Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. П. Харт, Элементарность и размерности, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 292–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:43:04

УДК 517.5

ЭЛЕМЕНТАРНОСТЬ И РАЗМЕРНОСТИ

К. П. Харт

Предложено альтернативное доказательство неравенства $\dim X \leq \text{Dg } X$ для бикompактов X , недавно полученного В. В. Федорчуком. Проблема сведена к метризуемому случаю при помощи теоремы Лёвенгейма–Скулема.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

Среди существующих *топологических* определений размерности наибольшей известностью и популярностью пользуются Ind и ind (большая и малая индуктивные размерности), а также $\dim$ (лебегова размерность). Они отражают разные аспекты интуитивного понимания размерности. Индуктивные размерности формализуют представление о том, что “линию можно разбить точками, поверхность – линиями, а пространство – поверхностями”, тогда как $\dim$ – это формализация “числа возможных направлений”; это особенно хорошо видно из теоремы о перегородках [1, п. 7.2.15]. Все эти размерностные функции принимают одинаковые значения на всех метрических сепарабельных пространствах, причем размерность евклидова n -мерного пространства всегда оказывается “правильной”.

В статье [2] Брауэр предложил другое понятие размерности, Dimensionsgrad (Dg), основанное на разрезах. Только недавно [3] было установлено, что Dg совпадает с общепринятыми размерностями на классе (локально) компактных метрических пространств. Вне этого класса Dg отличается от привычных размерностей; так, для каждого n существует локально связное полное метрическое сепарабельное пространство X_n , для которого $\text{Dg } X_n = 1$ и $\dim X_n = n$ (см. [4]).

Недавно В. В. Федорчук доказал, что $\dim X \leq \text{Dg } X$ для всех бикompактов X . В этой статье мы передоказываем этот результат, а также неравенство Веденисова $\dim X \leq \text{Ind } X$ (для нормальных пространств) средствами теории моделей.

Рассуждения, проведенные в этой статье, заставляют думать, что размерность Dg несколько сложнее общепринятых размерностей. Это позволяет объяснить, почему доказательство Федорчука настолько труднее относительно простого доказательства неравенства Веденисова.

2. Предварительные сведения

2.1. Размерности. Ниже мы напоминаем определения лебеговой размерности и большой индуктивной размерности. Говорят, что *лебегова размерность нормального*

пространства X не превосходит n ($\dim X \leq n$), если во всякое конечное открытое покрытие этого пространства можно вписать открытое покрытие кратности не более n (т.е. такое, что никакая точка не принадлежит более чем $n + 1$ элементам вписанного покрытия). Как обычно, размерность $\dim X$ определяется как наименьшее n , для которого $\dim X \leq n$ (если такого n не существует, то мы полагаем $\dim X = \infty$).

Большая индуктивная размерность определяется рекурсивно: $\text{Ind } X \leq n$ означает, что между любыми двумя непересекающимися замкнутыми множествами A и B есть *перегородка* C размерности $\text{Ind } C \leq n - 1$; C называется *перегородкой* между A и B , если $X \setminus C$ можно представить как объединение двух непересекающихся открытых множеств U и V таких, что $A \subseteq U$ и $B \subseteq V$. Основанием рекурсии служит неравенство $\text{Ind } X \leq -1$ для $X = \emptyset$.

Размерность Dimensionsgrad определяется подобным образом, только теперь множество C должно быть *разрезом* между A и B ; это означает, что оно замкнуто и пересекается с каждым континуумом, пересекающим оба множества A и B .

2.2. Решетки. В статье [5] Волмэн показал, что каждой дистрибутивной решетке L с 0 и 1 можно поставить в соответствие бикомпактное T_1 -пространство wL , так называемое *волмэновское представление* этой решетки, замкнутой базой топологии которого является гомоморфный образ решетки L . Множество wL совпадает со множеством всех ультрафильтров на L ; для каждого элемента a решетки L множество $\bar{a} = \{u \in wL : a \in u\}$ является элементом замкнутой базы топологии на wL . Гомоморфизм $a \mapsto \bar{a}$ взаимнооднозначен тогда и только тогда, когда решетка L *сепаративна*, т.е. для любых $a \not\leq b$ найдется $c \leq a$ такое, что $c > 0$ и $c \sqcap b = 0$. Пространство wL хаусдорфово, если и только если L *нормальна*, т.е. для любых $a \sqcap b = 0$ найдутся f и g такие, что $a \sqcap f = 0$, $b \sqcap g = 0$ и $f \sqcup g = 1$.

