Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 202–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:31:22

УДК 517.946

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. И. Галахов

Работа посвящена теоремам существования положительных решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического дифференциального уравнения, содержащего градиентный член. Методом стрельбы с помощью априорных оценок для первого нуля получены достаточные условия существования классических положительных решений задачи в шаре.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi(x) = \lambda \varphi^q(x) - |\nabla \varphi(x)|^s, & x \in B_R(0), \\ \varphi(x) > 0, & x \in B_R(0), \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial B_R(0), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\Delta_p \varphi := \operatorname{div}(|\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi)$, $p > 1$, $q \geq 1$, $s \geq p-1$, $\lambda > 0$, а $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. В настоящей статье мы ограничимся поиском решений в классе радиально-симметричных функций. Мотивировкой для этого могут послужить известные результаты о радиальной симметрии решений задачи (1.1) в случае $p = 2$ [1] и аналогичной задачи с произвольным $p > 1$, но без градиентного члена [2]. В этом классе решения (1.1) можно искать, в частности, в виде функций $\varphi(x) := u(|x|)$, где $u(r)$ – положительное решение вспомогательной начальной задачи

$$\begin{cases} -\left((p-1)u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r)\right)|u'(r)|^{p-2} = \lambda u^q(r) - |u'(r)|^s, & r > 0, \\ u(0) = a > 0, \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

с $u'(r) \neq 0$ при $r > 0$.

В случае $p = 2$, когда Δ_p совпадает с обычным оператором Лапласа, уравнение (1.1) было, насколько нам известно, впервые рассмотрено в пионерской работе Шипо и Вайслера [3] как стационарная версия параболического уравнения

$$u_t - \Delta u = \lambda u^q - |\nabla u|^s, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Их техника была основана на методе стрельбы и изменении масштаба. В настоящей работе мы показываем, что эти методы напрямую обобщаются на случай задачи (1.1)

с $1 < p \leq 2$. Имеются, по крайней мере, два показателя, которые разграничивают различные типы результатов: показатель Соболева $q^* = (n+2)/(n-2)$ (который переходит в ∞ при $n = 1, 2$) и показатель самоподобия $s = 2q/(q+1)$. Хорошо известно, что показатель Соболева играет важную роль при исследовании уравнения Лане–Эмдена

$$-\Delta u = u^q$$

и что, в частности, решения задачи Дирихле для этого уравнения в ограниченных областях существуют в точности при $1 < q < q^*$. С другой стороны, для обобщенной версии этого уравнения

$$-\Delta_p u = u^q$$

аналогичный результат имеет место с $q^* = np/(n-p) - 1$. Это мотивирует обобщение результатов [3] на (1.1) при $1 < q < q^*$. В этом случае показатель самоподобия равен $s_* = pq/(q+1)$. Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру. В п. 2 мы получаем предварительные результаты о локальном существовании положительных решений (1.2) и их нулях. Вытекающие из них глобальные теоремы существования в случаях $p-1 < s < s_*$, $s = s_*$ и $s > s_*$ доказываются соответственно в пп. 3–5.

2. Предварительные результаты. В дальнейшем на протяжении всей статьи будем подразумевать, что $1 < p \leq 2$, $q \geq 1$, $s \geq p-1$. Как будет показано в следующей лемме, эти условия гарантируют локальную разрешимость задачи (1.2).

ЛЕММА 2.1. *Зафиксируем $\lambda > 0$. Для любого $a > 0$ существует (единственное) максимальное решение $u \in C^2([0, R_a))$ задачи (1.2). Более того, оно обладает следующими свойствами:*

- 1) $u'(r) < 0$ для всех r , $0 < r < R_a$;
- 2) функция

$$H(r) = \frac{p-1}{p} |u'(r)|^p + \frac{\lambda}{q+1} |u(r)|^q u(r)$$

убывает на интервале $[0, R_a)$;

