Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Черданцев, Асимптотика собственного значения оператора Лапласа в области с сингулярно возмущенной границей, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 299–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:06:38

УДК 571.958

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ С СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. И. Черданцев

В работе рассматривается задача на собственные значения оператора Лапласа в трехмерной области с сингулярно возмущенной границей. Возмущение осуществляется заданием дополнительного граничного условия Дирихле на малой незамкнутой поверхности находящейся внутри области. Исследуется сходимость и асимптотическое поведение простых собственных значений задачи.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи и формулировка результата. Известно (см., например, [1]), что волновая функция, описывающая состояние свободной частицы, удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + E\psi = 0,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса частицы, а E – энергия частицы. В случае, когда частица находится в ограниченной области, ее волновая функция на границе этой области обращается в нуль. Если внутри области имеется некоторое препятствие, то на нем волновая функция также обращается в нуль. Данная задача соответствует краевой задаче на собственные значения оператора Лапласа с граничным условием Дирихле. В настоящей работе исследуется поведение собственных значений задачи в случае, когда область является трехмерной, а препятствие имеет нулевую толщину и малые линейные размеры: $\gamma_\varepsilon = \{x : x\varepsilon^{-1} \in \gamma\}$, где γ – поверхность, диффеоморфная открытому кругу и содержащая начало координат, а $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. При $\varepsilon \rightarrow 0$ поверхность γ_ε стягивается к началу координат. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – односвязная ограниченная область, содержащая начало координат, с границей $\Gamma \in C^\infty$. Обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \gamma_\varepsilon$. Рассматривается следующая краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1.1)$$

которую мы будем называть *возмущенной*. Здесь $\lambda_\varepsilon = (2m/\hbar^2)E$. Задачу

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0 \psi_0 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad (1.2)$$

будем называть *предельной*.

Основной результат данной работы сформулируем в следующем утверждении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, программы “Ведущие научные школы” и программы “Университеты России”.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если λ_0 – простое собственное значение предельной задачи, то существует единственное и простое собственное значение λ_ε возмущенной задачи, сходящееся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к λ_0 , а его асимптотика имеет вид*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

$$\lambda_1 = 4\pi\psi_0^2(0)c(\gamma). \quad (1.4)$$

Здесь ψ_0 – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 , а $c(\gamma) > 0$ – некоторая константа, зависящая от геометрии поверхности γ , которая будет определена ниже.

Данное возмущение носит сингулярный характер. Поэтому при построении асимптотики используется метод согласования асимптотических разложений [2]. Заметим, что асимптотика собственных значений в области с малым отверстием строилась в [3].

2. Сходимость собственного значения возмущенной задачи. В данном пункте будет доказана сходимость собственных значений и собственных функций возмущенной задачи к соответствующим собственным значениям и собственным функциям предельной задачи. Используемая схема доказательства аналогична примененной в [4]–[7] для других типов сингулярных возмущений краевых задач.

Будем использовать следующие обозначения: $L_2(G)$ и $W_2^1(G)$ – пространства Соболева с нормами $\|\cdot\|_{0,G}$, $\|\cdot\|_{1,G}$ и скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{0,G}$, $(\cdot, \cdot)_{1,G}$ соответственно. Замыкание в норме $W_2^1(G)$ функций из $C^\infty(\bar{G})$, обращающихся в нуль в окрестности множества g , обозначим $W_{2,0}^1(G, g)$. Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f \quad \text{в } \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.1)$$

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon. \quad (2.2)$$

Решения краевых задач будем понимать в обобщенном смысле (см. [8], [9]). То есть, пусть $f \in L_2(\Omega)$. Решением задачи (2.1) будем называть элемент $u_0 \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$(\nabla u_0, \nabla \eta)_{0,\Omega} = \lambda(u_0, \eta)_{0,\Omega} + (f, \eta)_{0,\Omega}$$

при любом $\eta \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma)$. Учитывая, что $W_{2,0}^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \subset W_2^1(\Omega)$, решением задачи (2.2) назовем элемент $u_\varepsilon \in W_{2,0}^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющий равенству

$$(\nabla u_\varepsilon, \nabla \eta)_{0,\Omega} = \lambda(u_\varepsilon, \eta)_{0,\Omega} + (f, \eta)_{0,\Omega} \quad (2.3)$$

