Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Асеев, А. В. Тетенев, А. П. Максимова, Обобщенная метрика Помпейю в проблеме изометрии гиперпространств, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 163–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:10:20

УДК 515.12

ОБОБЩЕННАЯ МЕТРИКА ПОМПЕЙЮ В ПРОБЛЕМЕ ИЗОМЕТРИИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВ

В. В. Асеев, А. В. Тетенев, А. П. Максимова

Для компактного множества на прямой рассматриваются изометрии его гиперпространства, наделенного обобщенной метрикой Помпейю. Доказывается, что любая такая изометрия порождена изометрией базового пространства.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Ковариантный функтор exr в категории $\mathcal{Top}$ сопоставляет топологическому пространству X его *гиперпространство* $\text{exr } X$ – семейство всех непустых компактных подмножеств, наделенное *экспоненциальной топологией* [1, т. 1, гл. 1, § 17, с. 168] (синонимы: топология Вьеториса [2, гл. 2, п. 2.7.20, с. 192] и [3], конечная топология [4], топология Вьеториса–Хаусдорфа; в метрическом случае – топология Хаусдорфа). Для гиперпространств используют и обозначение 2^X (см. [1], [4], [2]).

Очевиден отрицательный ответ на вопрос о том, будет ли любой гомеоморфизм $F: \text{exr } X \rightarrow \text{exr } Y$ *элементарным*, т.е. $F = \text{exr } f$ для некоторого гомеоморфизма $f: X \rightarrow Y$ (пространства X и Y могут даже не быть гомеоморфными друг другу [4, с. 170], [1, т. 2, гл. 4, § 42, с. 53]); простой контрпример – это n -точечное дискретное пространство X , для группы автоморфизмов которого $\text{card } \text{Aut}(X) = n! < \text{card } \text{Aut}(\text{exr } X) = (2^n - 1)!$.

Ограничение функтора exr на подкатегорию $\mathcal{Metr}$ связано с выбором способа метризации гиперпространства, согласованного с экспоненциальной топологией, при котором каноническое вложение $x \rightarrow \{x\}$ является изометрическим. В случае компактных метрических пространств (X, ρ) таковой является *метрика Хаусдорфа* dist на $\text{exr } X$ [1, т. 1, гл. 2, § 21, с. 223; т. 2, гл. 4, § 42.П, с. 54]:

$$\text{dist}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \rho(x, y) \right\} \quad (1)$$

или *метрика Помпейю* [2, гл. 4, п. 4.5.22, замечание, с. 441]:

$$\text{dist}_1(A, B) = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y) + \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \rho(x, y) \right). \quad (2)$$

Ответ на вопрос, элементарна ли любая изометрия $\text{exr } X$ на себя, существенно зависит от структуры базового пространства. Непосредственно проверяется, что для

$X = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^1$, $a_1 < a_2 < a_3$, отображение $F: \text{exr } X \rightarrow \text{exr } X$, переставляющее $\{a_1, a_2, a_3\}$ с $\{a_1, a_3\}$ и тождественное на остальных элементах, является изометрией относительно расстояния dist , но не порождается изометрией пространства X .

Для гиперпространства $\text{exr } \mathbb{R}^n$ всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с хаусдорфовой метрикой dist любая его изометрия на себя является элементарной [5], [6, с. 170]. Аналогичный результат имеется для гиперпространства $\text{exr } \mathbb{T}^n$ над тором $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ с обычной метрикой $\rho(x, y) = \inf\{\|x - y + l\| : l \in \mathbb{Z}^n\}$ на $\mathbb{T}^n$ (см. [7, теорема 3, с. 122]), а также для гиперпространства $\text{exr } S^n$ над сферой S^n в $(n + 1)$ -мерном строго выпуклом гладком нормированном пространстве (см. [7, теорема 4, с. 123]). И наконец, элементарность изометрий гиперпространства $\text{exr } X$ доказана для конечномерных нормированных пространств X со строго выпуклой нормой и для римановых многообразий X (без края) с внутренней метрикой (в частности, для любой выпуклой области $X \subset \mathbb{R}^n$) [8, теорема 4, с. 181].