- 3) *если $u(r) > 0$ для всех r , $0 \leq r < R_a$, то $R_a = \infty$ и*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} u'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} u''(r) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала существование единственного решения задачи (1.2) на некотором интервале $[0, \varepsilon]$. Умножая уравнение в (1.2) на r^{n-1} и интегрируя его с учетом начальных условий, получаем, что любое решение этой задачи удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} u(r) = a + \int_0^r |w(\rho)|^{(2-p)/(p-1)} w(\rho) d\rho, \\ w(r) = r^{1-n} \int_0^r \rho^{n-1} (|w(\rho)|^{s/(p-1)} - \lambda |u(\rho)|^q) d\rho \end{cases} \quad (2.1)$$

с $w(r) = |u'(r)|^{p-2} u'(r)$. Применяя принцип сжимающих отображений, получаем единственное решение системы (2.1) $u, w \in C([0, \varepsilon])$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Очевидно, $u \in$

$C^1([0, \varepsilon])$ с $u'(r) = |w(r)|^{(2-p)/(p-1)} w(r)$. В частности, $u'(0) = 0$. Более того, w принадлежит $C^1((0, \varepsilon])$, и поэтому $u \in C^2((0, \varepsilon])$ и удовлетворяет (1.2). Остается показать, что при $r = 0$ решение u лежит в C^2 . Для этого покажем сначала, что функция w непрерывно дифференцируема в нуле. Из (2.1) легко получить

$$\begin{aligned} w'(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{w(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} (|w(\rho)|^{s/(p-1)} - \lambda |u(\rho)|^q) d\rho \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{n-1} (|w(r)|^{s/(p-1)} - \lambda |u(r)|^q)}{nr^{n-1}} = -\frac{\lambda a^q}{n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

С другой стороны, из (1.2) вытекает

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} w'(r) &= -\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{(n-1)w(r)}{r} + \lambda u^q(r) - |w(r)|^{s/(p-1)} \right) \\ &= \frac{(n-1)\lambda a^q}{n} - \lambda a^q = -\frac{\lambda a^q}{n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, $w \in C^1([0, \varepsilon])$, и поэтому $u \in C^2([0, \varepsilon])$.

Чтобы доказать 1), заметим сначала, что $u(0) = a > 0$ и $w(0) = 0$. В силу (2.2) имеем $w'(0) < 0$, что в сочетании с $w(0) = 0$ дает $w(r) < 0$ на некотором интервале $(0, \delta]$. Обозначим через r_0 первый положительный нуль функций u' и w . Тогда $u(r_0) \neq 0$, так как в случае $u(r_0) = w(r_0) = 0$ из теоремы единственности для системы (2.1) вытекает, что $u(r) \equiv 0$. Следовательно, из уравнения в (1.2) имеем

$$w'(r_0) = -\lambda |u(r_0)|^q < 0,$$

откуда $w(r)$ и соответственно $u'(r)$ положительны для всех r в некотором интервале $(r_0 - \eta, r_0)$ с $\eta > 0$. Это противоречит выбору r_0 и поэтому доказывает 1).

Так как при $r > 0$ уравнение (1.2) не содержит особенностей, решение на $[0, \varepsilon]$ можно локально продолжить до максимального $u \in C^2([0, R_a])$. Вспомним, что в процедуре продолжения (1.2) рассматривается как система относительно $(u(r), w(r))$ с $w(r) = |u'(r)|^{p-2} u'(r)$. Следовательно, если этот процесс останавливается при некотором $R_a < \infty$, это означает, что либо $|u(r)| \rightarrow \infty$, либо $|u'(r)| \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow R_a$. Очевидно, доказательство 1) применимо ко всему интервалу $[0, R_a]$.

Далее легко вычислить, что при $r > 0$

$$\begin{aligned} H'(r) &= (p-1)u'(r)|u'(r)|^{p-2}u''(r) + \lambda |u(r)|^q u'(r) \\ &= u'(r) \left[-\left(\frac{n-1}{r} \right) |u'(r)|^{p-2}u'(r) + |u'(r)|^s \right] < 0, \end{aligned}$$

и поэтому выполнено 2).