при любом $\eta \in W_{2,0}^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть K – компакт в комплексной плоскости, не содержащий собственных значений предельной задачи (1.2). Тогда*

- а) *существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любом $\lambda \in K$ существует единственное решение u_ε задачи (2.2) и справедлива равномерная по ε и λ оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}; \quad (2.4)$$

- б) *имеет место сходимость*

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [9]), что для доказательства существования единственного решения задачи (2.2) достаточно показать справедливость оценки (2.4). Допустим противное, т.е. существует такая последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и такие последовательности f_k, λ_k , что для решений задачи (2.2) при $\varepsilon = \varepsilon_k$, $f = f_k, \lambda = \lambda_k$ имеет место неравенство

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{1,\Omega} \geq k \|f_k\|_{0,\Omega}. \quad (2.6)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\|u_{\varepsilon_k}\|_{0,\Omega} = 1$. Заменяя в (2.3) η на u_ε и прибавляя $(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{0,\Omega}$ к обеим частям равенства, легко получить априорную оценку

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq (1 + |\lambda|)(\|f\|_{0,\Omega} + \|u_\varepsilon\|_{0,\Omega}). \quad (2.7)$$

Тогда, подставив (2.6) в (2.7), получим

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{1,\Omega} \leq C. \quad (2.8)$$

Заметим, что из (2.8) и (2.6) следует сходимость

$$\|f_k\|_{0,\Omega} \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Из (2.8) следует, что множество u_{ε_k} ограничено в $W_2^1(\Omega)$, а значит, слабо компактно в $W_2^1(\Omega)$ и компактно в $L_2(\Omega)$. Следовательно, существует подпоследовательность ε_{k_m} такая, что

$$\lambda_{k_m} \rightarrow \lambda_* \in K, \quad (2.10)$$

$$u_{\varepsilon_{k_m}} \rightarrow u_* \neq 0 \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } W_2^1(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Пусть η – произвольная функция из $W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma)$, обозначим $\eta_\varepsilon = \eta(1 - \chi(|x|\varepsilon^{-1}))$, где $\chi(t)$ – срезающая функция из класса C^∞ , равная единице при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность $\bar{\gamma}$ содержится в шаре единичного радиуса. Тогда легко видеть, что $\eta_\varepsilon \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ и $\eta_\varepsilon \rightarrow \eta$ в норме $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Переходя в равенстве (2.3) при $\eta = \eta_\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_{k_m}, \lambda = \lambda_{k_m}$ и $f = f_{k_m}$ к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая (2.9), (2.10) и (2.11), получаем

$$(\nabla u_*, \nabla \eta)_{0,\Omega} = \lambda_*(u_*, \eta)_{0,\Omega}.$$

Так как $u_* \neq 0$, то λ_* является собственным значением предельной задачи – получили противоречие. Таким образом, оценка (2.4) верна и в силу альтернативы Фредгольма существует единственное решение задачи (2.2).

Теперь покажем, что при любом фиксированном $\lambda \in K$ имеет место сходимость (2.5). Пусть ε_k – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Из (2.4), слабой компактности ограниченного множества в $W_2^1(\Omega)$ и компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ получаем, что существует подпоследовательность ε_{k_m} такая, что при $m \rightarrow \infty$ справедливы сходимости (2.11). Далее, вновь переходя к пределу в (2.3) при $\eta = \eta_\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_{k_m}$ в силу единственности решения предельной задачи получаем, что $u_* = u_0$. Подставляя в (2.3) $\eta = u_{\varepsilon_{k_m}}$ и учитывая сходимость в $L_2(\Omega)$, получаем

$$\|u_{\varepsilon_{k_m}}\|_{1,\Omega} \rightarrow \|u_0\|_{1,\Omega}.$$

Отсюда и из слабой сходимости $u_{\varepsilon_{k_m}}$ в норме $W_2^1(\Omega)$ следует сильная сходимость в этой норме. В силу произвола в выборе последовательности ε_n получаем, что сходимость (2.5) имеет место. Лемма доказана.