В этой статье в качестве базового пространства мы рассматриваем произвольное неодноточечное компактное множество $K \subset \mathbb{R}^1$, и для гиперпространства $\text{exr } K$, наделенного *обобщенной метрикой Помпейю*

$$\text{dist}_\alpha(A, B) = \frac{1}{2^{1/\alpha}} \left[\left(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x - y| \right)^\alpha + \left(\sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |x - y| \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} \quad (3)$$

с $1 < \alpha < +\infty$, введенной в п. 2, доказываем в п. 3 элементарность любой его изометрии на себя. Пример с трехточечным множеством показывает, что это утверждение перестает быть верным при использовании классической метрики Хаусдорфа (1), и нам неизвестно, верно ли оно для гиперпространств, наделенных метрикой Помпейю (2), т.е. при $\alpha = 1$. Естественно, остается открытым и вопрос об аналоге основной теоремы для произвольных компактных множеств в $K \subset \mathbb{R}^n$ при $n > 1$.

Всюду в тексте под *изометрией* $g: X \rightarrow Y$ подразумевается изометрическое отображение X на Y , в случае же изометрического отображения v мы говорим об *изометрическом вложении*. Тождественное отображение обозначено символом Id . Для отображения $f: X \rightarrow Y$ символом $\text{exr } f$ обозначается отображение $\text{exr } X \rightarrow \text{exr } Y$, определяемое формулой $(\text{exr } f)(A) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Пустое множество обозначено символом $\emptyset$. Без специальных оговорок используются следующие известные факты: изометрическое вложение компактного метрического пространства в себя всегда сюръективно, т.е. является изометрией [9, гл. 3, § 3, упражнение 30, с. 251]; для компактного метрического пространства X гиперпространство $\text{exr } X$ компактно [1, т. 2, § 42, теорема 1, с. 52].

2. Модификация метрики Помпейю. Следуя [10, с. 479], мы называем *квазиметрикой* функцию расстояния, удовлетворяющую всем аксиомам метрики, кроме аксиомы симметричности. Отметим, что любое билипшицево отображение квазиметрических пространств инъективно (см. [11, теорема 8, с. 136]). Для квазиметрики σ функция $\sigma^*(x, y) := \sigma(y, x)$ задает квазиметрику, *сопряженную* к σ [12, определение 2.2, с. 72]. Пара взаимно сопряженных квазиметрик σ и σ^* естественно порождает метрику на X , если, к примеру, положить $d(x, y) = \max\{\sigma(x, y), \sigma^*(x, y)\}$ или $d(x, y) = \sigma(x, y) + \sigma^*(x, y)$ (см. [12, с. 84–85]).

Имеется общий способ перехода от квазиметрики к метрике в пространстве X . (Заметим, что нас не интересует топология, порожденная на X исходной квазиметрикой, и мы

не решаем задачу метризации пространства X в этой топологии. По поводу квазиметризуемости топологических пространств или метризуемости квазиметрических пространств см., например, [12, теорема 2.8, с. 75] или [13, § 2, шп. 2.2–2.5]). В качестве *симметризатора* рассматривается вещественная неотрицательная функция $P: [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям

- 1) $P(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b = 0$;
- 2) $P(a, b) = P(b, a)$;
- 3) $P(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \leq P(a_1, b_1) + P(a_2, b_2)$;
- 4) если $a_1 < a_2$ и $b_1 \leq b_2$, то $P(a_1, b_1) < P(a_2, b_2)$.

Если при этом

- 5) $P(t, t) = t$ для всех $t \geq 0$,

то P называем *допустимым симметризатором*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Для любой квазиметрики σ на множестве X и для любого симметризатора P функция*

$$(P \circ \sigma)(x, y) := P(\sigma(x, y), \sigma^*(x, y))$$

является метрикой на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость аксиом тождества и симметрии для $P \circ \sigma$ очевидна. Для $x, y, z \in X$, используя аксиому треугольника для квазиметрик σ и σ^* , свойство монотонности 4) и свойство полуаддитивности 3) симметризатора P , получаем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} (P \circ \sigma)(x, z) &= P(\sigma(x, z), \sigma^*(x, z)) \leq P(\sigma(x, y) + \sigma(y, z), \sigma^*(x, y) + \sigma^*(y, z)) \\ &\leq P(\sigma(x, y), \sigma^*(x, y)) + P(\sigma(y, z), \sigma^*(y, z)) = (P \circ \sigma)(x, y) + (P \circ \sigma)(y, z). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В [10, § 5, с. 482] отмечено, что для метрического пространства (X, ρ) формула

$$\sigma(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y) \quad (4)$$

задает квазиметрику в гиперпространстве $\text{exr } X$. За ней мы в дальнейшем тексте закрепим обозначение σ . Используя симметризатор

$$P_\alpha(a, b) = \frac{1}{2^{1/\alpha}} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при } 1 \leq \alpha < +\infty, \quad (5)$$