В отличие от стоуновского представления булевых алгебр, соответствие между решетками и их волмэновскими представлениями не взаимнооднозначно. Разумеется, каждое бикомпактное T_1 -пространство X является представлением своей собственной решетки замкнутых множеств (мы обозначаем ее через 2^X); кроме того, $X = w\mathcal{B}$ для любой базы $\mathcal{B}$ замкнутых множеств в X , которая замкнута относительно конечных объединений и пересечений. Например, единичный отрезок является волмэновским представлением семейства конечных объединений отрезков с рациональными концами.

2.3. Элементарные подрешетки. Предлагаемые в этой статье доказательства неравенств Федорчука и Веденисова используют элементарные подрешетки решетки 2^X . Подрешетка L в 2^X называется *элементарной*, если всякое разрешимое в 2^X уравнение с параметрами из L разрешимо уже в L . Термин “уравнение” понимается в очень широком смысле. Имеется в виду вот что: если $\phi(x, y, \dots, a, b, \dots)$ – теоретико-решеточная формула со свободными переменными $x, y, \dots$ и параметрами $a, b, \dots$ из L и если существуют $x, y, \dots$ в 2^X , при подстановке которых ϕ становится истинной формулой в 2^X , то такие $x, y, \dots$ найдутся и в L .

Всякая элементарная подрешетка в 2^X автоматически сепаративна: если $a \not\leq b$ в L , то

$$(x \leq a) \wedge (x > 0) \wedge (x \sqcap b = 0)$$

является разрешимым в 2^X уравнением с параметрами $(a, b \text{ и } 0)$ из L ; значит, должно найтись $c \in L$, для которого

$$(c \leq a) \wedge (c > 0) \wedge (c \sqcap b = 0).$$

Точно так же, подрешетка L должна быть нормальной: если $a, b \in L$ и $a \sqcap b = \mathbf{0}$, то уравнение

$$(a \sqcap x) \wedge (b \sqcap y) \wedge (x \sqcup y = \mathbf{1})$$

разрешимо в 2^X ; значит, существуют f и g из L , для которых

$$(a \sqcap f) \wedge (b \sqcap g) \wedge (f \sqcup g = \mathbf{1}).$$

Ниже, при доказательстве неравенства Федорчука, мы встретимся с более сложными уравнениями/формулами, содержащими кванторы; именно здесь проявится сила понятия элементарности.

Важную роль в теории моделей играет теорема Лёвенгейма–Скулема; в применении к решеткам она звучит так: для любого подсемейства $\mathcal{F}$ в 2^X найдется элементарная подрешетка L решетки 2^X такая, что $\mathcal{F} \subseteq L$ и $|L| \leq |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0$. Эта теорема дает возможность доказать факторизационную теорему Мардешича в сильной форме (примером ее применения служит [6, теорема 5.3]; систематическое исследование свойств, которые факторизующее пространство наследует из области определения факторизуемого отображения, проведено в диссертации [7]). Доказательство теоремы Лёвенгейма–Скулема можно найти в [8, п. 3.1].

3. Формулы для размерностей

3.1. Лебегова размерность. Мы воспользуемся принадлежащей Хеммингсену характеристикой [9] (см. также [1, следствие 7.2.14]), чтобы вывести теоретико-решеточную формулу, характеризующую лебегову размерность в терминах замкнутых множеств. Эта формула, которую мы будем сокращенно обозначать через δ_n , выглядит так:

$$\begin{aligned} & (\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_{n+2})(\exists y_1)(\exists y_2) \cdots (\exists y_{n+2}) \\ & [(x_1 \sqcap x_2 \sqcap \cdots \sqcap x_{n+2} = \mathbf{0}) \rightarrow ((x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \wedge \cdots \wedge (x_{n+2} \leq y_{n+2}) \\ & \wedge (y_1 \sqcap y_2 \sqcap \cdots \sqcap y_{n+2} = \mathbf{0}) \wedge (y_1 \sqcup y_2 \sqcup \cdots \sqcup y_{n+2} = \mathbf{1}))]. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема Хеммингсена утверждает, что для бикомпактных пространств $\dim X \leq n$ в том и только том случае, если в решетке 2^X выполнена формула δ_n .

С помощью стандартного рассуждения, связанного с ужатиями и раздутиями, можно показать, что для бикомпакта (хаусдорфова бикомпактного пространства) X $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда в некоторой (любой) решеточной базе замкнутых множеств в этом пространстве выполнена формула δ_n .