Пользуясь леммой, докажем сходимость собственных значений возмущенной задачи.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.2), тогда к нему сходится единственное и простое собственное значение λ_ε возмущенной задачи (1.1), а соответствующая ему собственная функция ψ_ε сходится к ψ_0 сильно в $W_2^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ содержит все собственные значения задачи (1.2), причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Существует последовательность соответствующих ортонормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$, при этом функции

$$\frac{\psi_n}{\sqrt{1 + \lambda_n}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

ортонормированы в $W_2^1(\Omega)$ (см., например, [9]). Любая функция из $W_2^1(\Omega)$, в частности u_0 , раскладывается в ряд Фурье по ортонормированному базису (2.12):

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, \psi_n)_{1,\Omega} \frac{\psi_n}{1 + \lambda_n}.$$

Подставив это разложение в правую часть равенства

$$(u_0, \psi_n)_{1,\Omega} = (1 + \lambda)(u_0, \psi_n)_{0,\Omega} + (f, \psi_n)_{0,\Omega},$$

легко получить следующую формулу:

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \psi_n)_{0,\Omega}}{\lambda_n - \lambda} \psi_n. \quad (2.13)$$

Аналогично,

$$u_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \psi_{\varepsilon,n})_{0,\Omega}}{\lambda_{\varepsilon,n} - \lambda} \psi_{\varepsilon,n}, \quad (2.14)$$

где $\lambda_{\varepsilon,n}$ и $\psi_{\varepsilon,n}$ – собственные значения и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи (1.1).

Обозначим через $S(t, z)$ открытый круг на комплексной плоскости радиуса t с центром в точке z . Так как множество собственных значений предельной задачи не имеет конечных точек накопления (см., например, [9]), то существует такое $T > 0$, что $\overline{S(t, \lambda_0)}$ при $t < T$ не содержит собственных значений предельной задачи кроме λ_0 . Следовательно, в силу леммы для достаточно малых ε при $\lambda \in \partial S(t, \lambda_0)$ задача (2.2) имеет единственное решение. Из (2.5) и теоремы Лебега вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} \|u_\varepsilon(x, \lambda) - u_0(x, \lambda)\|_{1,\Omega} d\lambda \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_0(x, \lambda) d\lambda \quad \text{в норме } W_2^1(\Omega). \quad (2.15)$$

Из комплексного анализа известно, что интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов функции, умноженной на $2\pi i$. Возьмем $f = \psi_0$, учитывая (2.13) получим, что

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_0(x, \lambda) d\lambda = 2\pi i \psi_0.$$

Из (2.14), (2.15) и последнего равенства вытекает, что при достаточно малых ε интеграл $\int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda$ отличен от нуля и существует собственное значение $\lambda_\varepsilon \in S(t, \lambda_0)$ возмущенной задачи, которое в силу произвола в выборе t сходится к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство сходимости $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $W_2^1(\Omega)$ проводится аналогично доказательству сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $W_2^1(\Omega)$ в лемме 2.1.

Покажем, что если собственное значение λ_0 простое, то к нему сходится единственное и простое собственное значение λ_ε . Допустим, что на некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ существует еще одно собственное значение $\lambda'_{\varepsilon_n} \rightarrow \lambda_0$. Соответствующая, нормированная в $L_2(\Omega)$, собственная функция ψ'_{ε_n} ортогональна ψ_{ε_n} . Но, в силу сходимости ψ'_{ε_n} и ψ_{ε_n} к ψ_0 , $(\psi'_{\varepsilon_n}, \psi_{\varepsilon_n})_{0, \Omega} \rightarrow (\psi_0, \psi_0)_{0, \Omega} = 1$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит ортогональности ψ'_{ε_n} и ψ_{ε_n} . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем, при строгом обосновании асимптотики понадобится следующая оценка решения задачи (2.2) при λ , близких к λ_0 :

$$\|u_\varepsilon\|_{1, \Omega} \leq \frac{C}{|\lambda_\varepsilon - \lambda|} \|f\|_{0, \Omega}, \quad (2.16)$$

которую легко получить из (2.14).