получаем в силу 2.1 метрику $\text{dist}_\alpha = P_\alpha \circ \sigma$ на $\text{exr } X$, которую в случае $\alpha > 1$ назовем *обобщенной метрикой Помпейю*. (Функция $P_\infty(a, b) = \max\{a, b\}$ не удовлетворяет условию 4) строгой монотонности, и поэтому классическая метрика Хаусдорфа (1) выпадает из дальнейших рассмотрений.)

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Пусть гиперпространства $\text{exr } X$ и $\text{exr } Y$ над компактными метрическими пространствами (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) наделены метриками $P \circ \sigma$ при одном и том же симметризаторе P , и пусть имеется изометрия $F: \text{exr } X \rightarrow \text{exr } Y$. Если $A, B \in \text{exr } X$ таковы, что $A \subset B$ и для некоторой точки $b \in F(B)$ выполнено неравенство $\inf_{x \in F(A)} \rho_2(x, b) \geq \sigma(B, A)$, то $F(A) \subset F(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in F(A) \setminus F(B)$, то

$$\sigma(F(A), F(B)) \geq \inf_{y \in F(B)} \rho_2(a, y) > 0.$$

Так как

$$P(0, \sigma(F(B), F(A))) < (P \circ \sigma)(F(A), F(B)) = (P \circ \sigma)(A, B) = P(0, \sigma(B, A)),$$

то строгая монотонность 4) симметризатора P приводит к противоречию:

$$\sigma(F(B), F(A)) < \sigma(B, A) \leq \inf_{x \in F(A)} \rho_2(x, b) \leq \sup_{y \in F(B)} \inf_{x \in F(A)} \rho_2(x, y) = \sigma(F(B), F(A)).$$

Следовательно, $F(A) \setminus F(B) = \emptyset$, и утверждение доказано.

Следуя [7, с. 118], пару точек x, y компактного метрического пространства (X, ρ) называем *антиподальной парой*, если $\rho(x, y) = \text{diam } X$; при этом точки x и y являются взаимными *антиподами*. Метрическое пространство, в котором каждая точка имеет не более одного антипода, назовем *слабо-антиподальным* пространством. (В определении [7, с. 118] антиподального пространства требовалось, чтобы у каждой точки был в точности один антипод). Очевидно, что изометрия компактных метрических пространств переводит антиподальную пару точек в антиподальную и сохраняет свойство слабой антиподальности. Усиленным аналогом [7, формула (3), с. 118] является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть (X, ρ) – компактное метрическое пространство, P – допустимый симметризатор. Гиперпространство $\text{exr } X$ с метрикой $P \circ \sigma$ слабо-антиподально в точности тогда, когда слабо-антиподально базовое пространство X . Множество всех антиподальных пар в $\text{exr } X$ совпадает с парами одноточечных множеств $\{a\}, \{b\}$, соответствующих антиподальным парам $a, b \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d := \text{diam } X$. Так как $\sigma(A, B) \leq d$ для всех $A, B \in \text{exr } X$, то $(P \circ \sigma)(A, B) \leq P(d, d) = d$. В силу компактности имеется антиподальная пара $a, b \in X$, и

$$(P \circ \sigma)(\{a\}, \{b\}) = P(\rho(a, b), \rho(b, a)) = P(d, d) = d.$$

Следовательно, $\text{diam } \text{exr } X = d$. Если $\rho(a_1, b_1) = d$, то $(P \circ \sigma)(\{a_1\}, \{b_1\}) = P(d, d) = d$, и $\{a_1\}, \{b_1\}$ – антиподальная пара в $\text{exr } X$.

Пусть слабо-антиподально пространство $\text{exr } X$. Тогда из антиподальности пар $a, b \in X$ и $a, c \in X$ следует антиподальность пар $\{a\}, \{b\}$ и $\{a\}, \{c\}$ в $\text{exr } X$, а из слабой антиподальности $\text{exr } X$ следует равенство $\{c\} = \{b\}$, т.е. $c = b$, и мы получаем слабую антиподальность для X .