Остается доказать 3). Если $u(r) > 0$ для всех $r \in [0, R_a)$, то $0 < H(r) \leq H(0)$ для всех $r \in [0, R_a]$. Таким образом, $u(r)$ и $u'(r)$ априори ограничены, так что $R_a = \infty$. Кроме того, по доказанному, $u'(r) < 0$. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = u_\infty.$$

Аналогично, $H(r)$ стремится к конечному пределу при $r \rightarrow \infty$. Это влечет существование

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u'(r) = v_\infty.$$

Фактически из существования $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r)$ вытекает, что $v_\infty = 0$, а поэтому и $w_\infty = -|v_\infty|^{p-1} = 0$. Наконец, из (1.2) мы заключаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w'(r) = -\lambda |u_\infty|^q.$$

Таким образом, $v_\infty = 0$ можно получить только при $u_\infty = 0$. Это завершает доказательство 3).

При фиксированном $\lambda > 0$ обозначим первый нуль решения (1.2) через $z(a)$. Будем считать, что $z(a) = \infty$, если $u(r) > 0$ для всех $r \geq 0$. Таким образом, решение $u(r)$ задачи (1.2) удовлетворяет (1.1) в точности при $z(a) = R$. Это побуждает исследовать поведение функции $z(a)$.

ЛЕММА 2.2. *При условиях леммы 2.1 множество $\{a > 0 : z(a) < \infty\}$ открыто, и функция $z(\cdot)$ непрерывна на нем. Более того, если $q > p - 1$, то*

$$\lim_{a \rightarrow 0} z(a) = \infty, \quad (2.4)$$

а если, кроме того, $z(a_0) = \infty$ при некотором $a_0 > 0$, то $\lim_{a \rightarrow a_0} z(a) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим решение $u(r)$, полученное, как описано в предыдущем доказательстве, для любого фиксированного a как $u(r, a)$. Если $z(a_0) < \infty$, то по его определению существуют числа $\delta < 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $u(r, a_0) < \delta$ для всех $r \in [z(a_0) + \varepsilon, z(a_0) + 2\varepsilon]$. По теореме о непрерывной зависимости u от начальных данных, для всех a , достаточно близких к a_0 , на том же интервале должно выполняться неравенство $u(r, a) < \delta/2$. С другой стороны, $u(0, a) = a > 0$. Поэтому u должно обращаться в нуль в некоторой точке между 0 и $z(a_0) + \varepsilon$. Непрерывность z следует из непрерывной зависимости $u(r, a)$ от a и того, что u может иметь не более одного нуля, так как $u'(r) < 0$ при $r > 0$.

Чтобы доказать (2.4), заметим, что так как $H(r)$ убывает, то при всех $r \in [0, z_a]$

$$\frac{p-1}{p} |u'(r, a)|^p \leq H(r) \leq H(0) = \frac{\lambda a^{q+1}}{q+1}$$

и поэтому

$$|u'(r, a)| \leq \left(\frac{p\lambda}{(p-1)(q+1)} \right)^{1/p} a^{(q+1)/p}. \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$a = u(0, a) - u(z(a), a) = - \int_0^{z(a)} u'(\rho, a) d\rho \leq z(a) a^{(q+1)/p} \left(\frac{p\lambda}{(p-1)(q+1)} \right)^{1/p},$$

т.е.

$$z(a) \geq a^{-(q+1-p)/p} \left(\frac{(p-1)(q+1)}{p\lambda} \right)^{1/p}, \quad (2.6)$$

и доказательство (2.4) завершено.

Чтобы доказать последнее утверждение, покажем, что при данном $M > 0$ выполняется неравенство $z(a) > M$, если a достаточно близко к a_0 . Действительно, при $a = a_0$ имеем $u(r, a_0) > 0$ для всех $r > 0$; поэтому существует $\delta > 0$ такое, что $u(r, a_0) \geq \delta$ на $[0, M]$. В силу непрерывной зависимости решения системы (2.1) от начальных данных, если a достаточно близко к a_0 , то $u(r, a) \geq \delta/2$ на $[0, M]$. Поэтому $z(a) > M$ для таких a .

