r(M) = \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{M} \varphi^* \\ \varphi^* \end{pmatrix}, \varphi^* \in \mathcal{H}^* \right\}.$$

Обозначим через $r_{\perp}(M)$ множество всех векторов $r(M)$, косоортогональных $\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Комплексный H -росток Маслова $\check{r}(M)$ представляется в виде прямой суммы $\check{r}(M) = r_{\perp}(M) \oplus \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$.

2) $\check{r} = \check{r}(M)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (а) $\chi \in \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}} \Rightarrow \chi \in \check{r}, \frac{1}{i}\langle \chi, \chi^* \rangle = 0$;
- (б) $\chi \in \check{r}, \chi \notin \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}} \Rightarrow \frac{1}{i}\langle \chi, \chi^* \rangle > 0$;
- (в) $\chi_1, \chi_2 \in \check{r} \Rightarrow \langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$;
- (г) любой элемент $\chi \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, косоортogonalный $\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$, представляется в виде

$$\chi = \chi_+ + \chi_-, \quad \chi_- \in \check{r}, \quad \chi_+ \in \check{r}^*,$$

при этом $\chi_{\pm}$ определены однозначно с точностью до добавления элементов $\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$; определены операторы проектирования

$$\mathcal{P}: \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}(\perp)} \rightarrow \check{r}/\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}, \quad \mathcal{P}^*: \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}(\perp)} \rightarrow \check{r}^*/\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$$

вида $\mathcal{P}\chi = [\chi_-]$, $\mathcal{P}^*\chi = [\chi_+]$;

(д) сужение оператора проектирования $\mathcal{P}$ на

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$$

является оператором Гильберта–Шмидта из $\mathcal{H}$ в гильбертово пространство $\check{r}/\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$ с нормой $\|\chi\|^2 = \frac{1}{i}\langle \chi, \chi^* \rangle$.

3) Пусть подпространство $\check{r} \subset \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}(\perp)}$ удовлетворяет свойствам (а)–(д) п. 2. Тогда для некоторого гауссовского вектора $\check{r} = \check{r}(M)$.

4) Для двух ненулевых гауссовских векторов Ψ_{M_1} и Ψ_{M_2} комплексные H -ростки Маслова совпадают тогда и только тогда, когда $\Psi_{M_1} \sim c\Psi_{M_2}$ для некоторого числового множителя c .

5. Эволюция квантовой системы задается однопараметрической группой e^{-iHt} унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Генератор группы H называется гамильтонианом. В приложениях часто встречается случай гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения:

$$H = \frac{1}{2}a^+ A a^+ + a^+ \hat{B} a^- + \frac{1}{2}a^- A^* a^- + \varepsilon. \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{L}_k \subset D(\hat{B})$, $A \in D(\hat{B}) \otimes D(\hat{B})$, а отображение $L: \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ вида

$$L \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\hat{B}\varphi - i\hat{A}\varphi^* \\ i\hat{A}^*\varphi + i(\hat{B}\varphi)^* \end{pmatrix},$$

удовлетворяет свойству $L\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_k$. Предположим также, что

$$\text{Im } \varepsilon = -\frac{1}{2} \text{Tr } L_0,$$

где L_0 – сужение оператора L на $\mathcal{L}_k$.

ТЕОРЕМА 5. 1) На $S \cap D(a^+ \hat{B} a^-)$ оператор H является существенно самосопряженным. При $M \in D(\hat{B}) \otimes D(\hat{B})$ и $\chi_1, \dots, \chi_p \in D(\hat{B})$ вектор $\Omega[\chi_1] \dots \Omega[\chi_p] \Psi_M$ принадлежит $D(H)$.

