Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари, Об обосновании формулы мальшевского типа в аномальном случае, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 241–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:26:32

УДК 519.6

ОБ ОБОСНОВАНИИ ФОРМУЛЫ МАЛЫШЕВСКОГО ТИПА В АНОРМАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари

Пусть A – комплексная матрица порядка n , $n \geq 3$. Сопоставим ей матрицу утроенного порядка

$$Q(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – скалярные параметры и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Пусть σ_i , $1 \leq i \leq 3n$, – сингулярные числа матрицы $Q(\gamma)$, упорядоченные по убыванию. Ранее, при тех или иных ограничениях на A , авторами было доказано, что спектральное расстояние от A до множества $\mathcal{M}$ матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 , равно

$$\max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma)).$$

В настоящей статье обоснование этой формулы для расстояния проводится для произвольной матрицы A .

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица, $\mathcal{L}$ – множество $(n \times n)$ -матриц с кратным собственным значением 0. В недавней статье Малышева [1] получена следующая формула для спектрального расстояния от A до $\mathcal{L}$:

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \min_{L \in \mathcal{L}} \|A - L\|_2 = \max_{\gamma \geq 0} \sigma_{2n-1}(P(\gamma)). \quad (1)$$

Здесь

$$P(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а $\sigma_i(\cdot)$ обозначает i -е сингулярное число соответствующей матрицы при упорядочении по убыванию.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество $(n \times n)$ -матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 . В [2] авторы предположили, что расстояние $\rho_2(A, \mathcal{M})$ может быть вычислено по формуле, схожей с (1), (2); а именно, пусть

$$Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad n \geq 3. \quad (3)$$

Тогда

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) = \max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)). \quad (4)$$

(Мы намеренно выбрали симметричную относительно переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ форму записи максимума в формуле (4), хотя нетрудно показать, что для отыскания этого максимума достаточно рассматривать неотрицательные значения параметров γ_1 и γ_2 .) Однако равенство (4) не было обосновано в [2] полностью. Было доказано, что всегда справедливо неравенство

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \geq \max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)). \quad (5)$$

При этом, если максимум в правой части достигается в точке

$$\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*), \quad (6)$$

где

$$\gamma_1^* \gamma_2^* \neq 0, \quad (7)$$

то неравенство (5) превращается в равенство (4).

Обоснование формулы (4) было продолжено в нашей статье [3]. В ней было доказано, что равенство (4) имеет место для всякой *нормальной* матрицы A .

Настоящей статьей мы заканчиваем обоснование формулы. Вкратце это обоснование состоит в следующем. Множество *анормальных* матриц A , для которых максимум в правой части формулы достигается в точке (6), где нарушено условие (7), нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$ комплексных $(n \times n)$ -матриц. Это показано в пп. 2–4. Отсюда следует, что всякая “плохая” матрица A_0 может быть представлена как предел последовательности “хороших” матриц A_k , т.е. матриц, для которых равенство (4) выполняется. Будем рассматривать расстояние

$$g_1(A) = \rho_2(A, \mathcal{M}) \quad (8)$$

и максимум

$$g_2(A) = \max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) \quad (9)$$

как функции от матрицы A . Тогда, по непрерывности, равенство

$$g_1(A_k) = g_2(A_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

должно выполняться и для предельной матрицы A_0 (см. п. 5).

Закончим это введение классификацией “плохих” матриц. При фиксированной матрице A будем использовать для матрицы (3) сокращенное обозначение $Q(\gamma)$. Определим функцию f от $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ выражением

$$f(\gamma) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma)). \quad (10)$$

Теперь различные ситуации нарушения условия (7) можно описать следующим перечнем.

СИТУАЦИЯ 1. Имеет место равенство $\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma_3^* = 0$.

СИТУАЦИЯ 2. Выполнены условия $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_2^* = \gamma_3^* = 0$.

Поскольку для матриц

$$\begin{pmatrix} A & \gamma I_n & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \gamma I_n \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \gamma I_n \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & \gamma I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & \gamma I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

получаемых друг из друга перестановками блочных строк и столбцов, значение функции f одно и то же, случаи

$$\gamma_2^* \neq 0, \quad \gamma_1^* = \gamma_3^* = 0 \quad (11)$$

и

$$\gamma_3^* \neq 0, \quad \gamma_1^* = \gamma_2^* = 0$$

не отличаются принципиально от ситуации 2.