3. Первый случай: $p - 1 \leq s < pq/(q + 1)$. Далее рассмотрим поведение функции $z(a)$ при $a \rightarrow \infty$. Начнем со случая $s < pq/(q + 1)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $q > 1$, $p - 1 \leq s < pq/(q + 1)$ и (в случае $n > p$) $1 < q < np/(n - p) - 1$. Тогда для всех $\lambda > 0$ имеем

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} z(a)a^{(q-p+1)/p} < \infty, \quad (3.1)$$

и поэтому

$$\lim_{a \rightarrow \infty} z(a) = 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda > 0$. Как в предыдущем параграфе, обозначим через $u(\cdot, a)$ решение задачи (1.2) с начальным значением a . Для всех $a > 0$ положим

$$v_a(r) = a^{-1}u(ra^{(p-q-1)/p}, a).$$

Тогда легко видеть, что v_a удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} - \left((p-1)v_a''(r) + \frac{n-1}{r}v_a'(r) \right) |v_a'(r)|^{p-2} \\ = \lambda |v_a(r)|^q - a^{(s(q+1)-pq)/p} |v_a'(r)|^s, \quad r > 0, \\ v_a(0) = 1, \\ v_a'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Кроме того, $v_a'(r) < 0$ при $r > 0$ и $v_a(r) > 0$ при $0 \leq r < a^{(q-p+1)/p}z(a)$, и поэтому

$$0 \leq v_a(r) \leq 1, \quad 0 \leq r \leq a^{(q-p+1)/p}z(a). \quad (3.4)$$

Более того, (2.5) переходит в

$$|v_a'(r)| \leq \left(\frac{p\lambda}{(p-1)(q+1)} \right)^{1/p}, \quad r \geq 0, \quad (3.5)$$

а (2.2) – в

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|v_a'(r)|^{p-2}v_a'(r)}{r} = -\frac{\lambda}{n}. \quad (3.6)$$

Из (3.3)–(3.6) вытекает также равномерная по r и a при $0 \leq r < a^{(q-p+1)/p}z(a)$ и $a \geq a_0 > 0$ оценка для $|v_a''(r)|$.

Теперь предположим, что существует последовательность $a_m \rightarrow \infty$ такая, что выполняется

$$a_m^{(q-p+1)/p} z(a_m) \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Используя теорему Арцела–Асколи и стандартный диагональный процесс, получим подпоследовательность, которую снова обозначим a_m , и непрерывную функцию $v: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ такую, что $v_{a_m} \rightarrow v$ и $v'_{a_m} \rightarrow v'$ равномерно на всех компактных подмножествах $[0, M] \subset [0, \infty)$. В частности, $v(0) = 1$, v неотрицательно, не возрастает на $[0, \infty)$ и непрерывно по Липшицу с константой, не превосходящей $(p\lambda/((p-1)(q+1)))^{1/p}$. (Каждая из функций v_a имеет эти свойства.) Наконец, так как $s < pq/(q+1)$ и $|v'_a|, |v''_a|$ ограничены независимо от r и a , из (3.3) следует, что

$$\left((p-1)v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) \right) |v'(r)|^{p-2} + \lambda |v(r)|^q = 0 \quad (3.7)$$

в смысле распределений на $(0, \infty)$.

Хорошо известно (см., например, [4]), что при $1 < q < np/(n-p) - 1$ такое регулярное решение v не может существовать. Это доказывает (3.1), а следовательно, и (3.2).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 < p \leq 2$, $q > 1$, $p-1 \leq s < pq/(q+1)$, $\lambda > 0$ и (если $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$. Тогда задача (1.1) имеет решение $\varphi \in C^2(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие лемм 2.2 и 3.1 для любых $\lambda > 0$ и $R > 0$ существует $a > 0$ такое, что $z(a) = R$. Иными словами, если $u(r)$ – решение (1.2) с начальным значением a , то $u(r) > 0$ при $0 \leq r < R$ и $u(R) = 0$. Тогда $\varphi(x) = u(|x|)$, $|x| \leq R$ – искомое решение задачи (1.1).