3.2. Большая индуктивная размерность. Определение большой индуктивной размерности довольно легко можно переформулировать в терминах замкнутых множеств. *Перегородку* C между двумя непересекающимися замкнутыми множествами A и B можно определить как пару замкнутых множеств F и G таких, что $F \cup G = X$, $F \cap A = \emptyset$ и $G \cap B = \emptyset$: пересечение $F \cap G$ является перегородкой между A и B ; таким образом, приведенная ниже формула, которую мы обозначаем через $\text{part}(u, x, y, a)$, утверждает, что u является перегородкой между x и y в (под)пространстве a :

$$(\exists f)(\exists g)((x \sqcap f = \mathbf{0}) \wedge (y \sqcap g = \mathbf{0}) \wedge (f \sqcup g = a) \wedge (f \sqcap g = u)).$$

Эта формула позволяет рекурсивно определить формулу $I_n(a)$ для большой индуктивной размерности:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists u)[((x \leq a) \wedge (y \leq a) \wedge (x \sqcap y = \mathbf{0})) \rightarrow (\text{part}(u, x, y, a) \wedge I_{n-1}(u))]; \quad (2)$$

основанием рекурсии служит формула $I_{-1}(a)$, согласно которой $a = \mathbf{0}$.

Таким образом, для бикompактного пространства X $\text{Ind } X \leq n$ тогда и только тогда, когда в 2^X выполнена формула $I_n(\mathbf{1})$. Вообще, если X имеет решеточную базу $\mathcal{B}$ замкнутых множеств, в которой выполнена формула $I_n(\mathbf{1})$, то $\text{Ind } X \leq n$; это легко получается по индукции – достаточно заметить, что $\{F \in \mathcal{B} : F \subseteq A\}$ является решеточной базой замкнутых множеств в подпространстве A , если $A \in \mathcal{B}$.

Обратное неверно: в решеточной базе замкнутых множеств в пространстве X , для которого $\text{Ind } X \leq n$, не обязательно должна выполняться формула $I_n(\mathbf{1})$. Простейший пример – единичный отрезок $[0, 1]$ с решеточной базой, порожденной предбазой

$$\{[0, q] : q \text{ рационально}\} \cup \{[p, 1] : p \text{ иррационально}\}.$$

В этой решетке формула $I_n(\mathbf{1})$ не выполнена ни для какого n .

3.3. Размерность Dimensionsgrad. Согласно данному выше определению разрез между двумя (непересекающимися) замкнутыми множествами A и B – это замкнутое множество C такое, что любой континуум в объемлющем пространстве, пересекающийся с A и B , пересекается и с C . Обозначим через $\text{conn}(a)$ формулу

$$(\forall x)(\forall y)[((x \sqcap y = \mathbf{0}) \wedge (x \sqcup y = a)) \rightarrow ((x = \mathbf{0}) \vee (y = a))],$$

которая означает “ a связно”, а через $\text{cut}(u, x, y, a)$ формулу

$$(\forall v)[((v \leq a) \wedge \text{conn}(v) \wedge (v \sqcap x \neq \mathbf{0}) \wedge (v \sqcap y \neq \mathbf{0})) \rightarrow (v \sqcap u \neq \mathbf{0})],$$

которая означает “ u является разрезом между x и y в (под)пространстве a ”; в результате мы получим следующее рекурсивное определение формулы $\Delta_n(a)$ для размерности Dimensionsgrad:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists u)[((x \leq a) \wedge (y \leq a) \wedge (x \sqcap y = \mathbf{0})) \rightarrow (\text{cut}(u, x, y, a) \wedge \Delta_{n-1}(u))]; \quad (3)$$

как и выше, $\Delta_{-1}(a)$ обозначает “ $a = \mathbf{0}$ ”.

Как и в случае большой индуктивной размерности, $\text{Dg } X \leq n$ тогда и только тогда, когда в 2^X выполнена формула $\Delta_n(\mathbf{1})$. Тот же пример, что и выше, показывает, что равенство $\text{Dg } X = 1$ не обязательно означает, что во всякой решеточной базе замкнутых множеств выполнена формула $\Delta_n(\mathbf{1})$ для какого-нибудь n . Возможно даже, в некоторой решеточной базе замкнутых множеств в пространстве X формула $\Delta_0(\mathbf{1})$ верна, но $\text{Dg } X > 0$. Пример – единичный отрезок с решеточной базой, порожденная предбазой

$$\{[0, q] \cup \{q + 2^{-n} : n \in \omega\} : q \text{ рационально}\} \cup \{[p, 1] \cup \{p - 2^{-n} : n \in \omega\} : p \text{ иррационально}\}.$$

В этой решеточной базе формула $\Delta_0(\mathbf{1})$ выполнена автоматически, поскольку в ней нет нетривиальных связных элементов.

4. Элементарность

В этом разделе мы фиксируем бикомпакт X и элементарную подрешетку L решетки 2^X с волмэновским представлением wL .