СИТУАЦИЯ 3. Выполнены условия $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_3^* \neq 0, \gamma_2^* = 0$.

В п. 4 мы показываем, как ситуация 3 сводится к ситуации 2. Точно так же, случай

$$\gamma_2^* \neq 0, \quad \gamma_3^* \neq 0, \quad \gamma_1^* = 0$$

может быть приведен к ситуации (11), эквивалентной ситуации 2.

Итак, анализа требуют только два типа “плохих” матриц. Ситуация 1 исследуется в п. 2, а ситуация 2 – в п. 3.

Рецензент данной работы отметил, что если бы нашей целью было только обоснование формулы (4), то статью можно было бы несколько сократить за счет менее подробного обсуждения разновидностей “плохих” матриц. Это замечание справедливо; мы полагаем, однако, что такое обсуждение имеет самостоятельный интерес.

2. Максимум в точке $\gamma^* = 0$. Пусть $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$ – сингулярные числа матрицы A . Будем различать три случая:

1а) $\sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A) = \sigma_{n-2}(A)$;

1б) $\sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A) < \sigma_{n-2}(A)$;

1в) $\sigma_n(A) < \sigma_{n-1}(A)$.

Заметим, что в случае 1а) равенство (4) выполняется. В самом деле, известно, что для произвольной $(n \times n)$ -матрицы A с сингулярным разложением

$$A = V \Sigma U^*, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

ближайшей (в смысле спектральной нормы) матрицей ранга $\leq n - 3$ является

$$B = V \Sigma_B U^*, \quad \Sigma_B = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}, 0, 0, 0).$$

Очевидно, что матрица B принадлежит множеству $\mathcal{M}$ и

$$\|A - B\|_2 = \sigma_{n-2}.$$

Поэтому для любой матрицы A имеет место неравенство

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \leq \sigma_{n-2}.$$

В случае 1а) оно принимает вид

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \leq \sigma_{n-2}(A) = \sigma_n(A). \quad (12)$$

С другой стороны, значение функции (10) в точке $\gamma = 0$, очевидно, равно $\sigma_n(A)$, а потому в силу (5)

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \geq \max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} f(\gamma) \geq f(0) = \sigma_n(A). \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) влекут за собой равенство (4).

Переходя к случаю 1б), заметим, что “плохие” матрицы этого случая, будучи подчинены условию

$$\sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A),$$

должны принадлежать многообразию

$$\text{discr}(A^*A) = 0. \quad (14)$$

Напомним, что *дискриминантом* квадратной матрицы B называется полиномиальная функция от элементов b_{ij} , равная нулю тогда и только тогда, когда B имеет хотя бы одну пару совпадающих собственных значений.

Рассматривая матрицу A как аналитическую функцию от $2n^2$ переменных – вещественных и мнимых частей ее элементов, видим, что соотношение (14) задает в $\mathbb{R}^{2n^2}$ аналитическое многообразие. Отсюда следует, что множество “плохих” матриц случая 1б) нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

В случае 1в) два младших сингулярных числа матрицы A различны. Рассуждая, как в [1, раздел 5.2] или [4], можем показать, что в этом случае достижение функцией f максимума в точке $\gamma^* = 0$ возможно лишь при выполнении дополнительного условия

$$v_n^* u_n = 0, \quad (15)$$

где u_n и v_n суть соответственно правый и левый (нормированные) сингулярные векторы, относящиеся к младшему сингулярному числу σ_n .