4. Второй случай: $s = pq/(q+1)$. Перейдем к случаю $s = pq/(q+1)$. Он отличается от предыдущего тем, что масштабированное решение v_a удовлетворяет тому же уравнению, что и u . Это усложняет рассмотрение, поэтому мы ограничимся подслучаем $n = 1$.

ЛЕММА 4.1. Если $s = pq/(q+1)$, то для всех $a > 0$

$$z(a) = a^{-(q-p+1)/p} z(1). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.3) $v_a(\cdot) = u(\cdot, 1)$ для всех $a > 0$. Поэтому v_a впервые достигает нуля в точке $z(1)$. Однако по определению v_a его первым нулем является $a^{(q-p+1)/p} z(a)$. Это доказывает (4.1).

Иными словами, конечно $z(a)$ или нет – зависит только от конечности $z(1)$, которая, в свою очередь, определяется значением параметра λ .

ЛЕММА 4.2. Пусть $r_0 \geq 0$, $\lambda > 0$, $s = pq/(q+1)$, и предположим, что функция $u: (r_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит C^2 и для всех r , $r > r_0$, удовлетворяет условиям

- 1) $u(r) > 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$;
- 2) $u'(r) < 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} u'(r) = 0$;
- 3) $(p-1)u''(r)|u'(r)|^{p-2} - |u'(r)|^s + \lambda |u(r)|^q = 0$;
- 4) выполнена оценка

$$u''(r) \leq k |u'(r)|^{s-p+2}, \quad (4.2)$$

где $k > 0$ – фиксированная константа.

Тогда для всех r , $r > r_0$, функция u удовлетворяет также неравенству

$$u''(r) \leq \frac{1}{p-1} \left[1 - \lambda \left(\frac{q+1}{pk} \right)^q \right] |u'(r)|^{s-p+2}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u' < 0$, неравенство (4.2) можно переписать в виде

$$(-u'(\rho))^{p-s-1} u''(\rho) \leq -ku'(\rho).$$

Интегрируя его от r до ∞ , получим

$$\frac{(-u'(r))^{p-s}}{p-s} \leq ku(r),$$

или, что то же самое,

$$u(r) \geq \frac{q+1}{pk} (-u'(r))^{p/(q+1)}$$

(здесь мы используем, что $s = pq/(q+1) < p$). Поэтому в силу условия 3)

$$(p-1)u''(r)|u'(r)|^{p-2} = (-u'(r))^s - \lambda u^q(r) \leq \left[1 - \lambda \left(\frac{q+1}{pk} \right)^q \right] (-u'(r))^s,$$

что доказывает (4.3).

ЛЕММА 4.3. Пусть $n = 1$ и $s = pq/(q+1)$. Если $\lambda \geq p^q/((p-1)(q+1))^q$, то $z(a) < \infty$ для всех решений $u(r)$ задачи (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z(a) = \infty$, то $u(r) > 0$ для всех $r > 0$. В силу леммы 2.1 и уравнения (1.2) с $n = 1$ функция $u(r)$ удовлетворяет условиям 1)–3) леммы 4.2, а также условию 4) с $k = 1/(p-1)$. Поэтому из леммы 4.2 следует, что (4.3) выполняется с тем же k . Так как $\lambda \geq p^q/((p-1)(q+1))^q$, имеем $u''(r) \leq 0$ для $r > 0$. Но это невозможно, так как $u'(r) < 0$ и $u(r) > 0$ при $r > 0$.