3. Доказательство теоремы 1.1. В силу теоремы 2.1 $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$ и $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$. Поэтому λ_0 и ψ_0 являются главными членами асимптотик λ_ε и ψ_ε . Однако функция ψ_0 не удовлетворяет граничному условию Дирихле на γ_ε . Следуя методу согласования асимптотических разложений [2]–[5], [7] в малой окрестности γ_ε , приближение функции ψ_ε будем искать зависящим от растянутых переменных $\xi = x\varepsilon^{-1}$. Для этого разложим функцию $\psi_0(x)$ в нуле в ряд Тейлора:

$$\psi_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x), \quad x \rightarrow 0,$$

где $P_i(x)$ – однородный полином степени i . Заметим, что $P_0(\xi) \equiv \psi_0(0)$. В переменных ξ этот ряд примет вид

$$\psi_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i(\xi), \quad \varepsilon \rho = \varepsilon|\xi| \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Принимая во внимание (3.1) и следуя методу согласования асимптотических разложений, приближение функции $\psi_\varepsilon(x)$ в малой окрестности γ_ε будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \widehat{v}_\varepsilon(\xi) = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i v_i(\xi), \quad (3.2)$$

$$v_i(\xi) \sim P_i(\xi), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Функции $v_i(\xi)$ будем считать определенными в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}$. Подставляя (3.2) в (1.1), для функций v_0 и v_1 получим краевые задачи

$$\Delta v_i = 0 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}, \quad v_i = 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma, \quad i = 0, 1. \quad (3.4)$$

Для обоснования асимптотики λ_ε от функций v_2 и v_3 достаточно потребовать, чтобы они удовлетворяли краевым задачам

$$-\Delta v_i = \lambda_0 P_{i-2} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}, \quad v_i = 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma, \quad i = 2, 3. \quad (3.5)$$

Решение задач (3.4) и (3.5) будем искать в виде

$$v_i = \hat{v}_i + (1 - \chi(\rho))P_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда на функции $\hat{v}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, получим краевые задачи

$$-\Delta \hat{v}_i = f_i \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}, \quad \hat{v}_i = 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= -\Delta \chi \cdot P_0, & f_1 &= -\Delta \chi \cdot P_1 - \nabla \chi \cdot \nabla P_1, \\ f_i &= -\Delta \chi \cdot P_i - \nabla \chi \cdot \nabla P_i + \lambda_0 \cdot \chi \cdot P_{i-2}, & i &= 2, 3. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано в [10, глава 16], можно показать, что, если f — функция из $L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma})$ с компактным носителем, то существует единственное решение задачи

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}, \quad u = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Отсюда следует, что задачи краевые (3.6) имеют единственные решения, причем их асимптотика на бесконечности имеет вид (см. [2])

$$\hat{v}_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X_j^{(i)}(\xi)}{\rho^{2j+1}}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где $X_j^{(i)}$ — однородные полиномы степени j . Таким образом, задачи (3.4), (3.5) имеют решения с асимптотикой

$$v_i(\xi) = P_i(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X_j^{(i)}(\xi)}{\rho^{2j+1}}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Покажем, что $X_0^{(0)}$ отличен от нуля (этот факт важен для построения асимптотики λ_ε). Пусть B_R — открытый шар радиуса R . Проинтегрируем $v_0 \Delta v_0$ по частям по области $B_R \setminus \overline{\gamma}$:

$$\int_{B_R \setminus \overline{\gamma}} v_0 \Delta v_0 \, d\xi = - \int_{B_R \setminus \overline{\gamma}} \nabla v_0 \nabla v_0 \, d\xi + \int_{\gamma} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \, ds + \int_{\rho=R} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \, ds.$$

Интеграл слева и второе слагаемое справа равны нулю в силу того, что функция v_0 является решением задачи (3.4). Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и подставляя вместо функции v_0 ее асимптотику, получим

$$X_0^{(0)} = -\frac{1}{4\pi\psi_0(0)} \|\nabla v_0\|_{0,R^3 \setminus \overline{\gamma}}^2.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta V = 0 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\gamma}, \quad V = 1 \quad \text{при } \xi \in \gamma.$$