4.1. Равенство $\dim wL = \dim X$. Этот факт довольно хорошо известен, но для полноты мы наметим его доказательство. Из замечаний, сделанных в предыдущем разделе, мы знаем, что $\dim wL$ — наименьшее натуральное число n , для которого в L выполнена формула δ_n . Следовательно, нам нужно показать, что в L выполнена формула δ_n тогда и только тогда, когда в 2^X выполнена формула δ_n . *Достаточность* доказывается непосредственно: если в 2^X выполнена формула δ_n , то она выполнена и в L : всякая $(n+2)$ -ка $(x_1, \dots, x_{n+2})$ из L определяет с помощью формулы δ_n уравнение, которое имеет решение $(y_1, \dots, y_{n+2})$ в 2^X и, следовательно, в L . *Необходимость* доказывается от противного: отрицание формулы δ_n само является уравнением с параметрами 0 и 1 и неизвестными $x_1, \dots, x_{n+2}$; если бы оно имело решение в 2^X , то оно имело бы решение и в L .

4.2. Оценка $\text{Ind } wL \leq \text{Ind } X$. Как и выше, в L выполнена формула $I_n(1)$ тогда и только тогда, когда в 2^X выполнена формула $I_n(1)$: как $I_n(1)$, так и ее отрицание порождают уравнения с параметрами в L и решениями в 2^X , а значит, и в L . В п. 3.2 мы показали, что $\text{Ind } wL \leq n$, если в L выполнена формула $I_n(1)$; этого достаточно для выполнения неравенства $\text{Ind } wL \leq \text{Ind } X$.

4.3. Оценка $\text{Dg } wL \leq \text{Dg } X$. Как и выше, можно показать, что в L выполнена формула $\Delta_n(1)$, если и только если в 2^X выполнена формула $\Delta_n(1)$. Однако в п. 3.3 было показано, что оценка $\text{Dg } wL \leq n$ не вытекает автоматически из того, что в L выполнена формула $\Delta_n(1)$. Таким образом, доказательство требует дополнительных усилий. Мы докажем следующее утверждение индукцией по n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть X — бикомпакт, $\text{Dg } X \leq n$ и L — элементарная подрешетка в 2^X . Тогда $\text{Dg } wL \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент A решетки L является замкнутым подмножеством X ; с другой стороны, он определяет элемент замкнутой базы в wL ; мы обозначаем этот элемент базы через A_L .

Пусть P и Q — замкнутые непересекающиеся множества в wL . Поскольку L является решеточной базой замкнутых множеств в wL , найдутся непересекающиеся $A, B \in L$ такие, что $P \subseteq A_L$ и $Q \subseteq B_L$.

В X имеется разрез $\text{cut } C$ между A и B , для которого $\text{Dg } C \leq n-1$; в силу элементарности мы можем считать, что $C \in L$. Действительно, очевидно, уравнение $\text{cut}(x, A, B, 1) \wedge \Delta_{n-1}(x)$, параметры которого принадлежат L , разрешимо в 2^X ; значит, оно разрешимо и в L .

Мы должны показать, что замкнутое множество C_L , которое представлено элементом C в wL , является разрезом между A_L и B_L (а значит, и между P и Q) и $\text{Dg}(C_L) \leq n-1$.

Второе утверждение доказывается по индукции: C_L является волмэновским представлением решетки $\{x \in L : x \subseteq C\}$, и эта решетка является элементарной подрешеткой решетки $\{x \in 2^X : x \subseteq C\}$.

Чтобы доказать первое утверждение, предположим, что в wL существует замкнутое множество K , которое пересекает A_L и B_L , но не пересекает C_L . Возьмем $H \in L$, для

которого $K \subseteq H_L$ и $H \cap C = \emptyset$. Заметим, что H несвязно, потому что оно пересекается с A и с B , но не пересекается с C . Следовательно, применяя определение элементарности к формуле $\neg \text{conn}(H)$, мы можем найти ненулевые непересекающиеся элементы F и G решетки L , для которых $H = F \cup G$. Множество H_L является дизъюнктивным объединением множеств F_L и G_L ; однако это не влечет несвязности K , поскольку вполне может оказаться, что $K \subseteq F_L$ или $K \subseteq G_L$, так что множества F и G нужно выбирать с большей осмотрительностью.

Воспользуемся тем, что никакая компонента множества H в X не пересекается одновременно с A и B . Поскольку разложение H на компоненты полунепрерывно сверху [1, п. 6.2.21], мы можем найти два непересекающихся замкнутых множества F и G , для которых $F \cup G = H$, $A \cap H \subseteq F$ и $B \cap H \subseteq G$. Существование таких F и G в L вытекает из элементарности.