Результат леммы 4.3 уже достаточен, чтобы получить решение (1.1) с

$$\lambda \geq \left(\frac{p}{(p-1)(q+1)} \right)^q.$$

Тем не менее, его можно усилить.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\lambda > \lambda_{p,q} = (pq)^q/((p-1)^q(q+1)^{2q+1})$. Индуктивно определим последовательность

$$k_0 = \frac{1}{p-1}, \quad k_m = \frac{1}{p-1} \left(1 - \lambda \left(\frac{q+1}{pk_{m-1}} \right)^q \right)$$

при $k_{m-1} > 0$. Тогда либо k_m при некотором m станет неположительным, либо $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_\lambda(x) = x - \frac{1}{p-1} \left(1 - \lambda \left(\frac{q+1}{px} \right)^q \right), \quad (4.4)$$

которая, очевидно, задает значения разности $k_{m-1} - k_m$ при $x = k_{m-1}$. Для $\lambda > \lambda_{p,q}$ и $x > 0$ имеем

$$f_\lambda(x) > f_{\lambda_{p,q}}(x) = x - \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{q+1} \left(\frac{q}{(p-1)(q+1)x} \right)^q \right).$$

Легко проверить, что функция $f_{\lambda_{p,q}}$ достигает своего единственного минимума при $x_0 = q/((p-1)(q+1))$, причем $f_{\lambda_{p,q}}(x_0) = 0$. Поэтому $f_\lambda(x) > 0$ при $\lambda > \lambda_{p,q}$ и $x > 0$, и последовательность k_m убывает, пока она определена. Следовательно, если заключение леммы неверно, то существует $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = k > 0$ и в силу (4.4) $f_\lambda(k) = 0$, что противоречит предыдущему рассуждению. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть $n = 1$ и $s = pq/(q+1)$. Если $\lambda > \lambda_{p,q}$, то $z(a) < \infty$ для всех решений (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4.3 и применяя лемму 4.2 необходимое количество раз, получаем, что (4.3) выполняется при всех значениях $k = k_m$, определенных в лемме 4.4. Следовательно, $u''(r) < 0$ для всех $r > 0$. Это приводит к противоречию аналогично доказательству леммы 4.3.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $1 < p \leq 2$, $q \geq 1$, $s = pq/(q+1)$, $n = 1$ и $\lambda > \lambda_{p,q}$. Тогда задача (1.1) имеет решение $u \in C^2(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспроизвести доказательство теоремы 3.1 со ссылкой на леммы 4.1 и 4.5 вместо леммы 3.1.

5. Третий случай: $s > pq/(q+1)$. Нам остается рассмотреть случай $s > pq/(q+1)$. Следующий результат – вариант леммы 2.2.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\lambda > 0$ и $u(r)$ – решение (1.2), впервые обращающееся в нуль в точке $z(a)$. Тогда

$$z(a) \geq \lambda^{-1/s} a^{1-q/s}. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $z(a) < \infty$. Покажем, что минимальное значение функции $u'(r)$ и, соответственно, $w(r) = u'(r)|u'(r)|^{p-2}$ на $[0, z(a)]$ достигается внутри интервала. Действительно, так как $u'(r) < 0$, имеем

$$w'(r) = (-|u'(r)|^{p-1})' = (p-1)u''(r)|u'(r)|^{p-2}.$$

Но в силу (1.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} (p-1)u''(0)|u'(0)|^{p-2} &= -\frac{\lambda a^q}{n} < 0, \\ (p-1)u''(z(a))|u'(z(a))|^{p-2} &= -\left(\frac{n-1}{z(a)}\right)u'(z(a))|u'(z(a))|^{p-2} + |u'(z(a))|^s > 0. \end{aligned}$$

Поэтому, если r_0 таково, что $w(r_0)$ – минимум на $[0, z(a)]$, то $w'(r_0) = 0$, т.е.

$$-(-u'(r_0))^s + \lambda(u(r_0))^q = -\frac{n-1}{r_0}u'(r_0)|u'(r_0)|^{p-2} \geq 0$$

или

$$(-u'(r_0))^s \leq \lambda(u(r_0))^q \leq \lambda a^q.$$

Отсюда следует, что для $0 \leq r \leq z(a)$ выполнено $-u'(r) \leq \lambda^{1/s} a^{q/s}$. Следовательно,

$$a = u(0) - u(z(a)) = -\int_0^{z(a)} u'(\rho) d\rho \leq z(a) \lambda^{1/s} a^{q/s},$$

что доказывает (5.1).