Она имеет единственное решение в классе убывающих на бесконечности функций с асимптотикой $c(\gamma)/\rho + O(\rho^{-2})$. Легко видеть, что $v_0 = \psi_0(0)(1 - V)$, поэтому предпоследнее равенство можно переписать в виде

$$X_0^{(0)} = -\frac{\psi_0(0)}{4\pi} \|\nabla V\|_{0,R^3 \setminus \overline{\gamma}}^2 = -\psi_0(0)c(\gamma), \quad c(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \|\nabla V\|_{0,R^3 \setminus \overline{\gamma}}^2 > 0.$$

Это представление $X_0^{(0)}$ более наглядно, так как значение $c(\gamma)$ зависит только от вида поверхности γ .

Переписывая асимптотику $\hat{v}_\varepsilon(\xi)$ в переменных x , получаем

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \hat{v}_\varepsilon(x\varepsilon^{-1}) = \sum_{i=0}^3 P_i(x) - \varepsilon \frac{\psi_0(0)c(\gamma)}{r} + O(\varepsilon^2 r^{-1}), \quad r\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty,$$

где $r = |x|$. Следуя методу согласования асимптотических разложений, собственную функцию вне малой окрестности γ_ε и собственное значение будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \hat{\psi}_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon\psi_1(x), \tag{3.8}$$

$$\psi_1(x) \sim -\frac{\psi_0(0)c(\gamma)}{r}, \quad r \rightarrow 0,$$

$$\lambda_\varepsilon \approx \hat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.8) и (3.9) в (1.1), получим краевую задачу

$$-\Delta\psi_1 = \lambda_0\psi_1 + \lambda_1\psi_0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad \psi_1 = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma. \tag{3.10}$$

Легко видеть, что функция

$$Y = -\psi_0(0)c(\gamma) \frac{\cos(\sqrt{\lambda_0}r)}{r},$$

имеет асимптотику

$$-\frac{\psi_0(0)c(\gamma)}{r} + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

и удовлетворяет уравнению

$$-\Delta Y = \lambda_0 Y \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Поэтому функцию ψ_1 будем искать в виде

$$\psi_1 = \chi(r)Y + \hat{Y}.$$

Подставив это равенство в (3.10), получим

$$-\Delta \hat{Y} = \lambda_0 \hat{Y} + f + \lambda_1 \psi_0 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \hat{Y} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma,$$

где $f = \nabla Y \nabla \chi + Y \Delta \chi$. Известно, что для существования единственного решения этой краевой задачи, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(f + \lambda_1 \psi_0, \psi_0)_\Omega = 0.$$

Таким образом, существует λ_1 , а именно $\lambda_1 = -(f, \psi_0)_\Omega$, при котором задача (3.10) имеет единственное решение с асимптотикой

$$\psi_1 = -\frac{\psi_0(0)c(\gamma)}{r} + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Покажем справедливость формулы (1.4) для λ_1 . Умножая уравнение (3.10) на ψ_0 , интегрируя по области $\Omega \setminus B_R$ и применяя формулу Остроградского, получим

$$\int_{r=R} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \psi_0 ds + \int_{\Omega \setminus B_R} \nabla \psi_1 \nabla \psi_0 dx = \int_{\Omega \setminus B_R} \lambda_0 \psi_1 \psi_0 dx + \int_{\Omega \setminus B_R} \lambda_1 \psi_0 \psi_0 dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow 0$, подставляя вместо ψ_0 и ψ_1 их асимптотики и учитывая, что $\int_\Omega \nabla \psi_1 \nabla \psi_0 dx = \int_\Omega \lambda_0 \psi_1 \psi_0 dx$, получим

$$\lambda_1 = 4\pi \psi_0^2(0)c(\gamma).$$

Теперь перейдем к строгому обоснованию построенной асимптотики собственного значения.