Поскольку $\sigma_n(A)$ – *простое* сингулярное число, в некоторой окрестности матрицы A число σ_n и векторы u_n и v_n суть аналитические функции тех же $2n^2$ вещественных переменных, что и выше (см. [5, гл. 2, § 8]). В пределах этой окрестности условие (15) задает аналитическое многообразие. Таким образом, множество “плохих” матриц случая 1в) вложено в (вещественное) аналитическое многообразие, а потому нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

3. Максимум в точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0, 0)$. В этом пункте символы u и v обозначают нормированные сингулярные векторы, соответственно правый и левый, ассоциированные с одним и тем же сингулярным числом σ матрицы $Q(\gamma)$:

$$Qu = \sigma v, \quad Q^*v = \sigma u. \quad (16)$$

Размерность векторов u и v равна $3n$, и их удобно представлять себе разбитыми на подвекторы размерности n :

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнения (16) записываются так:

$$Au^{(1)} + \gamma_1 u^{(2)} + \gamma_3 u^{(3)} = \sigma v^{(1)}, \quad (17a)$$

$$Au^{(2)} + \gamma_2 u^{(3)} = \sigma v^{(2)}, \quad (17б)$$

$$Au^{(3)} = \sigma v^{(3)}, \quad (17в)$$

$$A^*v^{(1)} = \sigma u^{(1)}, \quad (17г)$$

$$A^*v^{(2)} + \bar{\gamma}_1 v^{(3)} = \sigma u^{(2)}, \quad (17д)$$

$$A^*v^{(3)} + \bar{\gamma}_2 v^{(2)} + \bar{\gamma}_3 v^{(1)} = \sigma u^{(3)}. \quad (17е)$$

При $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ они распадаются на две несвязанные системы

$$Au^{(1)} + \gamma_1 u^{(2)} = \sigma v^{(1)}, \quad (18a)$$

$$Au^{(2)} = \sigma v^{(2)}, \quad (18б)$$

$$A^*v^{(1)} = \sigma u^{(1)}, \quad (18в)$$

$$A^*v^{(2)} + \bar{\gamma}_1 v^{(3)} = \sigma u^{(2)}, \quad (18г)$$

и

$$Au^{(3)} = \sigma v^{(3)}, \quad A^*v^{(3)} = \sigma u^{(3)}. \quad (19)$$

Пусть A – “плохая” матрица, т.е. максимум функции f достигается для A в точке вида

$$\gamma^* = (\gamma_1, 0, 0), \quad \gamma_1 \neq 0. \quad (20)$$

Положим

$$\sigma^* = f(\gamma^*) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma^*)).$$

Будем различать два случая:

2а) величина σ^* есть простое сингулярное число матрицы $Q(\gamma^*)$;

2б) величина σ^* есть кратное сингулярное число матрицы $Q(\gamma^*)$.

В первом случае в некоторой окрестности матрицы $Q(\gamma^*)$ число $\sigma_{3n-2}(Q(\gamma))$ и отвечающие ему векторы u и v суть аналитические функции от $2n^2 + 6$ вещественных переменных – вещественных и мнимых частей элементов a_{ij} , а также вещественных и мнимых частей параметров $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. В точке максимума γ^* подвекторы u и v должны удовлетворять соотношениям

$$v^{(1)*}u^{(2)} = 0, \quad v^{(2)*}u^{(3)} = 0, \quad v^{(1)*}u^{(3)} = 0 \quad (21)$$

(см. [2, лемма 6 и последующее замечание]). Записанные в точке (20), эти соотношения превращаются в аналитические уравнения, связывающие элементы a_{ij} и параметр γ_1 . Если в каком-то из уравнений (21) γ_1 в действительности отсутствует, мы сразу имеем аналитическое условие, наложенное на элементы “плохой” матрицы A . В противном случае, разрешая какие-то два из шести вещественных соотношений (21) относительно $\operatorname{Re} \gamma_1$ и $\operatorname{Im} \gamma_1$, а затем подставляя результат в остальные соотношения, снова приходим к аналитическому описанию множества “плохих” матриц. И в том, и в другом случае это множество нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Перейдем теперь к анализу ситуации 2б). Прежде всего, отметим, что в точке γ^* выполняется соотношение

$$\operatorname{discr}(Q^*(\gamma)Q(\gamma)) = 0, \quad (22)$$

представляющее собой аналитическое условие на элементы a_{ij} и параметр γ_1 .

Система (17а)–(17е) распадается в точке γ^* на две: систему (18а)–(18г) и систему (19). При этом во всех трех следует положить $\sigma = \sigma^*$.

Система (18а)–(18г) означает, что число σ^* есть максимум функции Малышева:

$$h(\gamma_1) = \sigma_{2n-1}(P(\gamma_1)). \quad (23)$$

То обстоятельство, что в нашей задаче максимум функции (23) берется по всей комплексной плоскости, а в формуле (1) лишь по неотрицательным γ_1 , не имеет значения: эти максимумы совпадают.