Пусть теперь слабо-антиподально пространство X . Если $(P \circ \sigma)(A, B) = d$, то в силу строгой монотонности и допустимости симметризатора P выполнено $\sigma(A, B) = \sigma(B, A) = d$. В силу компактности существуют точки $a \in A$ и $b \in B$, для которых $d = \inf_{y \in B} \rho(a, y)$ и $d = \inf_{x \in A} \rho(x, b)$, откуда следует антиподальность в X любой пары a, y для $y \in B$ и любой пары x, b для $x \in A$. В силу слабой антиподальности пространства X это возможно лишь в случае, когда $B = \{b\}$ и $A = \{a\}$. Для двух

антиподальных пар A, B и A, C в $\text{exr } X$ имеем $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$, где пары a, b и a, c антиподальны в X . Следовательно, $b = c$ и поэтому $B = C$, что и доказывает слабую антиподальность $\text{exr } X$. Утверждение доказано.

Компактное слабо-антиподальное метрическое пространство (X, ρ) называем ∂ -антиподальным, если для любого $x \in X$ существует такая антиподальная пара $a, b \in X$, что $\rho(a, b) = \rho(a, x) + \rho(x, b)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X, Y – компактные множества в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемые как метрические пространства с обычным евклидовым расстоянием. Пусть гиперпространства $\text{exr } X, \text{exr } Y$ наделены обобщенной метрикой Помпейю $\text{dist}_\alpha = P_\alpha \circ \sigma$ (см. (3)). Если множество X является ∂ -антиподальным, то для любой изометрии $F: \text{exr } X \rightarrow \text{exr } Y$ существует изометрия $f: X \rightarrow Y$ такая, что $F(\{x\}) = \{f(x)\}$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d := \text{diam } X, x \in X$ и a, b – такая антиподальная пара в X , что $|a - x| + |x - b| = d$. Пусть $F(\{x\}) = Z$. По утверждению 2.3 выполнены равенства $F(\{a\}) = \{a'\}$ и $F(\{b\}) = \{b'\}$, где a', b' – антиподальная пара в Y , т.е. $|a' - b'| = d$. Поэтому при $x = a$ или $x = b$ множество Z является одноточечным. Пусть теперь $x \neq a, b$ и, следовательно, $0 < |a - x| < d, 0 < |x - b| < d$. Из изометричности F следует, что $0 < \text{dist}_\alpha(\{a'\}, Z) < d$ и $0 < \text{dist}_\alpha(\{b'\}, Z) < d$. В частности, для всех $z \in Z$ выполняются неравенства $|z - a'| < d$ и $|z - b'| < d$. Поэтому ортогональная проекция Z' множества Z на прямую, проходящую через точки a' и b' , лежит строго внутри отрезка $[a'b']$. Пусть отрезок $[c_1c_2]$ является выпуклой оболочкой множества Z' и $d = s_1 + l + s_2$, где $s_1 = |c_1 - a'|, l = |c_2 - c_1|, s_2 = |c_2 - b'|$. Заметив, что квазирасстояние σ между множествами не увеличивается при их проекции на прямую, а затем воспользовавшись монотонностью симметризатора P_α и его полуаддитивностью 3), получаем длинное соотношение

$$\begin{aligned} d &\geq (P_\alpha \circ \sigma)(\{a'\}, Z') + (P_\alpha \circ \sigma)(\{b'\}, Z') = P_\alpha(s_1, s_1 + l) + P_\alpha(s_2 + l, s_2) \\ &\geq P_\alpha(s_1 + s_2 + l, s_1 + l + s_2) = P_\alpha(d, d) = d, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$[(s_1)^\alpha + (s_1 + l)^\alpha]^{1/\alpha} + [(s_2 + l)^\alpha + (s_2)^\alpha]^{1/\alpha} = [d^\alpha + d^\alpha]^{1/\alpha}.$$

В двумерном векторном пространстве, наделенном нормой $\|\{x, y\}\| = (|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{1/\alpha}$, где $\alpha > 1$, неравенство треугольника представляется частным случаем неравенства Минковского:

$$(|x_1 + x_2|^\alpha + |y_1 + y_2|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (|x_1|^\alpha + |y_1|^\alpha)^{1/\alpha} + (|x_2|^\alpha + |y_2|^\alpha)^{1/\alpha}, \quad (6)$$