ЛЕММА 3.1. *Для $\hat{\lambda}_\varepsilon$ справедлива оценка*

$$|\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}_\varepsilon| = o(\varepsilon). \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(x) = \chi(r\varepsilon^{-\alpha})\hat{v}_\varepsilon(x\varepsilon^{-1}) + (1 - \chi(r\varepsilon^{-\alpha}))\hat{\psi}_\varepsilon(x), \quad \text{где } \frac{2}{7} < \alpha < \frac{2}{5}.$$

Легко видеть, что $\tilde{\psi}_\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$. Это становится очевидным, если заметить, что $\psi_1 \in W_2^1(\Omega \setminus \{0\})$, $v_i(\xi) \in W_2^1(B_R \setminus \bar{\gamma})$ при любом R , $i = 0, 1, 2, 3$. Функция $\tilde{\psi}_\varepsilon$ является решением краевой задачи

$$(\Delta + \hat{\lambda}_\varepsilon)\tilde{\psi}_\varepsilon = \hat{f}_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \tilde{\psi}_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon,$$

где

$$\hat{f}_\varepsilon = \sum_{j=1}^3 f_{\varepsilon,j}, \quad f_{\varepsilon,1} = \Delta \chi(r\varepsilon^{-\alpha})(\hat{v}_\varepsilon - \hat{\psi}_\varepsilon) + \nabla \chi(r\varepsilon^{-\alpha}) \nabla (\hat{v}_\varepsilon - \hat{\psi}_\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,2} &= \chi(r\varepsilon^{-\alpha})[\Delta v_2 + \lambda_0 v_0 + \varepsilon(\Delta v_3 + \lambda_0 v_1) + \varepsilon^2 \lambda_0 v_2 + \varepsilon^3 \lambda_0 v_3 + \varepsilon \lambda_1 \hat{v}_\varepsilon], \\ f_{\varepsilon,3} &= (1 - \chi(r\varepsilon^{-\alpha}))(\Delta \psi_0 + \lambda_0 \psi_0 + \varepsilon^{-1}(\Delta \psi_1 + \lambda_0 \psi_1 + \lambda_1 \psi_0) + \varepsilon^2 \lambda_1 \psi_1). \end{aligned}$$

Учитывая асимптотики функций (3.7) и (3.11), получим, что при $\varepsilon^\alpha < r < 2\varepsilon^\alpha$ имеет место оценка $f_{\varepsilon,1} = O(\varepsilon^{2-4\alpha} + \varepsilon^{2\alpha})$. Принимая во внимание, что $\text{supp } f_{\varepsilon,1} \subset B_{2\varepsilon^\alpha} \setminus B_{\varepsilon^\alpha}$, получим

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{0,\Omega} = O(\varepsilon^{2-5\alpha/2} + \varepsilon^{7\alpha/2}).$$

Аналогично, учитывая (3.5) и (3.10) и асимптотики функций, получаем, что

$$\|f_{\varepsilon,2}\|_{0,\Omega} = O(\varepsilon^{1+\alpha/2} + \varepsilon^{7\alpha/2}), \quad \|f_{\varepsilon,3}\|_{0,\Omega} = O(\varepsilon^{2-\alpha}),$$

а $\|\tilde{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega} = 1 + o(1)$. Из этих оценок для $f_{\varepsilon,i}$ получаем, что $\|\hat{f}_\varepsilon\|_{0,\Omega} = o(\varepsilon)$ при $2/7 < \alpha < 2/5$. Заметим, что функция $\tilde{\psi}_\varepsilon$ является решением краевой задачи (2.2) при $\lambda = \hat{\lambda}_\varepsilon$, $f = -\hat{f}_\varepsilon$. Тогда, воспользовавшись оценкой (2.16), получим (3.12). Лемма доказана.

Теорема 2.1 доказывает первую часть утверждения теоремы 1.1 о сходимости собственного значения возмущенной задачи. Из леммы 3.1 следует, что $\lambda_\varepsilon = \hat{\lambda}_\varepsilon + o(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + o(\varepsilon)$, где λ_1 определяется формулой (1.4). Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Автор выражает благодарность Р. Р. Гадыльшину за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
- [2] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [3] Мазья В. Г., Назаров С. П., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
- [4] Гадыльшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. С. 640–652.
- [5] Гадыльшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
- [6] Планида М. Ю. О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для лапласиана // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 867–877.
- [7] Планида М. Ю. Об асимптотике собственных значений для цилиндра, теплоизолированного на узкой полосе // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. С. 422–432.
- [8] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [9] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- [10] Санчес-Паленсиа Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.