Если система (19) имеет ненулевое решение $(u^{(3)}, v^{(3)})$, то σ^* является сингулярным числом и для самой матрицы A . Поскольку функция h всегда находится в пределах

$$\sigma_n(A) \leq h(\gamma_1) \leq \sigma_{n-1}(A),$$

то $\sigma^* = \sigma_n(A)$ либо $\sigma^* = \sigma_{n-1}(A)$. Однако первое равенство означало бы, что

$$\sigma^* = \max_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}} f(\gamma) = f(0),$$

что расходится с описанием ситуации 2 (см. п. 1).

Итак, если σ^* есть сингулярное число матрицы A , то

$$\sigma^* = \sigma_{n-1}(A).$$

Если при этом

$$\sigma_{n-1}(A) = \sigma_{n-2}(A),$$

то A принадлежит аналитическому многообразию (14). Тем самым, множество “плохих” матриц этого типа нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Пусть теперь

$$\sigma^* = \sigma_{n-1}(A) < \sigma_{n-2}(A).$$

Однако σ^* может быть кратным сингулярным числом для матрицы $P(\gamma_1^*)$. В этом случае условие (22) эквивалентно паре независимых уравнений

$$\text{discr}(P^*(\gamma_1)P(\gamma_1)) = 0, \quad (24)$$

$$\text{res}(P^*(\gamma_1)P(\gamma_1), A^*A) = 0, \quad (25)$$

где символ $\text{res}(C, D)$ обозначает результат матриц C и D , т.е. многочлен от элементов c_{ij} и d_{ij} , обращающийся в нуль тогда и только тогда, когда C и D имеют общее собственное значение. Исключая из системы (24), (25) параметр γ_1 , получим аналитическое условие для “плохих” матриц рассматриваемого типа со стандартным выводом: множество таких матриц нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Перейдем теперь к случаю, когда σ^* есть простое сингулярное число как для A , так и для $P(\gamma_1^*)$. В этом случае в некоторой окрестности матрицы $P(\gamma_1^*)$ число $\sigma_{2n-1}(P(\gamma_1))$ и отвечающие ему сингулярные векторы, правый вектор w и левый вектор z , суть аналитические функции от $2n^2 + 2$ вещественных переменных – вещественных и мнимых частей элементов a_{ij} , а также величин $\text{Re } \gamma_1$ и $\text{Im } \gamma_1$. Запишем w и z в блочном виде

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix},$$

где все подвекторы имеют размерность n . В точке максимума γ_1^* эти подвекторы должны подчиняться условию

$$z^{(1)*}w^{(2)} = 0 \quad (26)$$

(см. [1, с. 448]). Система, состоящая из уравнений (22) и (26), позволяет исключить параметр γ_1 и получить аналитическое условие для элементов a_{ij} “плохих” матриц данного типа. Снова множество таких матриц нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Остается исследовать случай, когда σ^* не является сингулярным числом для A , но зато является кратным сингулярным числом для $P(\gamma_1^*)$. Поскольку система (19) имеет только тривиальное решение, для всякого сингулярного вектора матрицы $Q(\gamma^*)$, относящегося к σ^* , последняя блочная компонента равна нулю:

$$u^{(3)} = 0, \quad v^{(3)} = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим некоторую окрестность матрицы $Q(\gamma^*)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n^2+6}$ и рассмотрим $f(\gamma)$ как функцию от $2n^2+6$ вещественных переменных в этой окрестности. Поскольку σ^* есть кратное сингулярное число матрицы $Q(\gamma^*)$, функция f может потерять свойство дифференцируемости (в смысле наличия полного дифференциала) в точке γ^* (см. пример такого рода в [5, гл. 2, § 7]). Что касается сингулярных векторов, относящихся к $\sigma_{3n-2}(\gamma)$, то они могут быть даже разрывны. Будем однако вместо отдельных сингулярных векторов, ассоциированных с σ^* , рассматривать все сингулярное подпространство, для определенности, правое. Обозначим через m его размерность ($m \geq 2$), а само подпространство через $\mathcal{U}_m$.