ЛЕММА 5.2. Пусть $q > 1$, $s > pq/(q+1)$ и (в случае $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$. Тогда для всех $\lambda > 0$ имеем

$$\limsup_{a \rightarrow 0} z(a) a^{(q-p+1)/p} < \infty. \quad (5.2)$$

В частности, для всех достаточно малых a $z(a) < \infty$ и

$$z(a) \leq C a^{-(q-p+1)/p} \quad (5.3)$$

с некоторым $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО есть очевидная модификация доказательства леммы 3.1.

Обозначим для любого фиксированного $\lambda > 0$

$$R(\lambda) = \inf_{a > 0} z(a).$$

Заметим, что вследствие леммы 2.2 при $R(\lambda) < \infty$ уравнение $z(a) = R$ имеет, по крайней мере, одно решение для любого $R > R(\lambda)$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $q > 1$. Тогда

- 1) если $s \geq q$, то $R(\lambda) > 0$;
- 2) если $s > pq/(q+1)$ и (в случае $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$, то $R(\lambda) < \infty$;
- 3) если $s > q$ и (в случае $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$, то $z(a) = R(\lambda) < \infty$ для некоторого $a > 0$, и уравнение $z(a) = R$ имеет, по крайней мере, два решения $a > 0$ для любого $R > R(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из оценок снизу для $z(a)$ (2.6) и (5.1), а утверждение 2) – из леммы 5.2. Чтобы доказать утверждение 3), заметим, что из (2.6) и (5.1) следует

$$\lim_{a \rightarrow 0} z(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} z(a) = \infty.$$

Но в силу леммы 5.2 $z(a)$ конечно для некоторых a и с учетом леммы 2.2 достигает положительного минимума $R(\lambda)$ при некотором a_0 , $0 < a_0 < \infty$. Очевидно, для любого $R > R(\lambda)$ существуют a_1 и a_2 такие, что $0 < a_1 < a_0 < a_2 < \infty$ и $z(a_1) = z(a_2) = R$.

Аналогично предыдущим пунктам, из леммы 5.3 следует

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $1 < p \leq 2$, $q > 1$ и $s \geq p - 1$. Тогда

- 1) если $s \geq q$ и $0 < R < R(\lambda)$, задача (1.1) не имеет (классических) радиальных решений в $B_R(0)$;
- 2) если $s > pq/(q+1)$ и (в случае $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$, то при $R > R(\lambda)$ задача (1.1) имеет, по крайней мере, одно радиальное решение в $B_R(0)$;
- 3) если $s > q$ и (в случае $n > p$) $q < np/(n-p) - 1$, то при $R = R(\lambda)$ задача (1.1) имеет, по крайней мере, одно, а при $R > R(\lambda)$ – по крайней мере, два радиальных решения в $B_R(0)$.

Автор благодарит С. И. Похожаева и К. О. Бесова за ценную помощь при подготовке рукописи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gidas B., Ni W.-M., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle // Comm. Math. Phys. 1979. V. 68. P. 209–243.
- [2] Mitidieri E., Caristi G. Nonexistence of positive solutions of quasilinear equations // Adv. Differential Equations. 1997. V. 2. P. 319–359.
- [3] Chipot M., Weissler F. B. Some blow up results for a nonlinear parabolic problem with a gradient term // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 886–907.
- [4] Ni W.-M., Serrin J. Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations. The anomalous case // Accad. Naz. Lincei, Convegni dei Lincei. 1986. V. 77. P. 231–256.

Ростокский университет, Германия
E-mail: galakhov@rambler.ru

Поступило
02.04.2004