2) Пусть

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \varphi^*(t) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \chi(t) = L^{\mathbb{C}} \chi(t). \quad (6)$$

Тогда оператор $\Omega[\chi(t)]$ коммутирует с $i\frac{d}{dt} - H$. При $\varphi_0, f_0 \in D(\widehat{B})$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения (6). Разрешающий оператор

$$u_t: \chi_0 = \begin{pmatrix} f_0 \\ \varphi_0^* \end{pmatrix} \mapsto \chi(t)$$

ограничен и однозначно продолжается на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$. Отображение $u_t = e^{Lt}$ сохраняет кососкалярное произведение и удовлетворяет свойству $u_t \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k$.

6. В конечномерном случае для систем без связей известна теорема Маслова [5] об устойчивости классической системы уравнений в случае существования гауссовской собственной функции у квадратичного оператора Гамильтона. Приведем обобщение этой теоремы на бесконечномерный случай и на системы со связями.

Рассмотрим сужение отображения u_t на факторпространство $\mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle} / \mathcal{L}_k$: ввиду свойства $u_t \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k$ и сохранения кососкалярного произведения такое сужение корректно. На факторпространстве введем норму $\|\chi\| = \inf_{\chi \in [\chi]} \|\chi\|$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть оператор H имеет гауссовскую собственную функцию (4) при $M \in D(\widehat{B})$. Тогда классическая система

$$\frac{d\chi}{dt} = L\chi \quad (7)$$

устойчива в топологии факторпространства $\mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle} / \mathcal{L}_k$: функция $\|u_t \chi_0\|$ ограничена равномерно по t при любом $\chi \in \mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle} / \mathcal{L}_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбор топологии факторпространства является существенным: решение системы (7), рассматриваемое в обычной топологии $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, может оказаться растущим по t .

Приведем схему доказательства теоремы 6. Пусть $H\Psi_M = \varepsilon_0\Psi_M$. Тогда норма вектора

$$e^{-iHt}\Omega[\chi]\Psi_M = \Omega[u_t\chi]e^{-i\varepsilon_0t}\Psi_M \quad (8)$$

должна сохраняться во времени при любом $\chi \in \mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle}$. Но вектор (8) можно представить согласно п. (г) теоремы 4 как

$$e^{-i\varepsilon_0t}[\Omega[\mathcal{P} + u_t\chi]\Psi_M + \Omega[\mathcal{P} - u_t\chi]\Psi_M] = e^{-i\varepsilon_0t}\Omega[\mathcal{P} + u_t\chi]\Psi_M,$$

и сохраняющийся квадрат его нормы равен

$$\frac{1}{i} \langle (\Omega[\mathcal{P} + u_t\chi]\Psi_M)^*, \Omega[\mathcal{P} + u_t\chi]\Psi_M \rangle = \|\Omega[\mathcal{P} - u_t\chi]\Psi_M\|^2.$$

Остается проверить, что оператор $\mathcal{P}_-: \mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle} / \mathcal{L}_k \rightarrow \check{\mathcal{H}} / \mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}$, понимаемый как отображение вещественных гильбертовых пространств, обладает ограниченным обратным. Предположим противное. Тогда для некоторой последовательности $\chi_n \in \mathcal{L}_k^{\langle \perp \rangle} / \mathcal{L}_k$ с единичной нормой $\|\chi_n\| = 1$ справедливо свойство $\|\mathcal{P}_-\chi_n\|_{\check{\mathcal{H}}} \rightarrow 0$. При

$$\chi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ \varphi_n^* \end{pmatrix}$$

эти свойства означают $\|f_n + \varphi_n\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1$, $\|\varphi_n\|^2 - \|f_n\|^2 \rightarrow 0$. Но $\|f_n\| \leq \|\widehat{M}\| \cdot \|\varphi_n\|$, $\|\widehat{M}\| < 1$, поэтому отсюда вытекает, что $\|\varphi_n\| \rightarrow 0$, $\|f_n\| \rightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 2. Ashtekar A. et al. // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6456–6493. 3. Бerezin Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 4. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 5. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shvedov@qs.phys.msu.su

Поступило
16.09.2004