Рассуждаем в wL : из включения $K \subseteq H_L$ вытекает, что

$$\emptyset \neq K \cap A_L \subseteq H_L \cap A_L \subseteq F_L, \quad \emptyset \neq K \cap B_L \subseteq H_L \cap B_L \subseteq G_L.$$

Значит, K несвязно, поскольку $K \subseteq H_L = F_L \cup G_L$ и $F_L \cap G_L = \emptyset$.

Рассуждая от противного и пользуясь этим замечанием, мы видим, что C_L действительно является разрезом между A_L и B_L .

4.4. Доказательство неравенства $\dim X \leq \text{Dg } X$. По теореме Лёвенгейма–Скулема в 2^X существует *счетная* элементарная подрешетка M . Волмэновское представление wM этой решетки бикompактно и метризуемо.

Согласно теореме, доказанной в [3], имеем $\dim wM = \text{Dg } wM$. Это равенство, а также равенство $\dim wM = \dim X$ и неравенство $\text{Dg } wM \leq \text{Dg } X$, влечет $\dim X \leq \text{Dg } X$.

5. Заключительные замечания

Поскольку всякая перегородка между двумя замкнутыми множествами является также и разрезом между этими множествами, неравенство $\text{Dg } X \leq \text{Ind } X$ доказывается без особого труда для всех нормальных пространств. Из неравенства Федорчука вытекает неравенство Веденисова $\dim X \leq \text{Ind } X$ для бикompактных пространств [1, п. 7.2.8]. Методом Лёвенгейма–Скулема это неравенство можно доказать и непосредственно: в обозначениях п. 4.4 имеем

$$\dim X = \dim wM = \text{Ind } wM \leq \text{Ind } X$$

(эти равенства распространяются на все нормальные пространства с помощью стоун-чеховской компактификации).

Как отмечено во введении, стандартное доказательство того, что $\dim X \leq \text{Ind } X$, довольно просто и прямолинейно, тогда как доказательство Федорчука неравенства $\dim X \leq \text{Dg } X$, изложенное в [10], длиннее и использует рассуждения от противного для построения подходящего разреза. То же отличие наблюдается и в доказательствах, предложенных выше: в обоих случаях первый шаг состоял в выборе (счетной) решетки M , в которой выполнена формула $I_n(1)$ или $\Delta_n(1)$. Вторым шагом был вывод неравенства $\text{Ind } wM \leq n$ или $\text{Dg } wM \leq n$ соответственно. В каждом случае формула сама предлагала кандидата на роль перегородки или разреза; задача состояла в том,

чтобы показать, что этот кандидат действительно является перегородкой или разрезом в пространстве wM . В случае перегородки это легко: доказательство завершается с выбором замкнутых множеств F и G . В случае разреза мы знаем только, что наше множество-кандидат пересекается со связными элементами базы M , пересекающимися A и B ; нужно выяснить, что это верно и для всех других континуумов из wM . Именно в этом месте мы опять воспользовались элементарностью – для того, чтобы показать, что M уже содержит достаточно связных элементов. Таким образом, судя по всему, причина видимой сложности доказательства в случае размерности Dg кроется в том, что формула $\text{cut}(u, x, y, a)$ содержит универсальные кванторы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Engelking R. General Topology. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
- [2] Brouwer L. E. J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1913. V. 142. P. 146–152.
- [3] Федорчук В. В., Левин М., Шепин Е. В. О брауэровском определении размерности // УМН. 1999. Т. 54. № 2(326). С. 193–194.
- [4] Fedorchuk V. V., van Mill J. Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces // Fund. Math. 2000. V. 163. P. 77–82.
- [5] Wallman H. Lattices and topological spaces // Ann. of Math. 1938. V. 39. P. 112–126.
- [6] Hart K. P., van Mill J., Pol R. Remarks on hereditarily indecomposable continua // Proceedings of the 15th Summer Conference on General Topology and its Applications/1st Turkish International Conference on Topology and its Applications (Oxford, OH/Istanbul, 2000). V. 25, 2002. P. 179–206.
- [7] van der Steeg B. Models in Topology. Ph.D. thesis: TU Delft, 2003.
- [8] Hodges W. A Shorter Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [9] Hemmingsen E. Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces // Duke Math. J. 1946. V. 13. P. 495–504.
- [10] Федорчук В. В. О брауэровской размерности бикомпактов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 2. С. 295–304.

Technical University Delft, the Netherlands
E-mail: K.P.Hart@ewi.tudelft.nl

Поступило
01.08.2003