Проследим за эволюцией подпространства $\mathcal{U}_m$ в окрестности матрицы $Q(\gamma^*)$. Теряя в этой окрестности смысл сингулярного подпространства, ассоциированного с единственным сингулярным числом, $\mathcal{U}_m$ остается инвариантным подпространством матрицы $Q^*(\gamma)Q(\gamma)$, отвечающим группе собственных значений, порожденных расщеплением числа σ^{*2} . Чрезвычайно важно то обстоятельство, что пока эта группа собственных значений остается отделенной от остального спектра, подпространство $\mathcal{U}_m$ сохраняет аналитическую зависимость от матрицы. Иначе то же самое можно сказать так: подпространство $\mathcal{U}_m$ имеет базисную $(n \times m)$ -матрицу $U_m(\gamma)$ с ортонормированными столбцами, которая в некоторой окрестности матрицы $Q(\gamma^*)$ аналитически зависит от указанных выше $2n^2 + 6$ вещественных переменных.

Пусть $e_1, \dots, e_{3n}$ – координатные векторы пространства $M_{3n}(\mathbb{C})$. Положим

$$E = (e_{2n+1} \ e_{2n+2} \ \dots \ e_{3n}).$$

Тогда первое соотношение в (27) означает, что

$$E^T U_m(\gamma^*) = 0.$$

Это матричное равенство эквивалентно системе из mn скалярных (аналитических) условий, связывающих элементы a_{ij} и параметр γ_1 . Рассматривая их вместе с уравнением

$$\text{discr}(P^*(\gamma_1)P(\gamma_1)) = 0,$$

мы, как и выше, сможем получить аналитические уравнения, связывающие элементы a_{ij} “плохих” матриц данного типа. Следовательно, множество этих матриц нигде не плотно в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Ситуация 2 теперь проанализирована полностью.

4. Максимум в точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0, \gamma_3^*)$. Покажем, что если функция f достигает своего максимума в точке γ^* указанного вида, то найдется другая точка

$$\tilde{\gamma}^* = (\tilde{\gamma}_1^*, 0, 0),$$

где f принимает такое же значение. Отсюда будет следовать, что все “плохие” матрицы данного случая уже учтены нами в анализе из предыдущего пункта.

Почему высказанное утверждение справедливо, проще всего объяснить, моделируя данную ситуацию с помощью скалярной (3×3) -матрицы

$$Q(\gamma^*) = \begin{pmatrix} a & \gamma_1^* & \gamma_3^* \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Выполним с этой матрицей подобие

$$Q(\gamma^*) \rightarrow R_{23}^* Q(\gamma^*) R_{23}, \quad (28)$$

где R_{23} есть комплексное вращение в плоскости $(2, 3)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -se^{i\phi} \\ 0 & se^{-i\phi} & c \end{pmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Легко видеть, что подобие (28) не изменяет в матрице Q скалярную подматрицу

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате подобия приходим к матрице

$$Q(\tilde{\gamma}^*) = \begin{pmatrix} a & \tilde{\gamma}_1^* & \tilde{\gamma}_3^* \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\gamma}_1^* = c\gamma_1^* + se^{-i\phi}\gamma_3^*, \quad \tilde{\gamma}_3^* = -se^{i\phi}\gamma_1^* + c\gamma_3^*.$$

Выбирая значения параметров ϕ , c и s таким образом, чтобы $\tilde{\gamma}_3^* = 0$, получим матрицу $Q(\tilde{\gamma}^*)$ требуемого вида. Поскольку переход от $Q(\gamma^*)$ к $Q(\tilde{\gamma}^*)$ произошел посредством унитарного преобразования, обе матрицы имеют одни и те же сингулярные числа.

Возвращаясь к блочной матрице (3) и функции (10), заменим скаляры a , γ_1^* , γ_3^* , $\tilde{\gamma}_1^*$, $\tilde{\gamma}_3^*$, c и s матрицей A и скалярными матрицами $\gamma_1^* I_n$, $\gamma_3^* I_n$, и т.д. В результате от исходной матрицы

$$\begin{pmatrix} A & \gamma_1^* I_n & \gamma_3^* I_n \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

перейдем, не меняя значения функции f , к матрице

$$\begin{pmatrix} A & \tilde{\gamma}_1^* I_n & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

5. О деталях обоснования формулы (4). По существу, обоснование формулы (4), в котором авансом использованы результаты пп. 2–4, уже проведено во введении статьи. Нам остается лишь разъяснить в нем некоторые детали.