равенство в котором реализуется только в случае коллинеарности векторов $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ (см., например, [14, с. 16]). Усмотрев в длинном соотношении случай равенства в неравенстве (6) для двумерных векторов $\{s_1, s_1 + l\}$ и $\{s_2 + l, s_2\}$, мы получаем условие коллинеарности этих векторов, т.е. равенства $s_1 = k(s_2 + l)$ и $s_1 + l = ks_2$ с некоторым $k \in \mathbb{R}^1$. Но эти равенства возможны лишь при $l = 0$. Следовательно, $c_1 = c_2 = z'$ и $Z' = \{z'\}$. Из того же длинного соотношения следует и равенство

$$(P_\alpha \circ \sigma)(\{a'\}, Z) = (P_\alpha \circ \sigma)(\{a'\}, \{z'\}) = |z' - a'|. \quad (7)$$

Если $y \in Z \setminus \{z'\}$, то $\sigma(Z, \{a'\}) \geq |y - a'| > |z' - a'|$ и $\sigma(\{a'\}, Z) \geq |z' - a'|$, и поэтому $(P_\alpha \circ \sigma)(\{a'\}, Z) > P_\alpha(|z' - a'|, |z' - a'|) = |z' - a'|$, что противоречит (7). Поэтому $Z \setminus \{z'\} = \emptyset$ и $Z = \{z'\}$.

Тем самым доказано, что $F(\{x\})$ – одноточечное множество при любом $x \in X$. Поэтому отображение $f(x) = y$, где $\{y\} = F(\{x\})$, корректно определено и дает требуемую изометрию X на Y . Теорема доказана.

Итак, в классе ∂ -антиподальных компактов $X \subset \mathbb{R}^n$ при использовании обобщенной метрики Помпейю (3) проблема элементарности изометрий гиперпространств сводится к вопросу о тривиальности любой изометрии $F: \exp X \rightarrow \exp X$, тождественной на подпространстве одноточечных множеств. Доказательство теоремы 2.4 не проходит при $\alpha = 1$ и поэтому метрика Помпейю (2), к сожалению, тоже выпадает из дальнейшего рассмотрения.

3. Случай компактных подмножеств на прямой. Так как любое компактное неодноточечное множество $K \subset \mathbb{R}^1$ является ∂ -антиподальным, то при использовании обобщенной метрики Помпейю (3) описание изометрий гиперпространств $\exp K_1 \rightarrow \exp K_2$ над компактами $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^1$ сводится теоремой 2.4 к вопросу о тривиальности изометрий $F: \exp K_1 \rightarrow \exp K_1$, тождественных на подпространстве одноточечных множеств, ответ на который будет дан теоремой 3.3. Далее (по умолчанию) предполагается, что гиперпространство $\exp K$ наделено обобщенной метрикой Помпейю $\text{dist}_\alpha = P_\alpha \circ \sigma$. Для компактных множеств $A \subset \mathbb{R}^1$ используем обозначения $\min A = \min\{x : x \in A\}$ и $\max A = \max\{x : x \in A\}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^1$ – неодноточечное компактное множество и изометрия $F: \exp K \rightarrow \exp K$ тождественна на одноточечных множествах. Тогда $\min F(A) = \min A$ и $\max F(A) = \max A$ для всех $A \in \exp K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \min K$, $b = \max K$, $x_0 = \min A$, $x_1 = \max A$, $l = |x_1 - x_0|$, $y_0 = \min F(A)$, $y_1 = \max F(A)$. Из равенств

$$\text{dist}_\alpha(F(A), \{x_0\}) = \text{dist}_\alpha(A, \{x_0\}) = P_\alpha(|x_1 - x_0|, 0) = 2^{-1/\alpha}l$$