Непрерывность функций $g_1(A)$ и $g_2(A)$ (см. (8) и (9)) легко следует из известных неравенств для сингулярных чисел. Однако в самом определении функции g_2 имеется не-проясненный нюанс, а именно, почему знак супремума в формуле (9) можно заменить максимумом.

Покажем, что функция $f(\gamma)$, определенная в (11), стремится к нулю при

$$\|\gamma\|_2^2 = |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2 \rightarrow \infty.$$

Отсюда будет следовать, что для достаточно большого положительного числа R справедливо неравенство

$$f(\gamma) < f(\gamma_0) \quad \text{при} \quad \|\gamma\|_2 > R > \|\gamma_0\|_2,$$

где γ_0 – фиксированная точка, в которой значение $f(\gamma_0)$ положительно. Поэтому для отыскания супремума функции f во всем пространстве можно ограничиться рассмотрением множества

$$\|\gamma\|_2 \leq R.$$

На этом множестве непрерывная функция f достигает своего супремума.

Поведение функции f при больших $\|\gamma\|_2$ исследуем с помощью соображений, аналогичных тем, что использованы Малышевым в [1, лемма 2]. Предположим, что A – невырожденная матрица. Тогда

$$f(\gamma) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma)) = \frac{1}{\sigma_3(Q^{-1}(\gamma))}. \quad (29)$$

Несложно проверить, что матрица $Q^{-1}(\gamma)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -\gamma_1 A^{-2} & -\gamma_3 A^{-2} + \gamma_1 \gamma_2 A^{-3} \\ 0 & A^{-1} & -\gamma_2 A^{-2} \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Из известных неравенств типа Коши, связывающих сингулярные числа матрицы и ее подматриц, вытекает, что

$$\sigma_3(Q^{-1}(\gamma)) \geq |\gamma_1| \sigma_3(A^{-2}) = \frac{|\gamma_1|}{\sigma_{n-2}(A^2)}, \quad (30)$$

$$\sigma_3(Q^{-1}(\gamma)) \geq \frac{|\gamma_2|}{\sigma_{n-2}(A^2)}, \quad (31)$$

$$\sigma_3(Q^{-1}(\gamma)) \geq \sigma_3(\gamma_3 A^{-2} - \gamma_1 \gamma_2 A^{-3}). \quad (32)$$

Если $\|\gamma\|_2 \rightarrow \infty$ и при этом

$$\delta = \max\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\} \rightarrow \infty,$$

то из (30) и (31) следует, что

$$\sigma_3(Q^{-1}(\gamma)) \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Если же

$$\delta \leq C = \text{const},$$

то

$$\sigma_3(\gamma_3 A^{-2} - \gamma_1 \gamma_2 A^{-3}) \geq \frac{|\gamma_3|}{\sigma_{n-2}(A^2)} - \frac{C^2}{\sigma_n(A^3)}$$

и тот же вывод (33) получается из неравенства (32). Во всех случаях соотношение (29) показывает, что $f(\gamma) \rightarrow 0$ при $\|\gamma\|_2 \rightarrow \infty$.

В случае вырожденной матрицы A применяется то же рассуждение по непрерывности, что и в [1, лемма 2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Malyshev A. N. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues // Numer. Math. 1999. V. 83. P. 443–454.
- [2] Икрамов Х. Д., Назари А. М. О расстоянии до ближайшей матрицы с тройным собственным значением нуль // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 545–555.
- [3] Икрамов Х. Д., Назари А. М. Нормальные матрицы и обобщение формулы Малышева // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 5. С. 652–662.
- [4] Икрамов Х. Д., Назари А. М. О ближайшей матрице с тройным собственным значением нуль // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем., киберн. 2003. № 4. С. 20–24.
- [5] Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer-Verlag, 1966.

(Х. Д. Икрамов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(А. М. Назари) Университет г. Эрак, Исламская Республика Иран
E-mail: ikramov@cs.msu.ru

Поступило
26.12.2003
Исправленный вариант
08.12.2004