следует, что $\sigma(F(A), \{x_0\}) \leq l$ и $F(A) \subset [x_0 - l, x_1]$. Аналогично, сравнив расстояния от $F(A)$ и A до $\{x_1\}$, получим включение $F(A) \subset [x_0, x_1 + l]$, которое вместе с предыдущим дает оценки $x_0 \leq y_0$, $y_1 \leq x_1$. Применив то же рассуждение к обратной изометрии F^{-1} и компакту $F(A)$, получим включение $A \subset [y_0, y_1]$ и неравенства $y_0 \leq x_0$, $x_1 \leq y_1$, которые вместе с предыдущими оценками приводят к равенствам $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^1$ – неодноточечное компактное множество и изометрия $F: \exp K \rightarrow \exp K$ тождественна на одноточечных множествах. Тогда $F(A) = A$ для любого конечного множества $A \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $n = \text{card } A$. Для $n = 1$ заключение леммы тривиально. Пусть известно, что для любого неодноточечного компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, любой изометрии $F: \exp K \rightarrow \exp K$, тождественной на одноточечных множествах, и любого множества $A \subset K$ с $\text{card } A \leq n$ выполняется равенство $F(A) = A$.

1) Докажем, что для любого неодноточечного компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, любой изометрии $F: \exp K \rightarrow \exp K$, тождественной на одноточечных множествах, и любого $A \subset K$ с

$\text{card } A \leq (n+1)$ справедливо включение $F(A) \supset A$. Пусть $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset K$ и $a_0 < \dots < a_n$. Для $B = A \setminus \{a_n\}$ по предположению индукции имеем равенство $F(B) = B$. Лемма 3.1 дает равенства $a_0 = \min A = \min F(A)$, $a_n = \max A = \max F(A)$, из которых следует, что $a_0, a_n \in F(A)$. К включению $B \subset A$ и точке $a_n \in F(A)$, для которой

$$\inf_{x \in F(B)=B} |x - a_n| = |a_n - a_{n-1}| \geq \sigma(A, B) = |a_n - a_{n-1}|,$$

применяем утверждение 2.2 и получаем включение $B = F(B) \subset F(A)$, из которого следует, что $A = B \cup \{a_n\} \subset F(A)$.

2) Докажем, что для любого неодноточечного компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, любой изометрии $F: \text{exp } K \rightarrow \text{exp } K$, тождественной на одноточечных множествах, и любого $A \subset K$ с $\text{card } A \leq (n+1)$ точка $\max F(A)$ является изолированной в $F(A)$. Допустим противное. Тогда для некоторых $K, F, A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset K$, где $a_0 < \dots < a_n$, найдется $h \in (a_{n-1}, a_n) \cap F(A)$. Положим $H = F(A) \cap [a_0, h]$ и $D = H \cup \{a_n\}$. К изометрии F^{-1} , включению $H \subset F(A)$ и точке $a_n \in A = F^{-1}(F(A))$, для которой

$$\begin{aligned} \inf_{x \in F^{-1}(H)} |a_n - x| &= |a_n - \max F^{-1}(H)| = |a_n - \max H| = |a_n - h| \\ &\geq \sigma(F(A), H) = |a_n - h|, \end{aligned}$$

применяем утверждение 2.2 и получаем включение $F^{-1}(H) \subset A$. Так как $a_n \notin F^{-1}(H) \subset [a_0, h]$, то $F^{-1}(H) \subset \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, что тотчас приводит к противоречию: $h = \max H = \max F^{-1}(H) \leq a_{n-1}$. Следовательно, точка a_n не может быть предельной для $F(A)$.

3) Наконец, докажем, что для любого неодноточечного компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, любой изометрии $F: \text{exp } K \rightarrow \text{exp } K$, тождественной на одноточечных множествах, и любого множества $A \subset K$ с $\text{card } A \leq (n+1)$ выполняется равенство $F(A) = A$. Пусть $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset K$ и $a_0 < \dots < a_n$. Так как на этапе 2) установлено, что точка $a_n = \max F(A)$ изолирована в $F(A)$, то множество $C = F(A) \setminus \{a_n\}$ компактно. Положим $c = \max C$ и, применив лемму 3.1 к изометрии F^{-1} , получим равенства $\min F^{-1}(C) = \min C = a_0$, $\max F^{-1}(C) = \max C = c < a_n$. К изометрии F^{-1} , включению $C \subset F(A)$ и точке $a_n \in A = F^{-1}(F(A))$, для которой

$$\inf_{x \in F^{-1}(C)} |a_n - x| = |a_n - c| \geq \sigma(A, F^{-1}(C)) = |a_n - c|,$$

применяем утверждение 2.2 и получаем включение $F^{-1}(C) \subset A$, из которого следует, что множество $F^{-1}(C) \subset \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ имеет не более n точек. По предположению индукции $C = F(F^{-1}(C)) = F^{-1}(C)$ и, следовательно, $C \subset \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Поэтому $F(A) = C \cup \{a_n\} \subset A$. Вместе с включением $F(A) \supset A$, доказанным на первом этапе, это приводит к требуемому равенству $F(A) = A$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть K_1, K_2 – неодноточечные компактные множества в $\mathbb{R}^1$, гиперпространства над которыми наделены обобщенной метрикой Помпейю dist_α . Тогда любая изометрия $F: \text{exp } K_1 \rightarrow \text{exp } K_2$ элементарна, т.е. $F = \text{exp } f$ для некоторой изометрии $f: K_1 \rightarrow K_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 2.4 дает изометрию $f: K_1 \rightarrow K_2$ такую, что $F(\{x\}) = \{f(x)\}$ для всех $x \in K_1$. Отображение $\exp f: \exp K_1 \rightarrow \exp K_2$ является изометрией, совпадающей с F на подпространстве одноточечных множеств. Следовательно, изометрия $G = (\exp f)^{-1} \circ F: \exp K_1 \rightarrow \exp K_1$ тождественна на одноточечных множествах. В силу леммы 3.2 изометрия G тождественна на подпространстве $\mathcal{P}$ всех конечных подмножеств компакта K_1 . В силу непрерывности изометрии G и плотности подпространства $\mathcal{P}$ в $\exp K_1$ (см. [1, т. 1, § 17, теорема 4, с. 171]), $G = \text{Id}$ и, следовательно, $F = \exp f$. Теорема доказана.

Вопрос об изометрических вложениях $F: \exp K_1 \rightarrow \exp K_2$ представляется более сложным, как показывает следующий пример. Пусть $K_1 = [0, 1]$, $K_2 = [0, 4]$ и $F: \exp K_1 \rightarrow \exp K_2$ задано формулой $F(A) = A \cup T$, где T – фиксированный компакт $T \subset [3, 4]$. Легко убедиться, что F – изометрическое вложение, но оно не порождается никаким изометрическим вложением $f: K_1 \rightarrow K_2$.

Полное описание изометрий гиперпространства над произвольным компактным множеством в $\mathbb{R}^1$ позволяет получить теоремы устойчивости для квазиизометрических вложений в гиперпространствах, наделенных обобщенной метрикой Помпейю, которые имеют естественные приложения в теории многозначных функций и селекторов (см. [1, т. 2, гл. 4, § 43, с. 82]), а также в некоторых задачах интервального анализа.

Авторы глубоко признательны рецензенту за сделанные им замечания, которые способствовали значительному улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куратовский К. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.
- [2] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [3] Заричный М. М., Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категориях топологических пространств // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 47–95.
- [4] Michael E. Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 51. № 1. P. 152–182.
- [5] Gruber P. M. The space of compact subsets of E^d // Geom. Dedicata. 1979. V. 8. P. 87–90.
- [6] Gruber P. M., Letti G. Isometries of the space of compact subsets of E^d // Stud. Sci. Math. Hungar. 1979. V. 14. P. 169–181.
- [7] Gruber P. M., Tichy R. Isometries of spaces of compact or compact convex subsets of metric manifolds // Monat. Math. 1982. V. 93. № 2. P. 117–126.
- [8] Bandt Ch. On the metric structure of hyperspaces with Hausdorff metric // Math. Nachr. 1986. V. 129. P. 175–183.
- [9] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
- [10] Albert G. E. A note on quasi-metric spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. V. 47. № 6. P. 479–482.
- [11] Reilly I. L., Subrahmanyam P. V., Vamanamurthy M. K. Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces // Monat. Math. 1982. V. 93. № 2. P. 127–140.
- [12] Kelly J. C. Bitopological spaces // Proc. London. Math. Soc. 1963. V. 13. P. 71–83.
- [13] Sion M., Zelmer G. On quasi-metrizability // Canad. J. Math. 1967. V. 19. № 6. P. 1243–1249.
- [14] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1988.

(В. В. Асеев) Институт математики СО РАН
(А. В. Тетенев, А. П. Максимова) Горно-Алтайский
государственный университет
E-mail: btp@math.nsc.ru, atet@mail.gasu.ru

Поступило
10.07.2002
Исправленный вариант
15.11.2004